Michał Charlak*, Marek A. Jakubowski*

PORÓWNANIE PRZYDATNOŚCI WYBRANYCH MODELI REGRESJI W BADANIACH PEDAGOGICZNYCH

Streszczenie. W publikacji przedstawiono genezę zbioru rozmytego oraz możliwości wykorzystania systemów rozmytych w praktyce. Szczególną uwagę zwrócono na modele rozmyte procesów nauczania i uczenia się. Wykorzystując wybrane modele oraz wspomaganie komputerowe uzyskuje się istotne poszerzenie podstawowych funkcji poznania naukowego ż uwzględnieniem czynników dotychczas nie rozpatrywanych. Uwzględnienie tych dodatkowych danych pozwala znacznie usprawnić pracę pedagogiczną nauczyciela jako twórcy i badacza zjawisk.

1. WSTĘP

We współczesnym rozumieniu pedagogika jest uznana za naukę zajmującą się całością zjawisk wychowawczych, tzn. warunkami, w których zjawiska wychowawcze przebiegają celami, którym ma służyć wychowanie, treściami działalności wychowawczej oraz metodami, formami i środkami, które mają zapewnić skuteczność oddziaływania wychowawczego.

Przedmiotem pedagogiki jest wychowanie pojmowane ogólnie jako świadome i zamierzone kształtowanie różnych stron osobowości wg przyjętych wzorów w toku stosunków i interakcji społecznych. Pedagogika bada zatem obiektywne procesy i zjawiska wychowawcze w całej różnorodności ich warunków, treści, form, przebiegu i rezultatów.

Przede wszystkim jednak bada zależności pomiędzy różnymi zjawiskami wychowawczymi, aby na tej podstawie wykrywać rozmaite prawidłowości i formułować twierdzenia lub sądy ogólne, stanowiące teoretyczną podstawę budowania programów działania praktycznego.

Tak określone pojęcie pedagogiki jako nauki oraz przedmiotu jej badań lokuje ją w grupie nauk empirycznych, której znamienną wartością jest poznawanie realnej rzeczywistości i gromadzenie o niej faktów. Rzeczywistość tą trzeba jednak poznać w sposób naukowy. Aby poznanie było uznane za naukowe musi spełniać trzy podstawowe funkcje (zadania):
- opisowa (deskryptywna),
- wyjaśniająca (eksplanacyjna),
- przewidywawcza.

* Michał CHARLAK, Marek A. JAKUBOWSKI – Katedra Podstaw Techniki, Politechnika Lubelska.

Te trzy podstawowe funkcje spełniają wszystkie nauki empiryczne, a więc i pedagogika, choć poglądy pedagogów co do ilości i podziałów klasyfikacyjnych funkcji pedagogiki nie są w pełni ujednolicone.

Poznanie naukowe w pedagogice ma do spełnienia jeszcze jedną podstawową funkcję: instrumentalno-techniczną (praktyczną), czyli by zgromadzona i uporządkowana wiedza mogła być wykorzystana w praktyce. Działanie to ma za zadanie dostarczenie wiedzy o tym, za pomocą jakich działań, metod, form i środków można wywołać zjawiska pożądane oraz unikać zjawisk niepożądanych.

Wymienione funkcje znajdują odzwierciedlenie w organizacji procesu badawczego, jak również w ogólnometodologicznym wzorze pedagogicznych badań empirycznych [1].

2. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA FORMALIZMU ROZMYTOŚCI

W roku 1965 naukowiec amerykański urodzony w Baku wprowadził pojęcie zbioru rozmytego [2]. Oznaczmy jako X zbiór niepusty – uniwersum. Jak wiadomo z logiki formalnej dowolny podzbiór A zbioru X w logice klasycznej można zdefiniować za pomocą tzw. funkcji charakterystycznej:

$$fA(x) = 1 \text{ jeśli } x \in X;\ fA(x) = 0 \text{ jeśli } x \notin X \tag{1}$$

Wspomniane oszacowanie wartości funkcji przynależności elementu do podzbioru rozmytego najczęściej posiada charakter oszacowania subiektywnego. W tym fakcie zawarta jest niezwykła „siła” formalizmu rozmytości, dzięki któremu można zapisać matematycznie dotychczas nieuchwytne i nieścisłe sądy ekspertów oraz modelować pojęcia nieścisłe, dwuznaczne itp. Następna bardzo ważna zaleta opisywanego formalizmu rozmytości wiąże się z ciągłym przebiegiem funkcji przynależności. Obecnie w systemach rozmytych stosowane są standardowe funkcje przynależności, najczęściej trójkątne lub trapezoidalne. Dzięki temu w prosty sposób można stosować podstawowe operatory teorii mnogości (operacje: negacji, iloczynu logicznego zbiorów, sumy logicznej i inne). Można zaryzykować twierdzenie, że prof. L.A. Zadeh nieco „zmodyfikował” logikę wielowartościową. Dlatego w pierwszym okresie rozwoju teorii zbiorów rozmytych prof. Susan Haack w swoim słynnym artykule „Do we need fuzzy logic?” zakwestionowała potrzebę wprowadzania jeszcze jednej logiki. Pomijając spory terminologiczne logików stwierdzamy jednoznacznie, że dzięki udanym implementacjom logiki rozmytej w urządzeniach elektronicznych, w technice samochodowej, medycynie, napędach elektrycznych i w wielu innych dziedzinach nauki i techniki przydatność omawianego formalizmu jest nie do podważenia.

Szczegóły dotyczące podstaw teoretycznych oraz zastosowań formalizmu można znaleźć w bardzo bogatej literaturze przedmiotu. Wymienimy tylko kilka pozycji [3, 4, 5]. Ścisły opis matematyczny można znaleźć między innymi w monografii prof. C.V. Negoity [6].

W dalszym ciągu artykułu przedstawiamy definicje elementarnych operacji teoriomnogościowych z wykorzystaniem podzbiorów rozmytych.

Niech X oznacza zbiór niepusty, natomiast wartości funkcji przynależności podzbiorów rozmytych zawarte są w przedziale [0, 1]. Pusty zbiór rozmyty ϕ definiuje się jako

$$f\{\phi(x)\} \text{ dla } \forall x \in X \tag{2}$$

Dopełnienie A* podzbioru rozmytego A można zdefiniować jako:

$$f\{A^*(x)\} = 1 - fA(x) \text{ dla } \forall x \in X \tag{3}$$

Mówimy, że podzbiór rozmyty A jest zawarty w podzbiorze rozmytym B, (piszemy $A \subset B$), jeśli:

$$f\{A(x)\} \leq f\{B(x)\} \text{ dla } \forall x \in X \tag{4}$$

Sumę logiczną dwóch podzbiorów rozmytych $A \cup B$ definiujemy następująco:

$$f\{A \cup B\}(x) = \max\{fA(x), fB(x)\} \text{ dla } \forall x \in X \tag{5}$$

Iloczyn logiczny dwóch podzbiorów rozmytych A Ç B definiuje się następująco:

$$f\{A \cap B\}(x) = \min\{fA(x), fB(x)\} \text{ dla } \forall x \in X \tag{6}$$

Podsumowując stwierdzamy, że ogólnie rzecz ujmując algebra podzbiorów rozmytych zachowuje wszystkie operacje teoriomnogościowe klasycznej teorii zbiorów. Wyjątek stanowią następujące prawa logiki:

$$A \cup A^* \neq X \tag{7}$$

$$A \cap A^* \neq \varnothing \tag{8}$$

3. MODELE PROBABILISTYCZNE A MODELE ROZMYTE PROCESÓW KSZTAŁCENIA

Pod pojęciem modeli probabilistycznych należałoby rozumieć tylko modele formułowane i badane na gruncie teorii prawdopodobieństwa. W tym przypadku modele statystyczne, tworzone na podstawie danych pochodzących z obserwacji stanowiłyby odrębną jakość. W zastosowaniach praktycznych rozróżnienia tego na ogół się nie przestrzega. Podejście probabilistyczne jest utożsamiane z każdym odwzorowaniem losowości. W ten sposób rozumiany jest termin „model probabilistyczny" używany w tej pracy.

Można wymienić liczne udane próby budowy modeli probabilistycznych, tzw. systemów edukacyjnych, zarówno w Polsce [7] jak i za granicą [8]. Wyczerpujący przegląd zastosowań, które można by nazwać klasycznymi podaje D.J. Bartholomew [9]. Dla przykładu opiszemy w skrócie podstawowe założenia modelu probabilistycznego według Bartholomewa. Prosty model procesu kształcenia zakłada, że populacja studentów (np. licencjat) jest scharakteryzowana przez trzy zmienne: x(n), y(n) i z(n). Oznaczają one liczby studentów pod koniec roku akademickiego (po sesji letniej) dla pierwszego, drugiego i trzeciego roku odpowiednio. Zakłada się, że zmiany liczby studentów z roku n w stosunku do roku następnego n+1 (dla każdego roku studiów) są stochastyczne i zależą od następujących wielkości:

1) prawdopodobieństwo p_{ij} tego, że indywidualny student, który jest na roku i przejdzie na rok j,
2) prawdopodobieństwo q_i tego, że dany student który jest na roku i opuści uczelnię, np. zrezygnuje ze studiów, zachoruje itp.,
3) liczby „ nowych” studentów e_i (n), dla danego roku studiów i, którzy np. przenieśli się z innej uczelni itp., i = 1, 2, 3.

Wprowadzone wielkości nazywamy zmiennymi stochastycznymi. Zakłada się ponadto, że znane są ich rozkłady statystyczne oraz, że są one wzajemnie niezależne. Można postawić tezę, że prawdopodobieństwa przejść poszczególnych x(n) do x(n+1) są w pełni scharakteryzowane statystycznie.

Przedstawiony powyżej model elementarny jest sukcesywnie rozbudowywany. Szczegóły można znaleźć w literaturze przedmiotu.

Należy podkreślić fakt, że wspomniany model stanowi podstawę dalszych jego rozszerzeń, których celem może być prognozowanie „przepływu” studentów przez system w ramach pojedynczej uczelni, regionu, państwa lub w skali międzynarodowej [10]. Do celu prognozowania wyżej wymienionych procesów dogodnie jest wykorzystywać teorię łańcuchów Markowa.

4. ROZMYTE MODELE REGRESJI LINIOWEJ W PRZYPADKU DANYCH POMIAROWYCH INTERWAŁOWYCH

Podstawowym pojęciem używanym w teorii podzbiorów rozmytych jest wprowadzona przez prof. L.A. Zadeha uogólniona funkcja charakterystyczna, inaczej funkcja przynależności elementu do zbioru (membership function). Funkcja ta przyporządkowuje każdemu elementowi x zbioru X ułamek dziesiętny z przedziału {0; 1}. Zatem wartość fA(x) może być rozważana jako „stopień akceptacji” zdania logicznego „x jest elementem A”.

Zakładamy, że dane wyjściowe modelu posiadają następującą postać:

$$Y_j = [y_{jL}, y_{jR}] = < yj_c, y_{jw} >, \quad j = 1, 2, ..., m \tag{9}$$

Y_j stanowi wektor liczb rzeczywistych.

4.1. Analiza posybilistyczna modelu

Mamy:

$$Y^*(X_j) = A_0^* + A_1^*X_{1j} + ... + A_n^*X_{nj} = <a_{0c}^*, a_{0w}^*> + <a_{1c}^*, a_{1w}^*> x_{1j} +...+ <a_{nc}^*, a_{nw}^*> \quad (10)$$

$$x_{nj} = <y_c^*(x_j), y_w^*(x_j)> \quad (11)$$

$$\text{dla } Y_j \leq Y^*(x_j), \quad j = 1, 2, ..., m \quad (12)$$

$Y^*(x_j)$ oznacza oszacowanie posybilistyczne Y_j, w tym sensie, że symbol $Y^*(x_j)$ reprezentuje zbiór estymat możliwych wartości Y_j. Problem minimalizacji dla przypadku danych interwałowych można sformować następująco:

$$\text{Min } y_w(x_1) + y_w(x_2) + ... + y_u(x_m) \quad (13)$$

$$\text{dla } Y_j \text{ Ł } Y^*(X_j), j = 1, 2, ..., m \quad (14)$$

$$a_{iw} \text{ ł } 0, i = 0, 1, ..., n \quad (15)$$

Analogicznie jak dla przypadku poprzedniego, alternatywne sformułowanie problemu LP, będzie miało postać:

$$\text{Min} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{ow} + a_{iw} \cdot \left|X_{ij}\right| + ... + a_{uw} \cdot \left|X_{uj}\right|\right) \quad (16)$$

Dla

$$a_{oc} + \sum_{i=1}^{n} a_{ic} \cdot X_{ij} - a_{ow} - \sum_{i=1}^{n} a_{iw}\left|X_{ij}\right| \leq y_{jl}, \text{ j} = 1, 2, ..., \text{m} \quad (17)$$

$$a_{oc} + \sum_{i=1}^{n} a_{ic} \cdot X_{ij} + a_{ow} + \sum_{i=1}^{n} a_{iw} \cdot \left|X_{ij}\right| \geq y_{jr}, \text{ j} = 1, 2, ..., \text{m} \quad (18)$$

$$a_{iw} \geq 0, \text{ i} = 1, 2, ..., \text{n} \quad (27)$$

4.2. Analiza „koniecznościowa" modelu (necessity analysis)

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} Y(X_J) &= A_O + A_1 \cdot X_{1J} + ... + A_U \cdot X_{UJ} = \\ &= \langle a_{OC}, a_{ow} \rangle + \langle a_{1c}, a_{1w} \rangle \cdot X_{1j} + ... + \langle a_{uc}, a_{uw} \rangle \cdot X_{uj} = \quad (19) \\ &= \langle Y_c \cdot (X_j); Y_w \cdot (X_j) \rangle \end{aligned}$$

Dla:

$$Y(X_j) \leq Y_j ,\ \text{j = 1, 2, ..., m} \tag{20}$$

Ponieważ liniowy model interwałowy $Y(X)$ „zawarty" jest w danych, może być interpretowany jako oszacowanie, że $Y(X_j)$ oznacza „koniecznie zawarte" w Y_j.

Na podstawie warunku 20 widać, że im większe jest y_w tym „lepsza" jest estymacja. Zatem promień $Y_w(X_j)$ prognozowanego interwału $Y(X)$ powinien podlegać maksymalizacji.

Stąd następujące sformułowanie problemu prognozowania liniowego:

$$\text{Max } Y_w \cdot (X_1) + Y_w \cdot (X_2) + \ldots + Y_w \cdot (X_m) \tag{21}$$

dla

$$Y \cdot (X_j) \leq Y_j ,\ \text{j = 1, 2, ..., m} \tag{22}$$

Analogicznie jak przednio, alternatywne sformułowanie problemu LP dla opisanego przypadku, ma postać:

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{m} a_{ow} + a_{1w} \cdot |X_{1j}| + \ldots + a_{uw} \cdot |X_{uj}| \tag{23}$$

Dla

$$a_{ol} + \sum_{i=1}^{n} a_{1l} \cdot X_{ij} - \sum_{i=1}^{n} a_{iw} \cdot |X_{ij}| \geq Y_{il} ,\ \text{j = 1, 2, ..., m} \tag{24}$$

$$a_{ol} + \sum_{i=1}^{n} a_{1l} \cdot X_{ij} + \sum_{i=1}^{n} a_{iw} \cdot |X_{ij}| \leq Y_{jr} ,\ \text{j = 1, 2, ..., m} \tag{25}$$

$$a_{iw} \geq 0 ,\ \text{i = 0, 1, 2, ..., n} \tag{26}$$

Uwaga: W przypadku, gdy nie można otrzymać rozwiązania LP problemu wg wzorów (24)–(26) należy zastosować model interwałowy nieliniowy. Szczegóły w literaturze [11].

4.3. Porównanie wybranych modeli regresji

Poniższa tabela porównuje wybrane techniki modelowania regresji. Istotnym jest, iż metoda interpolacji ma ograniczone zastosowania, ale została umieszczona w tabeli ze względu na jej odmienne właściwości w porównaniu do regresji wielowymiarowej. Właściwości modelowania regresji metodą logiki rozmytej znajdują się pomiędzy regresją wielowymiarową a interpolacją.

Tabela 1. Porównanie wybranych modeli regresji [12]

Wyszczególnienie	Regresja wielowymiarowa	Interpolacja	Sieć neuronowa	Logika rozmyta
Właściwości korelacji	globalne	lokalne	połączenie lokalnych i globalnych	połączenie lokalnych i globalnych
Aproksymacja bardzo złożonych procesów	słaba	dobra	doskonała	doskonała
Rozszerzenie do wielu wymiarów	łatwe	trudne	łatwe	łatwe
Wrażliwość na dane o dużo większej wartości	niewrażliwa	bardzo czuła	niewrażliwa	niewrażliwa
Włączanie i wyciągnie wniosków	możliwe	trudne	trudne	możliwe
Czas obliczeń do identyfikacji modelu	szybki	szybki	powolny	powolny
Czas obliczeń do uzyskania danych wyjściowych modelu	szybki	szybki	szybki	szybki
Wiele wyjść z pojedynczego modelu	trudne (używa modeli złożonych)	trudne (używa modeli złożonych)	łatwe	trudne (używa modeli złożonych)

5. WNIOSKI

Modele rozmyte procesów i zjawisk wychowawczych, procesów i heurystyk nauczania i uczenia się itp. stanowią nowy paradygmat rozwoju, szczególnie w zakresie komputerowego wspomagania pracy nauczyciela. Zgodnie z tezą Imre Lokatosa za paradygmat uważamy nie teorie, ale program badań (rolę nauczyciela jako twórcy i badacza).

„Klasyczna” teoria łańcuchów Markowa może być rozszerzona do modelu rozmytego. Prof. L.A. Zadeh wprowadził pojęcie tzw. miary probabilistycznej zdarzeń rozmytych [13]. Natomiast pojęcie rozmytego procesu stochastycznego, będące istotnym rozszerzeniem zadehowskiej definicji zmiennej losowej pojawiło się po raz pierwszy w opublikowanej w 1980 roku pracy [14] autorstwa A. Kandela i W.J. Byatta. Z kolei w pracy polskiego badacza [15] opisano niektóre własności tzw. rozmytego procesu gałązkowego, jako szczególny przypadek rozmytego procesu Markowa.

Przedstawiona w pracy metodyka rozmytej analizy regresji liniowej jest zgodna z intuicją badacza, jest także bardzo przydatna w analizie numerycznej, symulacji jakościowej oraz wizualizacji komputerowej.

Modelowanie rozmyte pozwala istotnie poszerzyć i pogłębić wszystkie trzy podstawowe funkcje poznania naukowego (funkcja: opisowa, wyjaśniająca i prognostyczna), ponieważ uwzględnia dotychczas nie rozpatrywane aspekty rzeczywistości badanej (dane nieścisłe, pojęcia złożone itp.) również w zakresie działań praktycznych (np. program fuzzyTECH) pozwala usprawnić pracę.

LITERATURA

1. Żeczkowska B.: Wybrane metodologiczne wzory badań empirycznych w pedagogice. Uniwersytet Śląski, Katowice 1985.
2. Zadeh L.A.: Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 1965: 338–353.
3. Yager R.R., Filev D.P.: Podstawy modelowania i sterowania rozmytego. WNT-Wiley, Warszawa 1995.
4. Rutkowska D., Piliński M., Rutkowski L.: Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte”. PWN, Warszawa 1997.
5. Driankov D., Hellendoorn H., Reinfrank M.: An introduction to fuzzy control. Springer Verlag, N. York 1992.
6. Negoita C.V., Ralescu D.A.: Application of fuzzy sets to systems analysis. Birkhauser Verlag, Boston 1975.
7. Grabowski A., Piasecki S.: Model sterowania procesem kształcenia przy zadanych potrzebach kadr wykwalifikowanych. [W:] Problemy prognozowania i planowania rozwoju społeczno-gospodarczego. IBS, PAN, Ossolineum, Warszawa 1979.
8. Norman M.E.: Markov processes and learning models. Academic Press 1972.
9. Bartholomew D.J.: Stochastic models for social processes. Wiley, London 1973.
10. Kulikowski R. (red.): Modelowanie systemowe społeczno-gospodarczego rozwoju kraju. PWN, Warszawa 1979.
11. Ishibushi H., Tanaka H.: Identification of fuzzy parameters by interval regression models. *Electronics and Communications in Japan*, Part 3, 73, No 12/1990: 19–27.
12. Schaible B., Lee Y.C.: Fuzzy logic based regression models for electronics manufacturing applications. 2000.
13. Zadeh L.A.: Probability measures of fuzzy events. *Journal Math. Anal. and Appl.*, 23, 1968.
14. Kandel A., Bayatt W.J.: Fuzzy processes. *Fuzzy sets and systems*, 4, 1980.
15. Kuiński J.: Rozmyte procesy gałązkowe. Rozprawy. Politechnika Poznańska, Nr 199, Poznań 1988.

Comparing of selected regression models to use in pedagogies research

Summary

Genesis of fuzzy set and possibilities of use fuzzy systems in practice were presented in the paper. There were special attention taken to fuzzy models of teaching processes. Using the computer aided modelling a widening of fundamental function of perceptive study are obtained. New factors there were taken under consideration that were allowed to rationalize teachers work as phenomenon creator and investigator.