

# **Wyznaczenie ekwiwalentnego wiskotycznego tłumienia drgań w konstrukcjach wielomateriałowych**

**Jacek Szulej**

*Politechnika Lubelska, Wydział Budownictwa i Architektury,  
Katedra Mechaniki Budowli, e-mail: j.szulej@pollub.pl*

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono wybrane wyniki pracy realizowanej w ramach grantu promotorskiego. Celem pracy była analiza i weryfikacja metod służących określeniu współczynników tłumienia drgań złożonych materiałów i konstrukcji wielomateriałowych oraz wyznaczenie na podstawie badań wartości parametrów tłumienia drgań dla kilku różnych klas budowli i konstrukcji.

**Słowa kluczowe:** ekwiwalentne wiskotyczne tłumienie, konstrukcje wielomateriałowe, modele tłumienia.

## **1. Wstęp**

W ostatnich kilkadziesiąt lat można zaobserwować stały wzrost liczby projektowanych i wykonywanych coraz bardziej smukłych i wiotkich konstrukcji (mosty wiszące i podwieszane, maszty, kładki). Prawidłowe projektowanie takich budowli, jak i ich bezpieczna eksploatacja wymaga wiedzy na temat dynamicznego zachowania się konstrukcji. Jednym z głównych parametrów opisujących zachowanie prawidłowo zaprojektowanych budowli jest odpowiedni poziom tłumienia przy drganiach konstrukcji.

W artykule przedstawiono metody określające współczynniki tłumienia drgań oraz ich weryfikację na podstawie wyników pomiarów drgań własnych tych konstrukcji.

Rozpatrywane metody szacujące poziomu tłumienia:

- metoda wykorzystująca energię potencjalną rozpatrywanej konstrukcji,
- metoda wykorzystująca energię kinetyczną rozpatrywanej konstrukcji,
- metoda kolokacyjna,
- metoda filtracyjno-regresyjna.

Konstrukcje i modele służące weryfikacji wyżej wymienionych metod:

- sześć modeli różnych konstrukcji, cztery proste i dwa złożone,
- strop żelbetowy monolityczny w budynku wielorodzinnym i typu Teriva w budynku jednorodzinny,
- cztery kładki: dwie stalowe belkowe i dwie podwieszane,
- wiadukt żelbetowo-stalowy,
- dwa maszty z odciągami zlokalizowane w Piaskach i Giedlarowej,

- cztery mosty: łukowy w Puławach, podwieszony w Gdańsku, łukowy i podwieszony w Warszawie.

Na moście w Puławach przeprowadzono badania w różnych fazach budowy tego obiektu. Pozwoliło to określić wpływ poszczególnych materiałów na poziom tłumienia drgań całej konstrukcji.

Badania na modelach i obiektach polegały na wzbudzeniu drgań wymienio-nych układów i określeniu wielkości tłumienia drgań na podstawie analizy przebiegów czasowych drgań. Wymienione modele i konstrukcje modelowano w systemie Algor. Służyło to porównaniu i identyfikacji parametrów dynamicznych modeli MES i konstrukcji rzeczywistych. Wykorzystane w pracy modele określające tłumienie drgań, uwzględniają głównie ciężar własny badanych układów i zależne są od poziomu naprężeń w konstrukcji. W obliczeniach weryfikujących rozpatrywano tylko zakres małych drgań swobodnych.

## 2. Opis metod określających wartości parametrów tłumienia drgań

W literaturze przedstawione są różne metody określające wartości parametrów tłumienia drgań. Wśród nich są metody teoretyczne (np. metoda energetyczna) oraz metody określające tłumienie drgań na podstawie analizy wyników badań (filtracyjno-regresyjna, kolokacyjna, na podstawie transmitancji odpowiedzi konstrukcji, oparta na funkcji autokorelacji odpowiedzi budowli). Poniżej zostaną omówione niektóre z tych metod oraz własna propozycja określająca współczynnik tłumienia drgań wykorzystując energię kinetyczną drgającego układu.

### 2.1. Metoda energetyczna (Yamaguchi, Ito [1])

Model ten został opisany przez Yamaguchi i Ito, gdzie jest zastosowany do wyznaczania logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań budowli, składającej się z różnych elementów konstrukcyjnych (np.: pomost, słupy i ciągnia w mostach). Logarytmiczny dekrement tłumienia drgań  $\delta_i$  określany jest dla  $i$ -tej postaci drgań, tak jak dla układu o jednym stopniu swobody według wzoru:

$$\delta_i = \frac{D_i}{4\pi U_i}, \quad (1)$$

gdzie:  $D_i$  – dyssypowana energia  $i$ -tej postaci drgań (utrata energii w czasie jednego cyklu);  $U_i$  – całkowita energia potencjalna  $i$ -tej postaci (w maksymalnym wychyleniu).

W sytuacji, gdy budowla złożona jest z kilku głównych elementów konstrukcyjnych o różnych wartościach dyssypowanych energii lub jednego elementu, ale złożonego z kilku materiałów, energia dyssypowana i całkowita energia potencjalna zapisane mogą być w następujący sposób:

$$D_i = \sum_{j=1}^n D_{ij}, \quad U_i = \sum_{j=1}^n U_{ij}, \quad (2)$$

gdzie:  $D_{ij}$  – udział energii dyssypowanej  $j$ -tego materiału w konstrukcji (lub fragmencie konstrukcji) przy  $i$ -tej postaci drgań;  $U_{ij}$  – udział energii potencjalnej  $j$ -tego materiału w konstrukcji (lub fragmencie konstrukcji) przy  $i$ -tej formie drgań.

Energia potencjalna  $U_{ij}$  składa się z energii odkształceń  $V_{ij}$  w zakresie małych przemieszczeń i energii wynikającej ze wstępnego napięcia  $U_{ij}^0$  lub dużych przemieszczeń (w zakresie mechaniki nieliniowej).

$$U_{ij} = V_{ij} + U_{ij}^0. \quad (3)$$

Dyssypowana energia pojedynczego materiału (lub fragmentu konstrukcji) może być przedstawiona następująco:

$$D_{ij} = 2\pi\psi_j V_{ij}, \quad (4)$$

gdzie:  $\psi_i$  – współczynnik pochłaniania (tłumienia właściwego) dla danego materiału.

Ostatecznie wartość logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań w odniesieniu do  $i$ -tej postaci drgań, po uwzględnieniu zależności (1-4) wynosi:

$$\delta_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \psi_j \frac{V_{ij}}{U_i}, \quad (5)$$

Energia odkształcenia  $V_{ij}$  jest wyznaczona ze wzoru:

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{K}_j \boldsymbol{\varphi}_i, \quad (6)$$

gdzie:  $\boldsymbol{\varphi}_i$  – unormowany wektor własny  $i$ -tej postaci drgań;  $\mathbf{K}_j$  – macierz sztywności  $j$ -tego materiału w konstrukcji (lub fragmentu konstrukcji).

Całkowita energia potencjalna  $U_i$  jest wyznaczana ze wzoru:

$$U_i = \sum_{j=1}^n V_{ij} + U_{ij}^0. \quad (7)$$

## 2.2. Zmodyfikowana metoda energetyczna – propozycja własna

Korzystając z podstawowych założeń metody energetycznej, przedstawionej wyżej, określono wartości tłumienia, opierając się na energii kinetycznej układu. Metoda ta pozwoli na bardziej precyzyjne określenie tłumienia, ponieważ uwzględnione również zostaną inne elementy tzw. niekonstrukcyjne, których sztywność się na ogół pomija. Warstwy te mają znaczną energię kinetyczną i właściwości tłumiące (np. beton asfaltowy w nawierzchni wiaduktu).

Różnica w określeniu współczynnika tłumienia będzie polegała na uwzględnieniu maksymalnej energii kinetycznej  $E_{ij}$ , zamiast maksymalnej energii potencjalnej. Energia kinetyczna może być wyrażona w następującej formie:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{V}_i^T \mathbf{M}_j \mathbf{V}_i, \quad (8)$$

gdzie:  $\mathbf{M}_j$  – macierz bezwładności  $j$ -tego materiału w konstrukcji (lub fragmentu konstrukcji),  $\mathbf{V}_i = \boldsymbol{\varphi}_i \omega_i$  – wektor maksymalnych prędkości drgań  $i$ -tej postaci,  $\omega_i$  – częstość kołowe drgań własnych  $i$ -tej postaci.

Ostatecznie energię kinetyczną można przedstawić wzorem:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M}_j \boldsymbol{\varphi}_i \omega_i^2. \quad (9)$$

### 2.3. Metoda filtracyjno-regresyjna

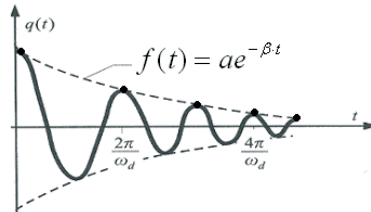
Określanie wielkości parametru tłumienia drgań metodą filtracyjno-regresyjną wykonuje się na podstawie badań drgań własnych badanego obiektu. Następnie w celu wyodrębnienia częstości kołowych, przeprowadzamy obróbkę widmową przebiegów drgań.

Wyznaczanie parametru opisującego tłumienie polega na wykorzystaniu filtracji przebiegów czasowych, czyli wykorzystuje się filtr wąskopasmowy obejmujący pojedynczą częstotliwość. Dzięki temu uzyskuje się przebiegi czasowe związane z daną postacią drgań. Otrzymane przebiegi czasowe opisuje się odpowiednią krzywą wykładniczą (wzór 10). Działania tego typu łatwo przeprowadzić wykorzystując program Catman 2.0, gdzie dopasowanie krzywej określamy metodą najmniejszych kwadratów.

$$f(t) = ae^{-\beta t}. \quad (10)$$

Na jej podstawie określamy wartość parametru tłumienia drgań (w tym przypadku  $\beta$ ).

Na Rys. 1 przedstawiono przykładowy przebieg przyspieszeń drgań.



Rys. 1. Przykładowy przebieg przyspieszeń drgań.

Fig. 1. The example of time history of vibration acceleration.

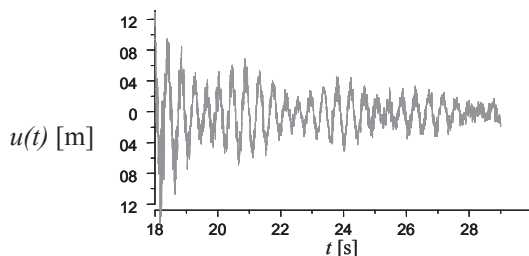
### 2.4. Metoda kolokacyjna (Flaga [2])

Metoda kolokacyjna opiera się na analizie widmowej przebiegów czasowych drgań swobodnych badanych konstrukcji i polega na doborze funkcji aproksymującej. Zastosowana funkcja pozwala na obliczenie poziomego tłumienia (współczynnika tłumienia  $\beta$ ).

#### 2.4.1. Stosowanie metody kolokacyjnej wykorzystując przebiegi przemieszczeń drgań

Kolejność czynności przy określaniu parametru tłumienia tą metodą:

a) Pomiar drgań swobodnych tłumionych konstrukcji, stosując czujniki przemieszczeń (również akcelerometry, tensometry, itp.), dzięki którym uzyskuje się przebiegi czasowe przemieszczeń konstrukcji ( $u_i(t)$ ). Przykładowy przebieg drgań przedstawia Rys. 2.



Rys. 2. Przykładowy przebieg drgań.

Fig. 2. The example of time history of vibrations.

b) Przeprowadzenie analizy spektralnej przebiegów czasowych  $u(t)$  np. za pomocą FFT (szybkiej transformacji Fouriera), dzięki którym uzyskujemy częstotliwości kołowe drgań własnych odpowiadające lokalnym ekstremom tej funkcji. Tak otrzymaną funkcję sprowadzamy do postaci kwadratu modułu transformaty:

$$F_u^2 = \left| \text{FFT} \{ u(t) \} \right|^2. \quad (11)$$

c) Przyjęcie założenia, że drgania badanej konstrukcji są sumą tłumionych drgań harmonicznym o różnych częstotliwościach (tłumienie opisano zastępczym modelem wiskotycznym).

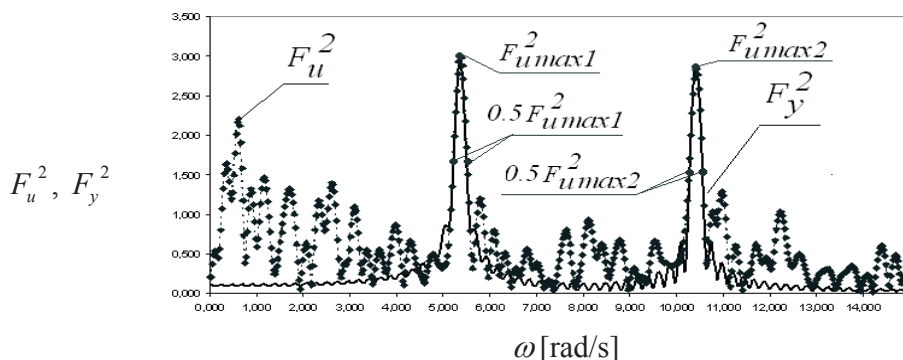
$$y(t) = \sum_i \{ A_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i^* t) + B_i e^{-\beta_i t} \cos(\omega_i^* t) \}, \quad (12)$$

$$(\omega_i^*)^2 = (\omega_i)^2 - (\beta_i)^2. \quad (13)$$

d) Aproksymacja przebiegu funkcji  $F_u^2$  funkcją  $F_y^2$ , opisaną poniższą zależnością

$$F_y^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} dt \right)^2. \quad (14)$$

Aproksymując przyjęto założenia, że punkty charakterystyczne to ekstrema modułów  $F_u^2$  oraz punkty leżące na 0,5 wysokości tych ekstremów (Rys. 3).

Rys. 3. Funkcja aproksymująca  $F_y^2$  i charakterystyczne punkty metody.Fig. 3. Approximation function  $F_y^2$  and characteristic points of the method.

e) Wyznaczenie następujących parametrów:  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $\beta_i$ .

Biorąc pod uwagę powyższe zależności otrzymuje się układ równań nieliniowych na wyznaczenie parametrów  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $\beta_i$ . Rozpatrując widmo z trzema wartościami szczytowymi, uzyskuje się układ dziewięciu nieliniowych równań z dziewięcioma niewiadomymi.

Układ równań nieliniowych rozwiązywano wykorzystując program Mathcad 11. Zawarte są w nim trzy metody rozwiązywania równań nieliniowych, są to: metoda gradientów sprzężonych, Levenberga-Marquardta i Quasi-Newtona.

### 2.4.2. Stosowanie metody kolokacyjnej wykorzystując przebiegi przyspieszeń drgań

W tym celu dwukrotnie różniczkujemy zależność 12., opisującą przemieszczenia drgań. Po tym zabiegu otrzymujemy zależność na przyspieszenie drgań (15.).

$$\frac{d(y(t))^2}{dt^2} = \sum_i^n [(A_i^p \cdot e^{-\beta_i^p \cdot t} \cdot \sin(\omega_i^* \cdot t)) + (B_i^p \cdot e^{-\beta_i^p \cdot t} \cdot \cos(\omega_i^* \cdot t))], \quad (15)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A_i^p &= A_i \cdot \beta_i^2 - A_i \cdot \omega_i^2 + 2 \cdot B_i \cdot \beta_i \cdot \omega_i, \\ B_i^p &= B_i \cdot \beta_i^2 - B_i \cdot \omega_i^2 + 2 \cdot A_i \cdot \beta_i \cdot \omega_i, \quad \beta_i^p = \beta_i. \end{aligned} \quad (16)$$

Czyli uwzględniając przyspieszenia drgań i postępując analogicznie jak w wypadku uwzględniania przemieszczeń drgań, otrzymujemy dokładnie taką samą wartość parametru tłumienia  $\beta_i$ , jedynie amplitudy  $A_i$  i  $B_i$  doznają wzmocnienia, gdy  $\omega_i > 1$  lub osłabienia, gdy  $\omega_i < 1$ .

### 2.4.3. Stosowanie metody kolokacyjnej wykorzystując przebiegi odkształceń konstrukcji

W podejściu tym wykorzystujemy zależności między odkształceniem  $\varepsilon(t)$  i przemieszczeniem  $y(t)$ . Wówczas odkształcenie przyjmuje postać wzoru (17).

$$\varepsilon(t) = k \cdot y(t) = \sum_i \{A_i^\varepsilon e^{-\beta_i^\varepsilon t} \sin(\omega_i^* t) + B_i^\varepsilon e^{-\beta_i^\varepsilon t} \cos(\omega_i^* t)\}, \quad (17)$$

gdzie:

$$A_i^\varepsilon = k \cdot A_i, \quad B_i^\varepsilon = k \cdot B_i, \quad \beta_i^\varepsilon = \beta_i. \quad (18)$$

Z powyższych relacji wynika, że przeprowadzając pomiary odkształceń konstrukcji otrzymuje się w bezpośredni sposób wartości amplitud  $A_i$  i  $B_i$  oraz parametru tłumienia  $\beta_i$ .

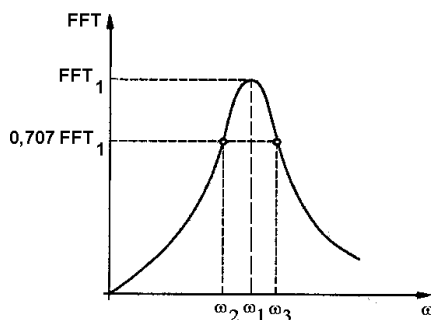
## 2.5. Metoda „half-power bandwidth” (Bachmann [3])

Współczynnik tłumienia  $i$ -tej postaci drgań otrzymujemy wykorzystując analizę widmową przebiegu czasowego drgań. Polega to na odczytaniu wartości trzech częstości kołowych, którym odpowiadają trzy punkty charakterystyczne

(ekstremum funkcji i punkty leżące na wysokości 0,707 ekstremum). Przykład transformaty Fouriera z określonymi punktami charakterystycznymi pokazuje Rys. 4. Metoda ta może być zastosowana dla układów o jednym stopniu swobody lub układów o wyraźnie rozseparowanych częstotliwościach.

Wartość logarytmicznego dekrementu tłumienia otrzymujemy na podstawie następującej zależności:

$$\delta = \pi \cdot \left( \frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_1} \right) . \quad (19)$$



Rys. 4. Wykres transformaty Fouriera z pokazaniem punktów charakterystycznych metody „half-power bandwidth”.

Fig. 4. Fourier transform with the presentation of characteristic points of „half-power bandwidth” method.

### 3. Układ pomiarowy (tor pomiarowy) stosowany podczas badań

Układ pomiarowy zastosowany w badaniach składał się z następujących elementów:

**Akcelerometrów B200**, firmy HBM, mierzących przyspieszenia w jednym kierunku. Akcelerometry mocowane były do elementów konstrukcji i modeli w miejscach maksymalnych amplitud przyspieszeń, służyło to wyłapaniu możliwie największej liczby postaci drgań. Czujniki mocowane były do prętów wbijanych we wcześniej wywiercone otwory na konstrukcjach przez użycie zacisków imadłkowych.

**Analizatora analogowo-cyfrowego Spider 8**, firmy HBM. Rejestrowany na czujnikach przyspieszeń sygnał analogowy urządzenie to przetwarza na cyfrowy i przesyła przez adapter do komputera przenośnego. Rejestrator posiada układ ośmiu gniazd pozwalających na jednoczesne podłączenie ośmiu czujników.

**Komputera przenośnego** z oprogramowaniem **Catman 2.0**. Komputer oraz oprogramowanie służyło zapisywaniu sygnału z wcześniej określoną częstotliwością. Program Catman 2.0 umożliwiał również na obróbkę danych (przeprowadzenie filtracji i transformat Fouriera na uzyskanych przebiegach przyspieszeń). Dane w ten sposób uzyskane były podstawą do obliczeń parametrów tłumienia drgań metodami omówionymi wcześniej.



#### 4. Ogólne przedstawienie konstrukcji uwzględnianych w obliczeniach parametrów tłumienia

Obliczenia logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań dokonano na pokazanych poniżej konstrukcjach (Rys. 5-16).

Ze względu na duży zakres otrzymanych wyników ograniczono się do przedstawienia wyników badań mostu w Puławach (pkt. 4.1).



Rys. 5. Kładka w Kielcach (ul. Źródłowa).  
Fig. 5. A footbridge in Kielce.



Rys. 6. Kładka nad rzeką Wartą w Osjakowie.  
Fig. 6. A footbridge over Warta River in Osjaków.



Rys. 7. Kładka nad rzeką Bystrzycą w Lublinie w sąsiedztwie ulicy Janowskiej.  
Fig. 7. A footbridge over Bystrzyca River in Lublin.





Rys. 8. Kładka przy hurtowni Eldorado w Lublinie.

Fig. 8. A footbridge next to Eldorado warehouse in Lublin.



Rys. 9. Kładka wstęgowa w Myślenicach.

Fig. 9. A stripped footbridge in Myślenice.



Rys. 10. Most Jana Pawła II w Puławach.

Fig. 10. John Paul II bridge in Puławy.



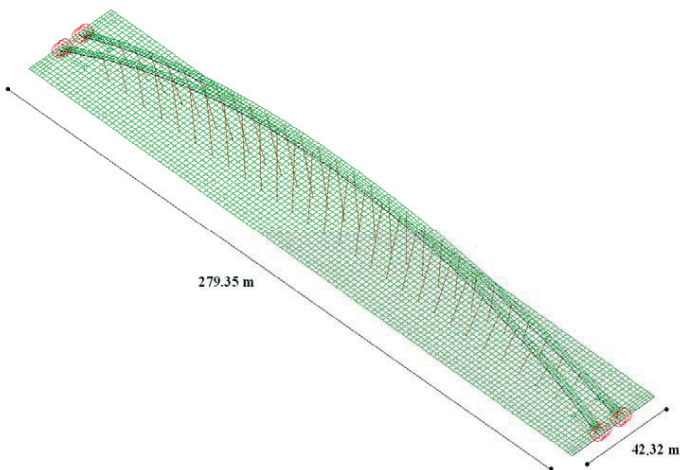
Rys. 11. Most Jana Pawła II w Gdańsku.

Fig. 11. John Paul II bridge in Gdańsk.



Rys. 12. Most podwieszony w ciągu trasy Siekierkowskiej w Warszawie.

Fig. 12. A suspended bridge in Warsaw (Siekierkowska route).



Rys. 13. Most Krasieński (łukowy) w Warszawie (obiekt w fazie projektu).

Fig. 13. Krasieński bridge (arch-bridge) in Warsaw.



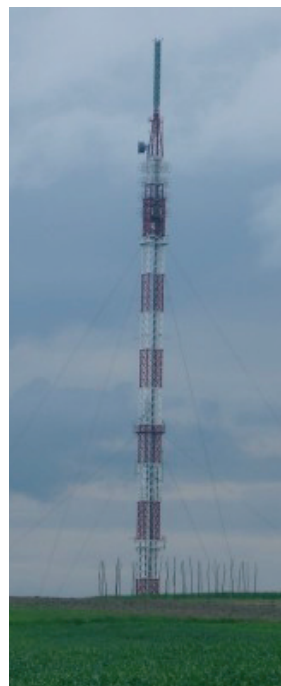
Rys. 14. Wiadukt na ulicy Grygowej w Lublinie.

Fig. 14. An overpass in Lublin (Grygowa street).



Rys. 15. Maszt o wysokości 342 m z pięcioma poziomami odciągów w Piaskach.

Fig. 15. Mast of the height 242 m with five levels od cables in Piaski.



Rys. 16. Maszt o wysokości 130 m z dwoma poziomami odciągów w Giedlarowej.

Fig. 16. Mast of the height 130 m with two levels od cables in Giedlarowa.

## 4.1. Szczegółowe dane dotyczące mostu łukowego w Puławach

### 4.1.1. Opis wstępny

Most łukowy w Puławach składa się z następujących głównych części konstrukcyjnych: dwóch łuków, pomostu, prętów podwieszających pomost do łuków mostu.



W konstrukcji mostu zastosowano dwa symetryczne łuki stalowe, każdy o rozpiętości 212 m między punktami podparcia. Rozpiętość całkowita każdego z łuków wynosi 268 m. Wysokość łuków w najwyższym miejscu wynosi 36 m nad poziomem podparcia. Łuki zaprojektowano jako elementy skrzynkowe, wykonane ze stalowych blach o przekrojach zmiennych. Grubość blach, z których wykonane są łuki zmienia się od 20 mm do 50 mm. Łuki zostały stężone trzema stalowymi wiatrownicami o konstrukcji skrzynkowej i dźwigarem poprzecznym, na którym opiera się pomost i dźwigarem podporowym.

Pomost został oparty w obrębie łuków na częściach konstrukcyjnych łuku; dźwigarze poprzecznym i zastrzale. Główne przęsło w obszarze łuku liczy 212 m. Most został podparty na betonowych podporach posadowionych na betonowych palach. Pomost zaprojektowano jako wykonany ze stali i betonu. Na czterech stalowych dźwigarach podłużnych o wysokości 1,6 m, rozstawionych symetrycznie względem osi jezdni, zostały oparte w rozstawie co 4 m poprzecznice stalowe o szerokości 21,03 m. Na konstrukcji stalowej spoczywa pomost o całkowitej szerokości 21,6 m. Warstwy części jezdnej to: mieszanka grysowo-mastyksowa SMA jako warstwa ścieralna (4 cm), beton asfaltowy modyfikowany jako warstwa wiążąca (6 cm), izolacja - papa zgrzewalna (5 mm), płyta żelbetowa (27-36 cm).

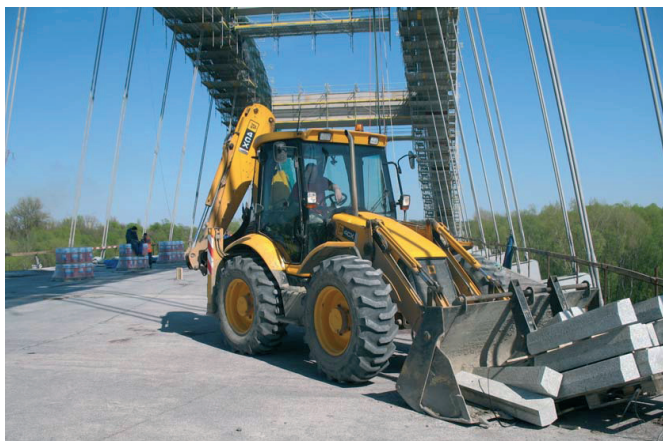
Obliczając parametry tłumienia wzięto pod uwagę dwie sytuacje budowy mostu. Pierwsza sytuacja dotyczyła mostu z pomostem bez warstw izolacyjnych i jezdnych. Druga sytuacja odnosiła się do mostu w stanie finalnym.

Poniżej zestawiono fotografie przedstawiające most bez warstw izolacyjnych i jezdnych, (Rys. 17) zwany dalej stanem 1, maszyny wymuszające drgania mostu (Rys. 18 i 20), fotografię przedstawiającą most w całości (Rys. 19), zwany dalej stanem 2.

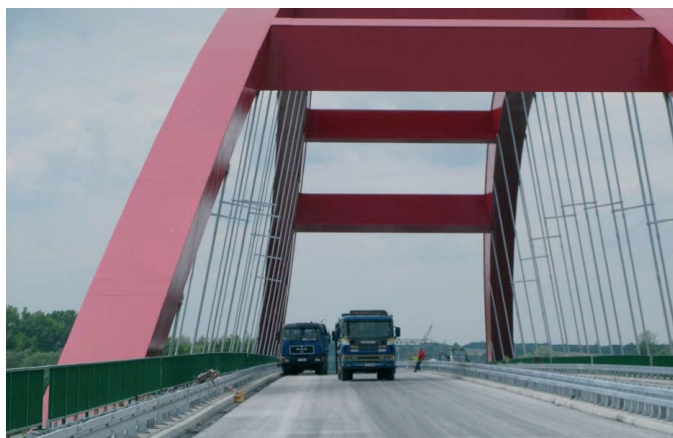


Rys. 17. Most w Puławach (stan 1).

Fig. 17. A bridge in Puławy (phase 1).



Rys. 18. Koparko-ładowarka wymuszająca drgania.  
Fig. 18. A digger forcing vibrations.



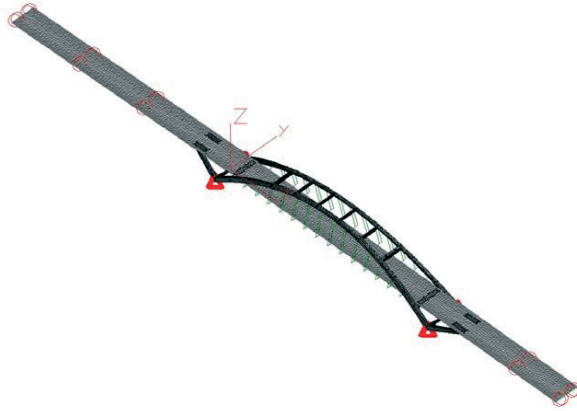
Rys. 19. Most w Puławach (stan 2).  
Fig. 19. A bridge in Puławy (phase 2).



Rys. 20. Samochód wymuszający drgania.  
Fig. 20. A truck forcing vibrations.

### 4.1.2. Model komputerowy (MES) i drgania własne mostu

Poniżej zestawiono model komputerowy (Rys. 21) i uzyskane częstości własne mostu w Puławach mostu w stanie 2 (Tab. 1).



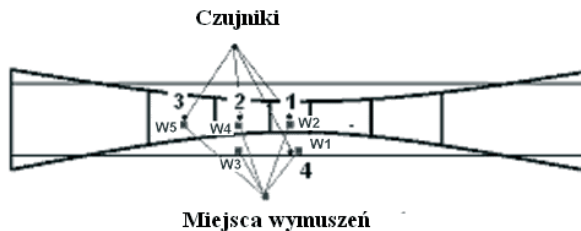
Rys. 21. Model MES mostu w Puławach.  
Fig. 21. FEM model of bridge in Pulawy.

Tabela 1. Częstości i postacie drgań własnych analizowanego mostu.  
Table 1. Frequencies and forms of free vibrations of analysed bridge.

Nr postaci drgań	Częstotliwość $f_i$ [Hz]	Opis formy drgań
1	0,6760	Drgania giętne pionowe
2	0,7575	Drgania giętne poziome
3	1,1684	Drgania giętne poziome (przeciwległe drgania pomostu i łuku)
4	1,2743	Drgania skrętne pomostu, giętne poziome łuku

### 4.1.3. Rozmieszczenie czujników

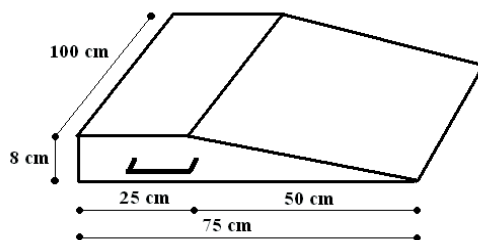
Czujniki przyspieszeń drgań rozmieszczono na przęśle głównym mostu. Trzy czujniki usytuowano w osi podłużnej przęsła (w połowie, jednej czwartej i trzech ósmych długości przęsła). Czwarty czujnik umiejscowiono na zewnątrz przęsła (w połowie jego długości). Rozmieszczenie czujników i miejsca dokonywanych wymuszeń pokazuje Rys. 22.



Rys. 22. Rozmieszczenie czujników przyspieszeń drgań na przęśle głównym z pokazaniem miejsc gdzie dokonywano wymuszenia (widok z góry).  
Fig. 22. The arrangement of accelerometers on the main span with the presentation of places where forced took place.

#### 4.1.4. Sposób wymuszenia

Drgania badanej konstrukcji wywoływano przez przejazd samochodu ciężarowego przez dębowy próg (Rys. 23) w pięciu miejscach na głównym prześle.



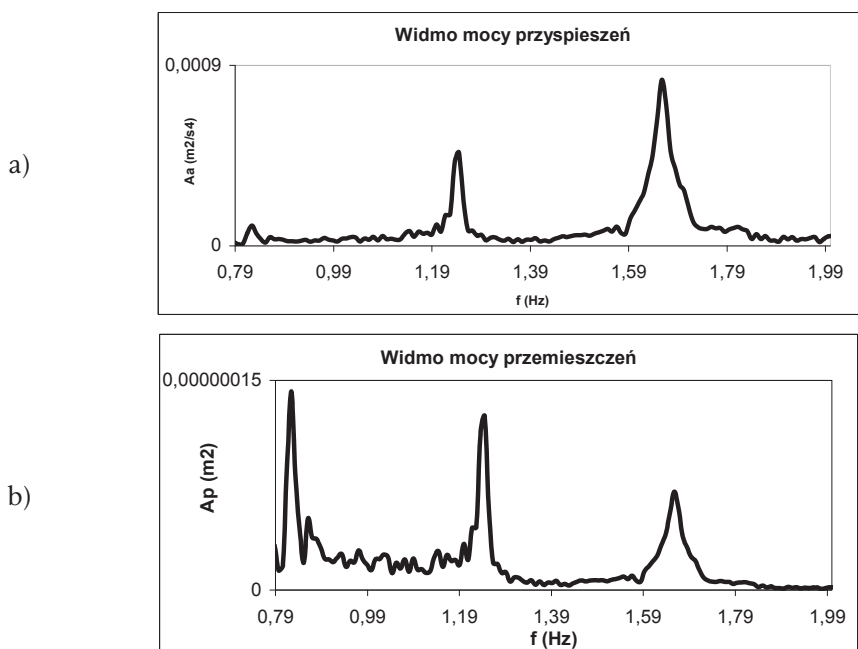
Rys. 23. Charakterystyczne wymiary progu używanego w badaniach.

Fig. 23. The characteristic dimensions of threshold used in measurements.

#### 4.1.5. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

Obliczając parametry tłumienia drgań metodą kolokacyjną brano pod uwagę maksymalnie trzy reprezentatywne, czyli bliskie „nieodseparowane” częstotliwości własne. W przypadku wystąpienia w widmie mocy częstotliwości o małej amplitudzie (np.: częstotliwość pierwsza Rys. 24a) uwzględniano ją w obliczeniach tylko w związku z jej wpływem na częstotliwość numer jeden i dwa.

Rys. 24 a i b przedstawiają przykładowe widma mocy przyspieszeń i przemieszczeń.



Rys. 24. Przykładowe widmo mocy: a) przyspieszeń, b) przemieszczeń.

Fig. 24. Example of power spectrum: a) accelerations, b) displacements.

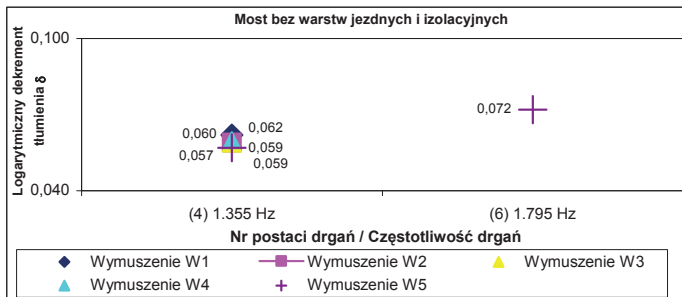


## 4.2. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

### 4.2.1. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia – metoda kolokacyjna (rozpatrując przyspieszenia drgań)

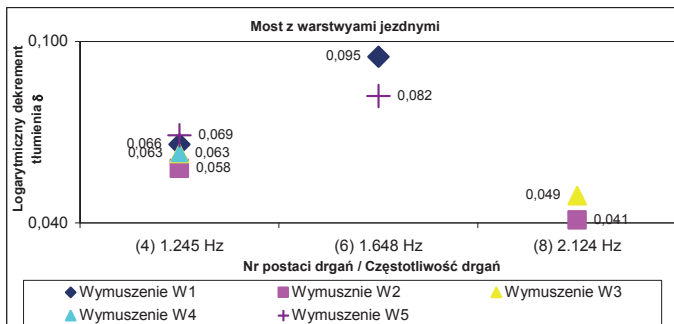
Poniżej zestawiono wartości  $\delta$  dla dwóch faz realizacji mostu: bez warstw izolacyjnych i jezdnych (Rys. 25) i w końcowej fazie realizacji (Rys. 26), stosując metodę kolokacyjną.

Następnie, na Rys. 27 przedstawiono porównanie średnich wartości parametru tłumienia  $\delta$  w dwóch fazach realizacji mostu.



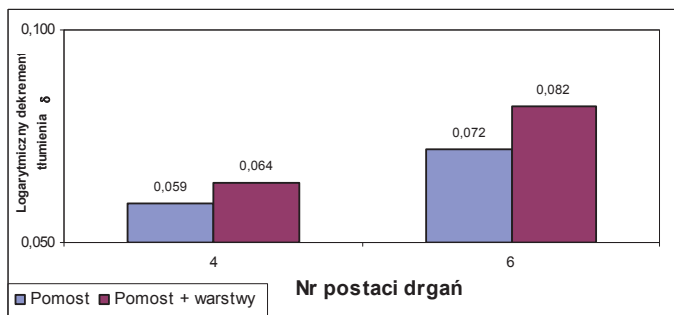
Rys. 25. Wartości  $\delta$  mostu (stan 1).

Fig. 25. Values of  $\delta$  for the bridge (phase 1).



Rys. 26. Wartości  $\delta$  mostu (stan 2).

Fig. 26. Values of  $\delta$  for the bridge (phase 2).



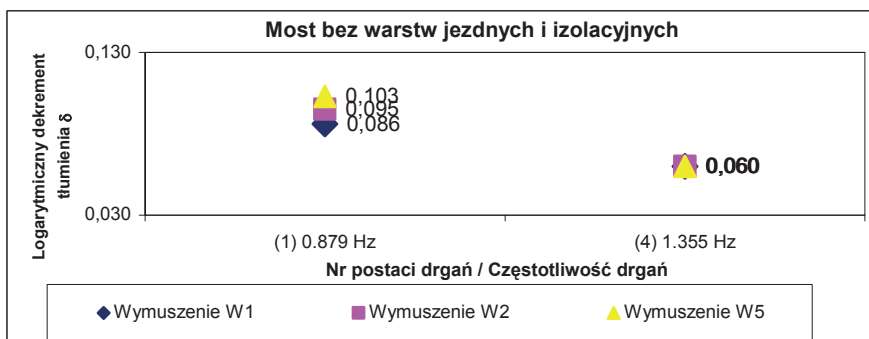
Rys. 27. Porównanie średnich wartości parametru tłumienia  $\delta$  w dwóch fazach realizacji.

Fig. 27. The comparison of average values of  $\delta$  in two phases of realisation.

#### 4.2.2. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia – metoda kolokacyjna (rozpatrując przebiegi przemieszczeń drgań)

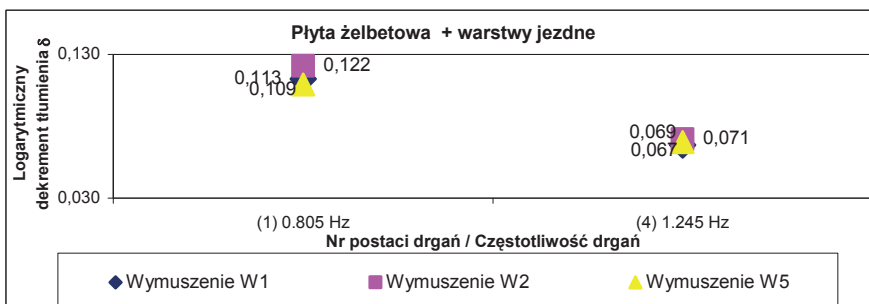
Poniżej zestawiono wartości  $\delta$  dla dwóch faz realizacji mostu: bez warstw izolacyjnych i jezdnych (Rys. 28) i w końcowej fazie realizacji (Rys. 29), stosując metodę kolokacyjną.

Następnie, na Rys. 30 przedstawiono porównanie średnich wartości parametru tłumienia  $\delta$  w dwóch fazach realizacji mostu.



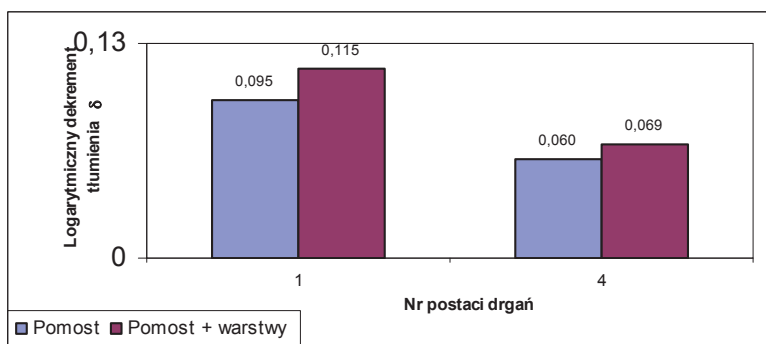
Rys. 28. Wartości  $\delta$  mostu (stan 1).

Fig. 28. Values of  $\delta$  for the bridge (phase 1).



Rys. 29. Wartości  $\delta$  mostu (stan 2).

Fig. 29. Values of  $\delta$  for the bridge (phase 2).

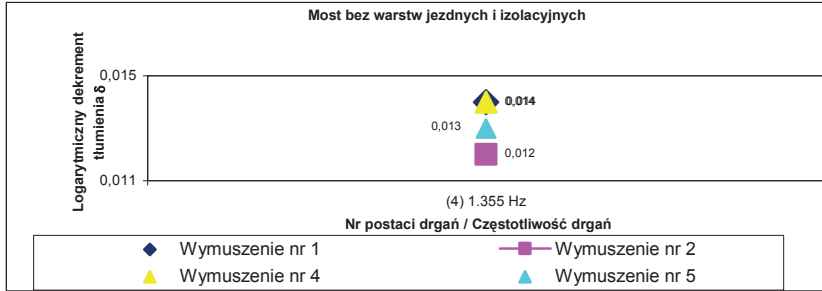


Rys. 30. Porównanie średnich wartości parametru tłumienia  $\delta$  w dwóch fazach realizacji.

Fig. 30. The comparison of average values of  $\delta$  in two phases of realisation.

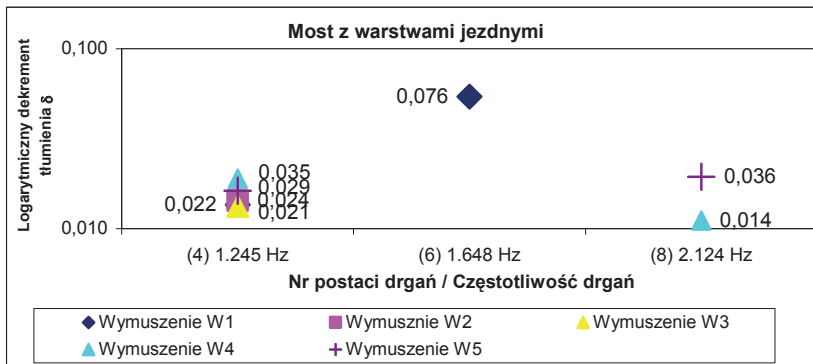
### 4.2.3. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia – metoda filtracyjno-regresyjna

Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań mostu uzyskane po zastosowaniu metody filtracyjno-regresyjnej pokazują Rys. 31-33.



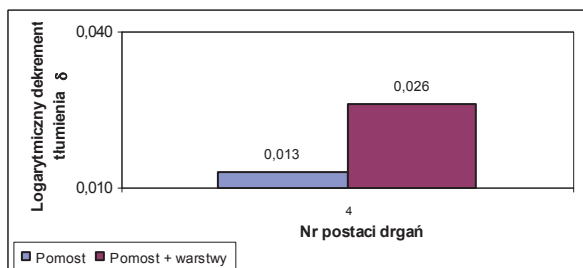
Rys. 31. Wartości  $\delta$  mostu (stan 1).

Fig. 31. Values of  $\delta$  for the bridge (phase 1).



Rys. 32. Wartości  $\delta$  mostu (stan 2).

Fig. 32. Values of  $\delta$  for the bridge (phase 2).

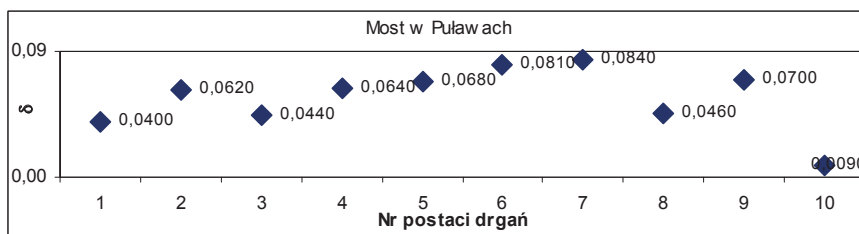
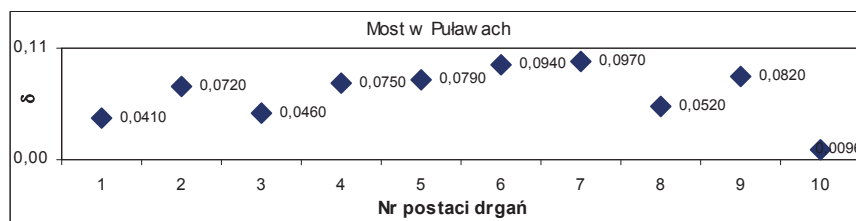


Rys. 33. Porównanie średnich wartości parametru tłumienia  $\delta$  w dwóch fazach realizacji.

Fig. 33. The comparison of average values of  $\delta$  in two phases of realisation.

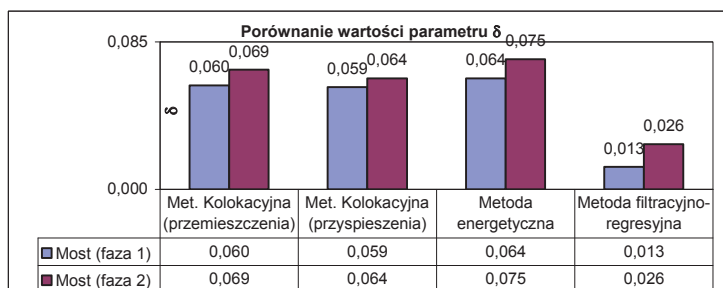
### 4.2.4. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia – metoda energetyczna

Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań mostu uzyskane po zastosowaniu metody energetycznej przedstawiono na Rys. 34 i 35.

Rys. 34. Wartości  $\delta$  mostu (stan 1).Fig. 34. Values of  $\delta$  for the bridge (phase 1).Rys. 35. Wartości  $\delta$  mostu (stan 2).Fig. 35. Values of  $\delta$  for the bridge (phase 2).

### 4.3. Omówienie uzyskanych wyników

Poniżej (Rys. 36) zestawiono porównanie wartości parametru tłumienia  $\delta$  czwartej postaci drgań własnych w dwóch fazach realizacji mostu (most bez warstw jezdnych i most z warstwami jezdnymi) wykorzystując: metodę kolokacyjną (uwzględniając przebiegi przyspieszeń i przemieszczeń drgań), metodę opartą na szacowaniu energii kinetycznej drgającego układu i metodę filtracyjno-regresyjną.

Rys. 36. Porównanie wartości parametru tłumienia  $\delta$  czwartej postaci drgań.Fig. 36. Comparison of average values of  $\delta$  in the fourth mode shape of vibrations.

Wykorzystując metodę kolokacyjną otrzymano parametry tłumienia drgań dla kilku pierwszych częstotliwości drgań mostu. Wyniki charakteryzują się dużą zgodnością (czwarta częstota własna), praktycznie bez większych rozrzutów wynikających z różnych miejsc gdzie dokonywano wmuszeń i miejsc pomiarów drgań. W metodzie kolokacyjnej wykorzystano przebiegi przyspieszeń i przemieszczeń, dzięki którym otrzymano większy możliwy do określenia zakres częstotliwości własnych (większą liczbę częstotliwości reprezentatywnych). Obliczenia parametru tłumienia  $\delta$  wykazały zbieżność wyników stosując widma mocy przyspieszeń i przemieszczeń.

Wykorzystując metodę kolokacyjną stwierdzono, że dodanie warstw ścieralnych i izolacyjnych na pomoście spowodowało wzrost wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia od 8 do około 20% w odniesieniu do różnych postaci drgań.

Stosując metodę filtracyjno-regresyjną otrzymano większe rozrzuty wartości  $\delta$ , dodanie warstw izolacyjnych i jezdnych spowodowało zawyżony wzrost wartości  $\delta$  sięgający 100%. Spowodowane to było filtracją częstotliwości własnych drgań z sygnału z zaburzeniami.

Dzięki metodzie energetycznej (wykorzystującej całkowitą energię kinetyczną drgającego układu), otrzymano wartości  $\delta$  porównywalne z metodą kolokacyjną.

## 5. Podsumowanie

Przeprowadzone badania i obliczenia z zastosowaniem metody kolokacyjnej, metody filtracyjno-regresyjnej i metod energetycznych pozwoliły na określenie wiarygodnych wartości  $\delta$  dla mostów, masztów, kładek i stropów.

Uwzględniając powyższe otrzymano wartości średnie  $\delta$  dla kilku reprezentatywnych, mających największe znaczenie częstotliwości drgań własnych typowych konstrukcji budowlanych. Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia  $\delta$  otrzymane z badań i obliczeń wchodzących w zakres grantu, pozwoliły na dokładniejsze określenie poziomu tłumienia z uwzględnieniem rodzajów i typów konstrukcji oraz postaci drgań własnych. Pozwoliło to na uzupełnienie i zawężenie przedziałów wartości parametru tłumienia drgań  $\delta$  dla konstrukcji i obiektów budowlanych.

## 6. Wnioski końcowe

Na podstawie przeprowadzonych badań i obliczeń można sformułować następujące wnioski ogólne:

- Podsumowując otrzymane wyniki można stwierdzić, że ze wszystkich metod wyznaczania parametrów tłumienia drgań stosowanych w pracy najdokładniejsza jest metoda kolokacyjna.

- Nasuwa się również ważny wniosek, że wartości parametrów tłumienia drgań wyznaczone na podstawie szacowania energii kinetycznej drgającego układu, są zbliżone do tych, jakie otrzymano z metody kolokacyjnej, ale tylko w przypadku prostych konstrukcji wielomateriałowych, tj. bez dodatkowych tzw. elementów niekonstrukcyjnych w postaci warstw, płyt, wkładek spełniających role użytkowe, izolacji termicznej, wilgotnościowej, akustycznej, przeciwdrganiowej itp. a także bez wielu złożonych węzłów konstrukcyjnych.

- Rozpatrując wyniki otrzymane stosując metody energetyczne można dojść do wniosku, że wartości parametrów tłumienia drgań wyznaczone na podstawie szacowania energii potencjalnej układu drgającego są obarczone większym błędem niż na podstawie szacowania energii kinetycznej układu i mogą znacząco odbiegać od wartości otrzymanych na podstawie metody kolokacyjnej.

- Badania przeprowadzone w różnych fazach budowy np. mostu w Puławach potwierdzają fakt, że dodawanie kolejnych tzw. elementów niekonstrukcyjnych powoduje istotny wzrost tłumienia drgań w złożonych obiektach wielomateriałowych, jakimi są np. budynki i mosty.

• Obliczenia parametrów tłumienia drgań przeprowadzone przed i po modernizacji kładki pozwalają na stwierdzenie, że przeprowadzając modernizację konstrukcji, np. w postaci dodania dodatkowych elementów ciągnowych wstępnie naprzężonych, należy mieć na uwadze, że mimo zwiększania sztywności globalnej ustroju, tłumienie drgań może w niektórych przypadkach wzrosnąć, w innych zmaleć.

## Literatura

- [1] Yamaguchi H., Ito M., *Mode-dependency of structural damping in cable-stayed bridges*, 9<sup>th</sup> International Conference on Wind Engineering, New Delhi, India, 1995; s. 928-937.
- [2] Flaga A., Michałowski T., *Charakterystyki tłumienia drgań lekkich kładek wiszących i podwieszonych*, Inżynieria i Budownictwo nr 9, 2000, 495-497.
- [3] Bachmann H. *Vibration problems in structures*, Wien, Bulletin D'Information, No 209, 1991.

## The method of determining damping coefficients of vibration for complex structures

Jacek Szulej

*Lublin University of Technology, Faculty of Civil Engineering and Architecture,  
Department of Structural Mechanics, e-mail: j.szulej@pollub.pl*

**Abstract:** The purpose of this paper is to present methods of determining damping coefficient of vibration. The methods, such as: collocation method, two energetic methods and half-power bandwidth method, concern composite structures. Verification of methods was taken into account in this research. Real compound models and numerical models were created. Time histories of vibrations of these models were measured or calculated. Comparison of methods were made on a basis of obtained results.

**Key words:** equivalent viscous damping, composite structures, models of damping.