

Prof. Dr hab. Leszek MIESZKALSKI  
Katedra Organizacji i Inżynierii Produkcji  
Wydział Inżynierii Produkcji, SGGW w Warszawie

## METODA MATEMATYCZNEGO MODELOWANIA KSZTAŁTU CZĘŚCI MORFOLOGICZNYCH GŁÓWKI CZOSNKU (*ALLIUM SATIVUM L.*) ZA POMOCĄ KRZYWYCH PRZESTRZENNYCH®

*W pracy zaprezentowanej w artykule wykonano model matematyczny kształtu poszczególnych części składowych główki czosnku przy wykorzystaniu krzywych przestrzennych. Dla każdego ząbka czosnku i obciętego pędu opracowano krzywe przestrzenne leżące w bliskiej odległości od powierzchni zewnętrznych rzeczywistych części morfologicznych główki czosnku. Skróconą łodygę odwzorowano za pomocą siatki dyskretnej powierzchni. Opracowano krzywą przestrzenną będącą modelem matematycznym kształtu łuski zewnętrznej okrywającej ząbki w główce czosnku. Stosując przesunięcia i obroty względem osi X, Y, Z układu współrzędnych, złożono z modeli 3D części morfologicznych główkę czosnku. Wizualizacji wymienionych modeli brył 3D dokonano za pomocą programu komputerowego Mathcad v. 14.*

**Słowa kluczowe:** części główki czosnku, kształt, krzywe przestrzenne, model matematyczny, model 3D główki czosnku.

### WSTĘP I CEL PRACY

Czosnek jest uprawiany na całym świecie. W Polsce jest znany od średniowiecza. Jako warzywo przyprawowe ma zastosowanie w przemyśle mięsny i rybny. Jest surowcem dla przemysłu spożywczego i farmaceutycznego [6]. Wykorzystywany w celach leczniczych, działa bowiem przeciwbakteryjnie, przeciwgrzybicznie, przeciwmiażdżycowo, przeciwzakrzepowo, przeciwnowotworowo, reguluje ciśnienie krwi [2]. Korzystnie wpływa na zdrowie człowieka (www.czosnek.uprawy.info [12]).

Częścią podstawową czosnku jest cebula złożona, nazywana główką. Główka składa się z pojedynczych cebulek, nazywanych ząbkami. Ząbki są częścią jadalną czosnku. Ułożone są w okółek i otoczone wspólną suchą łuską, co określa charakterystyczny kształt główki czosnku (rys. 1).



**Rys. 1.** Widok z boku i z góry główki czosnku, dla której opracowano modele matematyczne kształtu.

**Źródło:** Fotografia własna.

Ząbki są zrosnięte z silnie skróconą zdrewniałą łodygą, zwaną piętą. Ze skróconej łodygi wyrastają liście, a u niektórych gatunków wyrasta rurowy pęd zakończony kwiatostanem [10]. Wymagania jakościowe czosnku przeznaczonego do sprzedaży reguluje norma BN-72/9137-10. W wyborze pierwszym główki czosnku muszą być wyrównane pod względem kształtu i pokryte łuską okrywającą. Ich średnica nie powinna być mniejsza niż 35 mm. W wyborze

drugim dopuszcza się główki o niewyrównanym kształcie i różnych wymiarach.

W ostatnich latach jest obserwowany postęp w precyzyjnej uprawie czosnku [1]. Należy mieć na uwadze, że uprawa czosnku jest trudna do zmechanizowania ze względu na budowę morfologiczną główki i jej kształt. Mechanizacją czosnku zajmuje się wiele firm posiadających certyfikat ISO 9001 [11]. Produkowane są sadzarki do czosnku, maszyny do zbioru, systemy do suszenia czosnku, obcinacze liści i korzeni, stoły do czyszczenia, urządzenia do sortowania i łuskania ząbków. Wiele z wymienionych urządzeń wymaga obsługi ręcznej. Zachodzi więc potrzeba opracowania metody dokładniejszego opisu kształtu główki czosnku do celów projektowych.

Rośliny jako obiekty botaniczne charakteryzują się różnorodnością kształtów. Do modelowania kształtów obiektów biologicznych nowych metod dostarcza grafika komputerowa [3]. Spośród znanych metod, służących do opisu kształtów obiektów roślinnych, można wymienić: L – systemy, metody fraktalne, superformuły, krzywe i powierzchnie, operacje boolowskie, reprezentacje brzegowe z podziałem przestrzennym, itp. [3, 4, 5, 7, 8, 9].

**Celem artykułu jest przedstawienie opracowanych krzywych przestrzennych opisujących kształty ząbków i obciętego pędu oraz łuski zewnętrznej okrywającej ząbki w główce czosnku, a także dyskretnej powierzchni skróconej łodygi.**

### METODYKA

Materiałem do badań był czosnek pospolity (*Allium sativum L.*), gatunek wytwarzający kwiatostan, pochodzący z upraw z 2010 roku. Wybrano główkę czosnku wyboru pierwszego charakterystyczną pod względem kształtu, o średnicy większej niż 35 mm. Wybraną główkę czosnku sfotografowano. Sfotografowano również podstawowe części główki czosnku, jak: ząbki, skrócona łodyga i obcięta część pędu. Widok ogólny główki czosnku przedstawiono na rysunku 1. Główkę czosnku rozłożono na części. Na rysunku 2 ukazano sześć ząbków, skróconą łodygę oraz rurowy pęd.



**Rys. 2.** Widok ząbków, skróconej łodygi i skróconego rurowego pędu modelowanej główki czosnku.

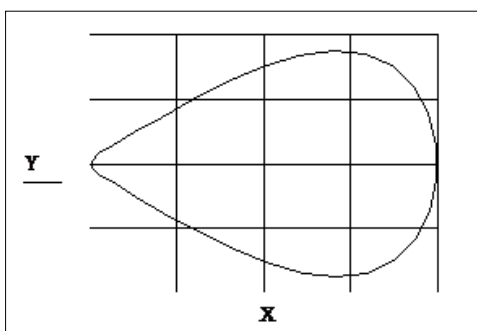
**Źródło:** Fotografia własna.

Ząbki czosnku ułożono wokół rurowego pędu w taki sposób, by się stykały ze skróconą łodygą. Dokonano pomiaru średnicy i wysokości główki czosnku. Zmierzone długość, szerokość i grubość każdego ząbka czosnku. Dokonano pomiaru średnicy, a także wysokości skróconej łodygi czosnku. Zmierzone średnicę zewnętrzną i wysokość obciętego rurowego pędu czosnku. Pomiaru wykonano suwmiarką z dokładnością do 0,1mm.

Dla każdego ząbka czosnku oraz obciętego pędu opracowano krzywe przestrzenne opisujące ich kształt. Wykonano też, w 3D, modele matematyczne dyskretnej powierzchni zewnętrznej skróconej łodygi. Opracowano krzywą przestrzenną reprezentującą kształt łuski zewnętrznej okrywającej ząbki w główce czosnku. Stosując przesunięcia i obroty względem osi  $X, Y, Z$  układu współrzędnych złożono główkę czosnku z modeli 3D części morfologicznych. Wizualizacji wymienionych modeli brył 3D dokonano za pomocą programu komputerowego Mathcad v. 14.

### KONSTRUKCJA KRZYWYCH PRZESTRZENNYCH OPISUJĄCYCH KSZTAŁT ZĄBKÓW GŁÓWKI CZOSNKU

Poprzeczne przekroje ząbków główki czosnku mogą mieć następujące kształty (rys. 3).



**Rys. 3.** Krzywa pomocna do opisu konturu poprzecznego przekroju ząbka główki czosnku.

**Źródło:** Opracowanie własne.

Do opisu kształtu brył 3D części składowych główki czosnku należy wybrać w przestrzeni trójwymiarowej układ współrzędnych  $XYZ$ . Każdemu punktowi leżącemu na powierzchni modelu bryły główki czosnku przypisuje się trzy liczby i każdą z nich uzależnia od kąta  $\phi$ . Otrzymuje się

wówczas trzy funkcje  $X=x(\phi), Y=y(\phi), Z=z(\phi)$ . Kąt  $\phi$  zawiera się w ustalonym przedziale od  $\phi_{min}$  do  $\phi_{max}$ . Po wprowadzeniu dla krzywej trzeciego wymiaru otrzymuje się krzywą przestrzenną.

Krzywe przestrzenne parametryczne służące do modelowania kształtu ząbka główki czosnku mają następującą postać:

$$X\xi_{i,j} = a \cdot \frac{\phi_i}{n} \cdot \sin\left(\frac{\phi_i}{n}\right) \cos(\phi_i + 2) + b \cdot \frac{(\phi_i)^3}{n} \cdot \sin\left(\frac{\phi_i}{n}\right) \cdot \cos(\phi_i + 2) \quad (1)$$

$$Y\xi_{i,j} = c \cdot \frac{(\phi_i)^2}{n} \cdot \sin\left(\frac{\phi_i}{n}\right)^3 \cdot \cos(\phi_i + 2) \cdot \sin(\phi_i + 2) + d \cdot \frac{(\phi_i)^2}{n} \cdot \sin\left(\frac{\phi_i}{n}\right)^3 \cdot \sin(\phi_i + 2) \quad (2)$$

$$Z\xi_{i,j} = -1 \cdot h1 \cdot (\cos(1,5 \cdot \psi)_i + 1,4)^2 \cdot \sin\left(\frac{\psi_i}{n} + 1,4\right) + h1 \quad (3)$$

Równania 1, 2, 3 mają postać macierzową. Żeby można było krzywe przestrzenne opisujące kształty ząbków główki czosnku, a także rurowego pędu i skróconej łodygi przedstawić w formie dyskretnej, należy wprowadzić parametry sterujące zgromadzone w wektorach 4, 7, 38, 40 oraz macierzach 8, 10.

W wektorze 4 występują następujące parametry:  $N$  – liczba punktów, z których składa się przestrzenna krzywa opisująca kształt ząbków czosnku,  $Np$  – liczba punktów, z których składa się linia śrubowa reprezentująca rurowy pęd czosnku,  $Nl$  – określa liczbę południków i równoleżników modelu bryły skróconej łodygi czosnku,  $n$  – wyznacza liczbę zwojów krzywej przestrzennej opisującej kształt ząbka czosnku,  $np$  – liczba zwojów krzywej przestrzennej opisującej rurowy pęd czosnku.

Zmienne zakresowe stosowane w równaniach parametrycznych opisujących kształty części morfologicznych główki czosnku zamieszczone są w wektorze 5.

$$\begin{bmatrix} N \\ Np \\ Nl \\ n \\ np \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 25 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (4) \quad \begin{bmatrix} i \\ j \\ p \\ u \\ l \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0...N \\ 0...N \\ 0...Np \\ 0...Np \\ 0...Nl \\ 0...Nl \end{bmatrix} \quad (5)$$

Kąty występujące w parametrycznych równaniach opisujących kształty części morfologicznych główki czosnku zdefiniowane są w wektorze 6. Parametry decydujące o kształcie krzywych przestrzennych zamieszczone są w wektorze 7.

$$\begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_p \\ \phi_l \\ \theta l_m \\ \psi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \cdot \pi \cdot \frac{n}{N} \\ p \cdot \pi \cdot \frac{1}{np} \\ 3 \cdot \pi \cdot \frac{2}{Nl} \\ m \cdot \pi \cdot \frac{2}{Nl} \\ i \cdot \pi \cdot \frac{0,4}{N} \end{bmatrix} \quad (6) \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1,5 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Macierz 8 jest macierzą geometrii poszczególnych sześciu ząbków (grubość  $a$ , szerokość  $b$ , długość  $h$ ) wchodzących w skład główki czosnku. Wartości średnicy zewnętrznej rurowego pędu  $r$  i jego wysokości  $cp$  oraz średnicy skróconej łodygi  $Rl$  i jej wysokości  $hl$  oraz średnicy 1 główki czosnku  $ag$ ,

prostopadłej do niej średnicy 2 główki czosnku  $bg$ , a także wysokość główki czosnku  $hg$  podane są w wektorze 9. Wartości elementów macierzy 8 i wektora 9 pochodzą z pomiarów.

$$\begin{bmatrix} a1 & b1 & h1 \\ a2 & b2 & h2 \\ a3 & b3 & h3 \\ a4 & b4 & h4 \\ a5 & b5 & h5 \\ a6 & b6 & h6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,5 & 16 & 29 \\ 10 & 13,5 & 24 \\ 12 & 13 & 23 \\ 14 & 15 & 25 \\ 14 & 13 & 23 \\ 14 & 13 & 24 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1,5 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Wartości kątów obrotu  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (podanych w stopniach) dla poszczególnych ząbków czosnku zamieszczono w macierzy 10.

$$\begin{bmatrix} \alpha1 & \beta1 & \gamma1 \\ \alpha2 & \beta2 & \gamma2 \\ \alpha3 & \beta3 & \gamma3 \\ \alpha4 & \beta4 & \gamma4 \\ \alpha5 & \beta5 & \gamma5 \\ \alpha6 & \beta6 & \gamma6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 & -15 & 0 \\ 100 & -10 & 5 \\ 30 & -10 & 0 \\ -20 & -15 & 0 \\ -70 & -20 & 0 \\ -120 & -20 & 5 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Wzory do przeliczenia miary stopniowej na miarę łukową zamieszczono w macierzy 11.

$$\begin{bmatrix} \alpha1r & \beta1r & \gamma1r \\ \alpha2r & \beta2r & \gamma2r \\ \alpha3r & \beta3r & \gamma3r \\ \alpha4r & \beta4r & \gamma4r \\ \alpha5r & \beta5r & \gamma5r \\ \alpha6r & \beta6r & \gamma6r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha1 \cdot \frac{\pi}{180} & \beta1 \cdot \frac{\pi}{180} & \gamma1 \cdot \frac{\pi}{180} \\ \alpha2 \cdot \frac{\pi}{180} & \beta2 \cdot \frac{\pi}{180} & \gamma2 \cdot \frac{\pi}{180} \\ \alpha3 \cdot \frac{\pi}{180} & \beta3 \cdot \frac{\pi}{180} & \gamma3 \cdot \frac{\pi}{180} \\ \alpha4 \cdot \frac{\pi}{180} & \beta4 \cdot \frac{\pi}{180} & \gamma4 \cdot \frac{\pi}{180} \\ \alpha5 \cdot \frac{\pi}{180} & \beta5 \cdot \frac{\pi}{180} & \gamma5 \cdot \frac{\pi}{180} \\ \alpha6 \cdot \frac{\pi}{180} & \beta6 \cdot \frac{\pi}{180} & \gamma6 \cdot \frac{\pi}{180} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Wymiary  $ax$ ,  $by$ ,  $hz$  ząbka czosnku opisane są w wektorze 12.

$$\begin{bmatrix} ax \\ by \\ hz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(X\xi) + (-1) \cdot \min(X\xi) \\ \max(Y\xi) + (-1) \cdot \min(Y\xi) \\ \max(Z\xi) + (-1) \cdot \min(Z\xi) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Współczynniki skalujące potrzebne do wyznaczenia wartości współrzędnych punktów krzywej przestrzennej odwziewiedlającej wymiary ząbków czosnku podane są w wektorze 13.

$$\begin{bmatrix} \xi1x & \xi1y & \xi1z \\ \xi2x & \xi2y & \xi2z \\ \xi3x & \xi3y & \xi3z \\ \xi4x & \xi4y & \xi4z \\ \xi5x & \xi5y & \xi5z \\ \xi6x & \xi6y & \xi6z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a1/ax & b1/by & h1/hz \\ a2/ax & b2/by & h2/hz \\ a3/ax & b3/by & h3/hz \\ a4/ax & b4/by & h4/hz \\ a5/ax & b5/by & h5/hz \\ a6/ax & b6/by & h6/hz \end{bmatrix} \quad (13)$$

W wektorach 14, 15, 16 podane są wzory do wyznaczenia macierzy współrzędnych  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  punktów w trzech

wymiarach krzywych przestrzennych reprezentujących kształty ząbków czosnku.

$$\begin{bmatrix} X1i,j \\ X2i,j \\ X3i,j \\ X4i,j \\ X5i,j \\ X6i,j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi1x \cdot X\xi_{i,j} \\ \xi2x \cdot X\xi_{i,j} \\ \xi3x \cdot X\xi_{i,j} \\ \xi4x \cdot X\xi_{i,j} \\ \xi5x \cdot X\xi_{i,j} \\ \xi6x \cdot X\xi_{i,j} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} Y1i,j \\ Y2i,j \\ Y3i,j \\ Y4i,j \\ Y5i,j \\ Y6i,j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi1y \cdot Y\xi_{i,j} \\ \xi2y \cdot Y\xi_{i,j} \\ \xi3y \cdot Y\xi_{i,j} \\ \xi4y \cdot Y\xi_{i,j} \\ \xi5y \cdot Y\xi_{i,j} \\ \xi6y \cdot Y\xi_{i,j} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} Z1i,j \\ Z2i,j \\ Z3i,j \\ Z4i,j \\ Z5i,j \\ Z6i,j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi1z \cdot Z\xi_{i,j} \\ \xi2z \cdot Z\xi_{i,j} \\ \xi3z \cdot Z\xi_{i,j} \\ \xi4z \cdot Z\xi_{i,j} \\ \xi5z \cdot Z\xi_{i,j} \\ \xi6z \cdot Z\xi_{i,j} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Równania potrzebne do wyznaczenia obrotów modeli brył ząbków czosnku wokół osi  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  układu współrzędnych o kąty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , (macierz 10) mają następujące postacie:

$$\begin{aligned} X\chi a_{i,j} &= Z\chi_{i,j} \cdot (\sin(\gamma\chi r) \cdot \sin(\alpha\chi r) + \cos(\gamma\chi r) \cdot \cos(\alpha\chi r) \cdot \sin(\beta\chi r)) + \\ &- Y\chi_{i,j} \cdot (\cos(\gamma\chi r) \cdot \sin(\alpha\chi r) - \sin(\gamma\chi r) \cdot \cos(\alpha\chi r) \cdot \sin(\beta\chi r)) + \\ &- X\chi_{i,j} \cdot (\cos(\beta\chi r) \cdot \cos(\alpha\chi r)) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Y\chi a_{i,j} &= Y\chi_{i,j} \cdot (\cos(\gamma\chi r) \cdot \cos(\alpha\chi r) + \sin(\gamma\chi r) \cdot \sin(\beta\chi r) \cdot \sin(\alpha\chi r)) + \\ &- Z\chi_{i,j} \cdot (\sin(\gamma\chi r) \cdot \cos(\alpha\chi r) - \cos(\gamma\chi r) \cdot \sin(\alpha\chi r) \cdot \sin(\beta\chi r)) + \\ &- X\chi_{i,j} \cdot (\cos(\beta\chi r) \cdot \sin(\alpha\chi r)) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} Z\chi a_{i,j} &= Y\chi_{i,j} \cdot (\sin(\gamma\chi r) \cdot \cos(\beta\chi r)) - X\chi_{i,j} \cdot (\sin(\beta\chi r)) + \\ &+ Z\chi_{i,j} \cdot (\cos(\gamma\chi r) \cdot \cos(\beta\chi r)) \end{aligned} \quad (19)$$

## KONSTRUKCJA KRZYWEJ PRZESTRZENNEJ OPISUJĄCEJ KSZTAŁT OBCIĘTEGO RUROWEGO PĘDU

Równania parametryczne linii śrubowej reprezentującej rurowy pęd czosnku mają następujące postacie:

$$Xp_{p,u} = r \cdot \cos(\phi p_p) \quad (20)$$

$$Yp_{p,u} = r \cdot \sin(\phi p_p) \quad (21)$$

$$Zp_{\xi p,u} = cp \cdot \frac{\phi p_p}{np} \quad (22)$$

gdzie:  $r$  – promień okręgu,  $\phi p$  – kąt

Współrzędna  $Zp\xi$  musi być skalowana, żeby wysokość rurowego pędu była zbliżona do rzeczywistej wartości. Wymiar  $cpz$  oblicza się z niżej zamieszczonej zależności:

$$cpz = \max(Zp\xi) + (-1) \cdot \min(Zp\xi) \quad (23)$$

Współczynnik skalowania ma następującą postać:

$$\xi_{pz} = \frac{cp}{cpz} \quad (24)$$

Macierz współrzędnych  $Z_p$  rurowego pędu czosnku przedstawia niżej zamieszczona zależność:

$$Z_{p,p,u} = \xi_{pz} \cdot Z_{p\xi,p,u} \quad (25)$$

## KONSTRUKCJA DYSKRETNEJ POWIERZCHNI SKRÓCONEJ ŁODYGI

Równania parametryczne współrzędnych  $X_l$  i  $Y_l$  potrzebnych do wyznaczenia dyskretnej powierzchni reprezentującej kształt skróconej łodygi czosnku mają następujące postacie:

$$X_{l,m} = (Rl + (Rl - r) \cdot \cos(\phi_l)) \cdot \cos(\theta_{l,m}) \quad (26)$$

$$Y_{l,m} = (Rl + (Rl - r) \cdot \cos(\phi_l)) \cdot \sin(\theta_{l,m}) \quad (27)$$

gdzie:  $r$  – promień obracanego okręgu,  $Rl$  – odległość środka obracanego okręgu od osi obrotu,  $\phi_l$ ,  $\theta_l$  – kąty.

Należy wyznaczyć macierz współrzędnej  $Z_l$  dyskretnej powierzchni reprezentującej kształt skróconej łodygi czosnku. Obliczenia wymiaru  $hlz$  dokonuje się na podstawie następującej zależności:

$$hlz = \max(Z_l\xi) + (-1) \cdot \min(Z_l\xi) \quad (28)$$

Zależność, z której wyznacza się wartość współczynnika skalującego współrzędne  $Z_l$  modelu skróconej łodygi czosnku ma następującą postać:

$$\xi_{lz} = \frac{hl}{hlz} \quad (29)$$

Macierz współrzędnych  $Z_l$  modelu kształtu skróconej łodygi czosnku ma postać:

$$Z_{l,m} = \xi_{lz} \cdot Z_{l\xi,m} + \frac{hl}{2} \quad (30)$$

gdzie:

$$Z_{l\xi,m} = hl \cdot \sin(\phi_l) \quad (31)$$

## KONSTRUKCJA KRZYWEJ PRZESTRZENNEJ OPISUJĄCEJ KSZTAŁT BRYŁY GŁÓWKI CZOSNKU

Macierzowe równania współrzędnych  $X_g$ ,  $Y_g$ ,  $Z_g$  punktów krzywej przestrzennej reprezentującej kształt główki czosnku mają następującą postać:

$$X_{g_s,t} = \frac{\phi_{g_s}}{15} \cdot \sin\left(\frac{\phi_{g_s}}{15}\right) \cdot 9 \cdot \cos(\phi_{g_s}) - \frac{\phi_{g_s}}{15} \cdot \sin\left(\frac{\phi_{g_s}}{15}\right) \cdot 0,5 \cdot \cos(9 \cdot \phi_{g_s}) \quad (32)$$

$$X_{g_s,t} = \frac{ag}{\max(X_{g_s,t}) + (-1) \cdot \min(X_{g_s,t})} \cdot X_{g_s,t} + 1 \quad (33)$$

$$Y_{g_s,t} = \frac{\phi_{g_s}}{15} \cdot \sin\left(\frac{\phi_{g_s}}{15}\right) \cdot 9 \cdot \sin(\phi_{g_s}) - \frac{\phi_{g_s}}{15} \cdot \sin\left(\frac{\phi_{g_s}}{15}\right) \cdot 0,5 \cdot \sin(9 \cdot \phi_{g_s}) \quad (34)$$

$$Y_{s,t} = \frac{bg}{\max(Y_{g_s,t}) + (-1) \cdot \min(Y_{g_s,t})} \cdot X_{g_s,t} + 9 \quad (35)$$

$$Z_{g_s,t} = hg \cdot \cos((1,5 \cdot \psi_{g_s})_s + 1,4) \cdot \sin\left(\frac{\psi_{g_s}}{15} + 1,4\right) \quad (36)$$

$$Z_{g_s,t} = \frac{hg}{\max(Z_{g_s,t}) + (-1) \cdot \min(Z_{g_s,t})} \cdot Z_{g_s,t} - 10 \quad (37)$$

## PARAMETRY SŁUŻĄCE DO WYKREŚLENIA CZĘŚCI MORFOLOGICZNYCH GŁÓWKI CZOSNKU

W macierzy 38 zamieszczone są wartości przesunięć modeli ząbków czosnku względem osi  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  układu współrzędnych.

$$\begin{bmatrix} t1x & t1y & t1z \\ t2x & t2y & t2z \\ t3x & t3y & t3z \\ t4x & t4y & t4z \\ t5x & t5y & t5z \\ t6x & t6y & t6z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 8 & 19 & 2 \\ 20 & 17 & 2 \\ 25 & 6 & 2 \\ 15 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Współrzędne  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  punktów krzywej przestrzennej leżącej na powierzchni modeli ząbków umieszczonych w modelu główki czosnku zapisane są w niżej zamieszczonej macierzy:

$$\begin{bmatrix} \Pi 1 & \Phi 1 & \Omega 1 \\ \Pi 2 & \Phi 2 & \Omega 2 \\ \Pi 3 & \Phi 3 & \Omega 3 \\ \Pi 4 & \Phi 4 & \Omega 4 \\ \Pi 5 & \Phi 5 & \Omega 5 \\ \Pi 6 & \Phi 6 & \Omega 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X1\alpha + t1x & Y1\alpha + t1y & Z1\alpha + t1z \\ X2\alpha + t2x & Y2\alpha + t2y & Z2\alpha + t2z \\ X3\alpha + t3x & Y3\alpha + t3y & Z3\alpha + t3z \\ X4\alpha + t4x & Y4\alpha + t4y & Z4\alpha + t4z \\ X5\alpha + t5x & Y5\alpha + t5y & Z5\alpha + t5z \\ X6\alpha + t6x & Y6\alpha + t6y & Z6\alpha + t6z \end{bmatrix} \quad (39)$$

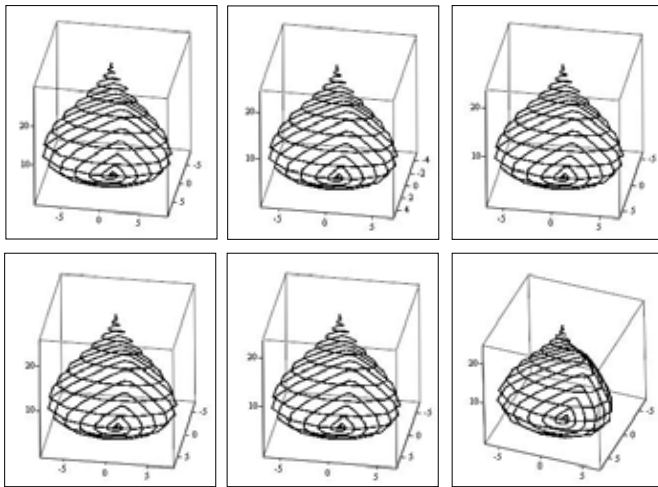
W macierzy 40 podano wartości przesunięć względem osi  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  układu współrzędnych modelu rurowego pędu i skróconej łodygi czosnku:

$$\begin{bmatrix} tlx & tly & tlz \\ tpx & tpy & tpz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 12 & 10 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Współrzędne  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  punktów leżące na powierzchni modeli rurowego pędu i skróconej łodygi czosnku zapisano w niżej zamieszczonej macierzy:

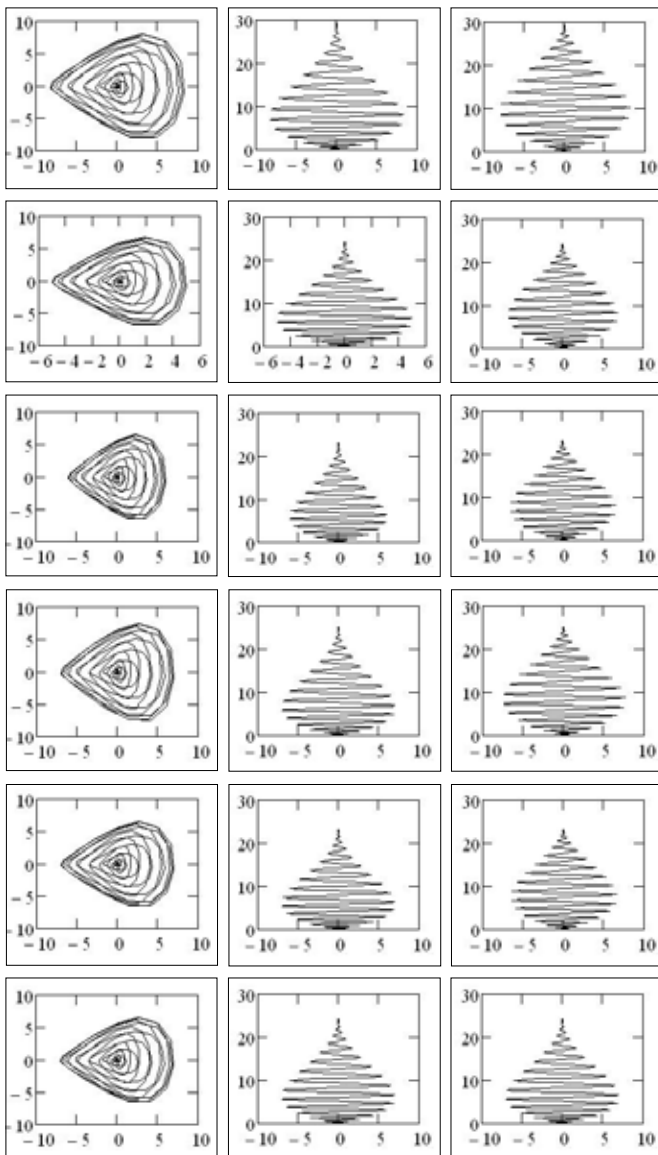
$$\begin{bmatrix} \Gamma l & \Delta l & \Theta l \\ \Gamma p & \Delta p & \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Xl + tlx & Yl + tly & Zl + tlz \\ Xp + tpx & Yp + tpy & Zp + tpz \end{bmatrix} \quad (41)$$

Na rysunku 4 przedstawiono krzywe przestrzenne reprezentujące kształty sześciu ząbków czosnku, a rzuty na płaszczyzny  $XY$ ,  $XZ$ ,  $YZ$  krzywych przestrzennych reprezentujących kształty sześciu ząbków czosnku zamieszczono na rysunku 5.



Rys. 4. Krzywe przestrzenne reprezentujące kształty ząbków czosnku od 1 do 6.

Źródło: Opracowanie własne.

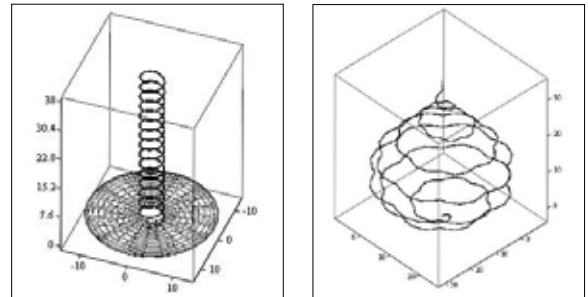


Rys. 5. Rzuty na płaszczyzny  $XY$ ,  $XZ$ ,  $YZ$  krzywych przestrzennych reprezentujących kształty ząbków czosnku od 1 do 6.

Źródło: Opracowanie własne.

Modele ząbków czosnku reprezentowane krzywymi przestrzennymi zamieszczonymi na rysunkach 4 i 5 zachowują podstawowe wymiary i kształt rzeczywistych ząbków modelowanego czosnku z wystarczającą dokładnością do celów projektowych. W modelach ząbków czosnku zmieniać można wartości podstawowych wymiarów każdego ząbka (długość, grubość, szerokość).

Model 3D kształtu bryły skróconej łądgi i rurowego pędu oraz model kształtu łuski zewnętrznej okrywającej ząbki w główce czosnku są przedstawione na rysunku 6.

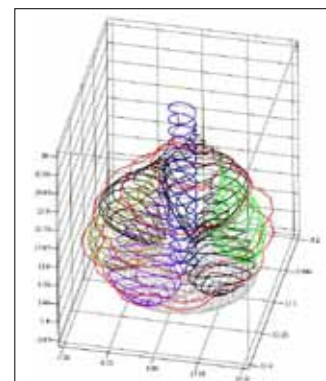


Rys. 6. Modele 3D kształtu bryły skróconej łądgi i rurowego pędu oraz kształtu łuski zewnętrznej okrywającej ząbki w główce czosnku.

Źródło: Opracowanie własne.

Krzywa śrubowa (rys. 6) może być stosowana do modelowania rurowego pędu czosnku, wartość jego długości i średnicy można zmieniać. Wartość średnicy jest cechą indywidualną każdego czosnku, zaś długość zależy od miejsca obcięcia pędu w czasie zbioru. Parametryczne równanie torusa nadaje się do modelowania kształtu skróconej łądgi czosnku, z której wyrastają ząbki (rys. 6). W modelu tym zmieniać można wartości średnic zewnętrznej i wewnętrznej oraz wysokości. Za pomocą krzywej przestrzennej (rys. 6) można modelować kształt łuski zewnętrznej czosnku, która okrywa ząbki w główce czosnku. W modelu łuski zewnętrznej można zmieniać wartości średnic i wysokości, które są zależne od gabarytów rzeczywistej główki czosnku. W modelu tym zmieniać można też liczbę przebiegów krzywej zależnej od liczby ząbków w główce czosnku.

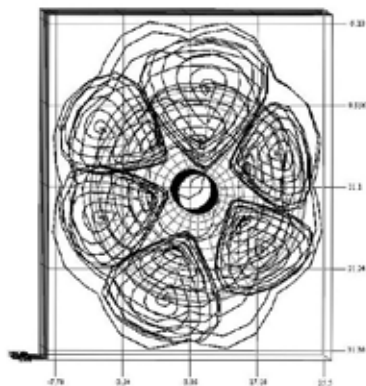
Na rysunku 7. przedstawiono krzywe przestrzenne reprezentujące kształty sześciu ząbków czosnku rozmieszczonych wokół modelu rurowego pędu i przylegających do modelu skróconej łądgi oraz łuski zewnętrznej okrywającej ząbki w główce czosnku.



Rys. 7. Krzywe przestrzenne reprezentujące kształty sześciu ząbków czosnku rozmieszczonych wokół modelu rurowego pędu i przylegających do modelu skróconej łądgi oraz łuski zewnętrznej okrywającej ząbki w główce czosnku.

Źródło: Opracowanie własne.

Na rysunku 8 przedstawiono rzuty krzywych przestrzennych modeli sześciu ząbków czosnku ułożonych w okółek oraz łuski zewnętrznej okrywającej ząbki w główce czosnku.



**Rys. 8.** Rzuty na płaszczyznę  $XY$  krzywych przestrzennych reprezentujących kształty sześciu ząbków czosnku rozmieszczonych wokół modelu rurowego pędu i przylegających do modelu skróconej łodygi oraz łuski zewnętrznej okrywającej ząbki w główce czosnku.

**Źródło:** Opracowanie własne.

Stosując, z grupy przekształceń geometrycznych, trzy przesunięcia i trzy obroty względem osi  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  układu współrzędnych można z modeli części morfologicznych złożyć model główki czosnku (rys. 7, 8). W skład modelu 3D główki czosnku wchodzi modele 3D następujących części morfologicznych: ząbków czosnku, skróconej łodygi, rurowego obciętego pędu oraz łuski zewnętrznej okrywającej ułożone w okółek ząbki w główce czosnku. Dokładność złożenia modelu 3D główki czosnku zależy od właściwego doboru wartości parametrów przekształceń geometrycznych dla poszczególnych modeli części morfologicznych.

## PODSUMOWANIE

Proponowana metoda matematycznego opisu kształtu poszczególnych części składowych główki czosnku wykorzystująca krzywe przestrzenne może być przydatna do celów projektowych mechanizmów i zespołów roboczych maszyn i urządzeń stosowanych w mechanizacji uprawy i obróbki czosnku. W proponowanym modelu matematycznym kształtu główki czosnku i jej części składowych zastosowano współczynniki sterujące pozwalające na zmianę wymiarów modelu czosnku zbliżając jego kształt do kształtu główki czosnku rzeczywistego. Model matematyczny może służyć do generowania macierzy współrzędnych  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  punktów dyskretyzujących kształt główki czosnku i jego części składowych. Do wizualizacji wyżej wymienionych modeli brył 3D można wykorzystać program komputerowy Mathcad.

## LITERATURA

- [1] BAKHTIARI M., R., M. LOGHAVI. 2009. *Development and evaluation of an innovative garlic clone precision planter*. J. Agric. Sci. Technol., Vol 11: 125-136.
- [2] DĘBSKI B., J. A. MILNER. 2007. *Molekularne mechanizmy przeciwnowotworowego działania czosnku; Rola reaktywnych form tlenu*. Bromat. Chem. Toksykol. – XL, 3: 223-228.

- [3] FOLEY J. D., A. VAN DAN, FEINER S. K., HUGHES J. K., PHILLIPS R. L. 1995. *Wprowadzenie do grafiki komputerowej*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- [4] GIELIS J. 2003. *A generic geometric transformation that unifies a wide range of natural, and abstract shapes*. American Journal of Botany, 90(3), 333-338.
- [5] KICIAK P. 2000. *Podstawy modelowania krzywych i powierzchni. Zastosowania w grafice komputerowej*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- [6] MAIDMENT D., Z. DEMBNY, D. WATTS. 2001. *The antibacterial activity of 12 Allium against Escherichia coli*. Nutrition & Food Science 31, 4/5: 238-241.
- [7] MIESZKALSKI L. 2003. *Method for generating three – dimensional solid models of seeds applied in the food industry*. Technical Sciences, Publisher UWM, No 6, 49-55.
- [8] MIESZKALSKI L. 2007. *Modelowanie matematyczne krzywych stosowanych do opisu kształtu nasion, owoców i warzyw. Właściwości geometryczne mechaniczne i strukturalne surowców i produktów spożywczych*. (Red. B. Dobrzańskiego i L. Mieszkalskiego). Komitet Agrofizyki. Polska Akademia Nauk. Wydawnictwo Naukowe FRNA, 13-40.
- [9] MIESZKALSKI L. 2011. *Komputerowe wspomaganie matematycznego modelowania kształtu cebuli za pomocą krzywej przestrzennej*. Postępy Techniki Przetwórstwa Spożywczego, Nr 2, 52-57.
- [10] SIMON P., W., JENDEREK M. M.. 2003. *Flowering, seed production, and the genesis of garlic breeding*. Plant Breeding Reviews, Volume 23, Edited by Jules Janick, John Wiley & Sons, Inc.: 211 – 244.
- [11] <www.erme-france.com>.
- [12] <www.czosnek uprawy.info>.

## THE METHOD OF MATHEMATICAL MODELING OF THE MORPHOLOGICAL SHAPE OF THE HEADS OF GARLIC (*ALLIUM SATIVUM L.*) USING SPATIAL CURVES

### SUMMARY

*This paper presents a mathematical model of the shape of the components of garlic. Parts of garlic were modeled using spatial curves. Using the shift and rotation axis  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  coordinate system, is made from 3D models of the morphological head of garlic. Visualization of these 3D solid models were made using the computer program Mathcad.*

**Key words:** head of garlic, shape, space curves, mathematical model, 3D model of the head of garlic.