

Dr inż. Joanna RUT
Wydział Inżynierii Produkcji i Logistyki
Politechnika Opolska

ADAPTACJA FUNKCJI BESSELA DO OPISU STANU ZMIESZANIA JEDNORODNEJ MIESZANINY ZIARNISTEJ®

W artykule przedstawiono sposób wykorzystania funkcji Bessela do opisu stanu zmieszania jednorodnej mieszaniny ziarnistej. W badaniach wykorzystano jeden układ ziarnisty składający się z ziaren kukurydzy różniący się barwą i wilgotnością. Do oceny miary rozproszenia trasera na powierzchni badanych przekrojów poprzecznych mieszalnika zastosowano metodę analizy wariancji.

Słowa kluczowe: funkcja Bessela, jednorodna mieszanina ziarnista, mieszanie materiałów ziarnistych, analiza wariancji.

WSTĘP

Mieszanie materiałów ziarnistych jest jednym z podstawowych procesów powszechnie spotykanych w wielu gałęziach przemysłu między innymi w przemyśle spożywczym, młynarskim, farmaceutycznym, cementowym, w budownictwie, w energetyce oraz w rolnictwie. W tych gałęziach, a także w wielu innych, efekt mieszania materiałów ziarnistych decyduje o jakości otrzymywanych produktów [1, 2, 5, 6].

Powszechnie znane i stosowane są trzy modele matematyczne, które w sposób szczegółowy opisują kinetykę procesu mieszania. Są nimi modele kinetyczne, stochastyczne oraz modele dyfuzyjne.

W zależności od sposobu mieszania i rodzajów mieszanych komponentów, przebieg procesu może wykazywać cechy różnych modeli. Złożoność zjawiska prowadzi do konieczności indywidualnego rozpatrywania każdego przypadku mieszania i poszukiwania innowacyjnych metod modelowania [4, 7].

Prowadzenie badań procesu mieszania materiałów ziarnistych w skali przemysłowej jest niezwykle trudne i kosztowne. Badania laboratoryjne są w stanie przybliżyć charakter procesu w warunkach przemysłowych i wyjaśnić najważniejsze własności badanego zjawiska. Obserwacje dotyczące konkretnego zjawiska niejednokrotnie pozwalają, na zastosowanie istniejących w matematyce i fizyce zależności [3, 8].

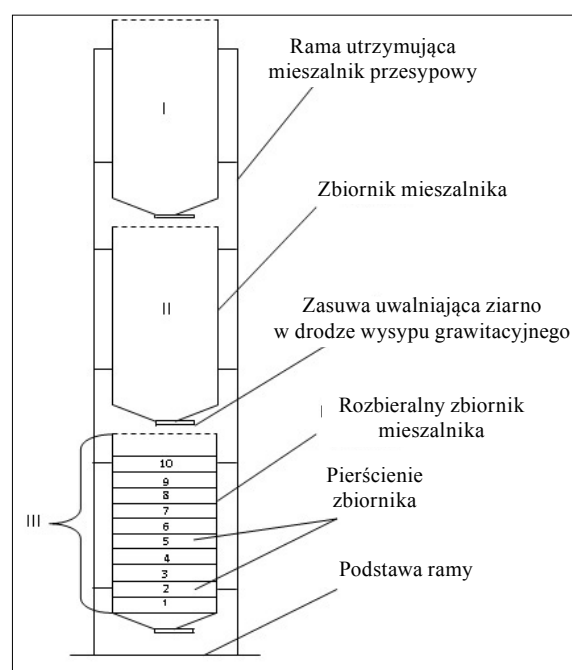
Celem artykułu jest prezentacja sposobu wykorzystania funkcji Bessela do opisu stanu zmieszania jednorodnej mieszaniny ziarnistej ziaren kukurydzy.

CEL BADAŃ

Celem prowadzonych badań była próba adaptacji funkcji Bessela do opisu stanu zmieszania jednorodnej mieszaniny ziarnistej. W oparciu o uzyskane zapisy cyfrowe obrazu z przekrojów poprzecznych mieszalnika przesypowego, dokonano oceny rozkładu obserwowanych cząstek trasera. Założono, że zastosowanie funkcji Bessela będzie dobrym statystycznym sposobem opisu stanu zmieszania badanych układów.

METODYKA BADAŃ

Materiałem użytym do badań był jednorodny układ ziarnisty składający się z ziaren kukurydzy różniący się barwą i wilgotnością - wilgotność względna ziarna mokrego wynosiła 16,2% ($\pm 0,5$), a wilgotność ziarna suchego wynosiła 11,8% ($\pm 0,5$). Układ ziarnisty poddawano mieszaniu w mieszalniku przesypowym (rys.1) [5].



Rys. 1. Dwuwymiarowy schemat laboratoryjnego mieszalnika przesypowego, I-szy zbiornik mieszalnika (zasilałający), II-gi zbiornik mieszalnika, III-ci zbiornik mieszalnika o rozbieralnej konstrukcji.

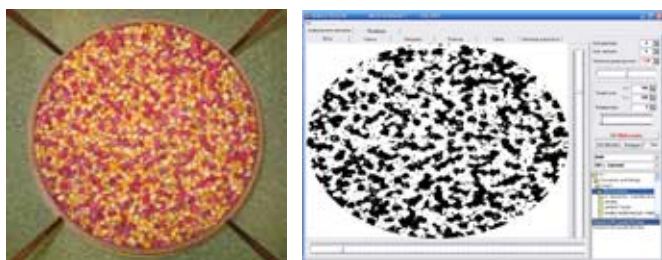
Fig. 1. Two-dimensional diagram of a laboratory mixer: the first tank mixer (power), the second mixing tank, a third tank mixer with dismantlable structure.

Źródło: Opracowanie własne.

Mieszalnik składał się z trzech identycznych zbiorników (wysokość części cylindrycznej – 500 mm, średnica wewnętrzna – 300 mm, wysokość części stożkowej – 90 mm, średnica otworu wysypowego – 30 mm), umieszczonych jeden nad drugim w sposób umożliwiający łatwą ich zamianę.

Dodatkowo jeden ze zbiorników składał się z 10 rozbieralnych pierścieni. Przed przystąpieniem do mieszania zasypywano zbiornik mieszalnika materiałem ziarnistym w udziale procentowych 50/50. Następnie zbiorniki zamieniano kolejno miejscami, opróżniając zbiornik na drodze wysypu grawitacyjnego, aż do momentu osiągnięcia stanu równowagowego układu na co składało się 10 kolejnych przesypów.

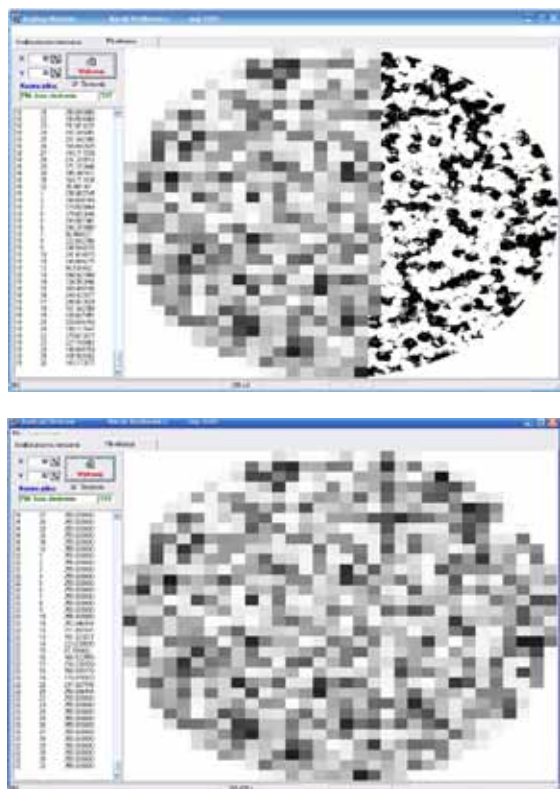
Każdy układ ziarnisty w udziale procentowym 50/50 poddawano mieszaniu. Rozbieralna konstrukcja mieszalnika umożliwiła uzyskanie cyfrowego zapisu obrazu przekrojów poprzecznych mieszalnika. Uzyskany obraz poddano komputerowej analizie obrazu. Przy digitalizacji zamieniono kolory ziaren kukurydzy na czerni i biel (rys. 2), a następnie wykonano tzw. pikselizację (rys. 3).



Rys. 2. Przykładowy obraz wybranego pierścienia mieszalnika (fot. J. Rut).

Fig. 2. Demonstration image of a chosen ring of the agitator (fot. J. Rut).

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 3. Przykładowe obrazy przedstawiające proces pikselizacji ziarna kukurydzy (fot. J. Rut).

Fig. 3. Demonstration images presenting a process to the pixellization grains of the corn (fot. J. Rut).

Źródło: Opracowanie własne.

Aby wyznaczyć wielkość komórek przy pikselizacji obliczono średnicę zastępczą d_e ziaren dla kukurydzy, zgodnie do:

$$d_e = \sqrt[3]{\frac{6M}{\pi\gamma}} \quad (1)$$

gdzie:

M – masa nasion próby [kg],

γ – gęstość nasion [kg/m^3],

n – liczba nasion w próbce.

Średnica zastępcza wyniosła $9,3 \cdot 10^{-3}$ m.

Dla tak obliczonej średnicy zastępczej przeprowadzono proces pikselizacji dla ziaren kukurydzy w układzie 32×32 komórki. W kolejnym etapie analizy danych wykonano binaryzację; punktom białym przydzielano wartość 1, natomiast czarnym 0. Do oceny miary rozproszenia trasera na powierzchni badanych przekrojów poprzecznych mieszalnika zastosowano metodę analizy wariancji s^2

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2)$$

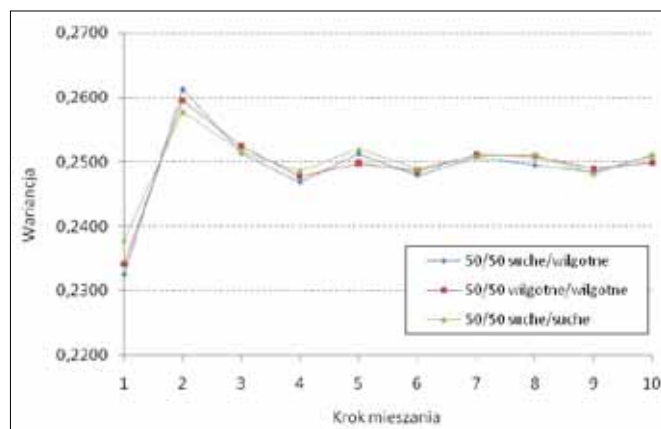
gdzie:

n - ilość obserwacji,

x_i - wartość cechy badanej dla i-tej obserwacji,

- wartość średnia badanej cechy.

Następnie obliczono średnie wariancje dla trzech układów różniących się wilgotnością w udziale procentowym 50/50. Uzyskane wyniki przedstawiono graficznie na rys.4.



Rys. 4. Wariancja dla trzech udziałów procentowych (obliczenia własne).

Fig. 4. Variance for three percent participation (personal accounts).

Podczas mieszania jednorodnych układów ziarnistych różniących się wilgotnością nie stwierdzono, aby proces mieszania był uzależniony od wilgotności materiału w badanym zakresie.

ANALIZA STATYSTYCZNA I DYSKUSJA WYNIKÓW

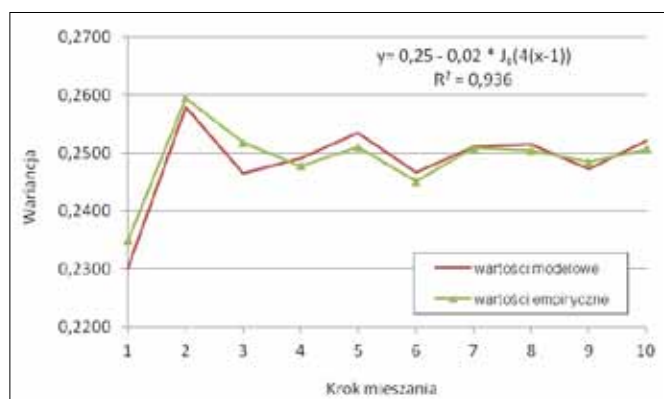
Jak już wspomniano wcześniej, w badaniach podjęto próbę adaptacji funkcji Bessela do opisu stanu zmieszania jednorodnej mieszaniny ziarnistej. Funkcje Bessela pierwszego rodzaju opisuje poniższy wzór:

$$J_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}}{k! \Gamma(k+\alpha+1)} \quad (3)$$

gdzie, Γ jest funkcją gamma Eulera, a parametr α (dla układu jednorodnego) jest wartości zerowej. Stąd

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (4)$$

Do dalszej analizy przyjęto uśrednione wartości poszczególnych obserwacji dla badanych układów. Na rysunku 5 przedstawiono uśrednione wartości empiryczne oraz wartości modelowe.



Rys. 5. Wykres przedstawiający wartości empiryczne i modelowe (obliczenia własne).

Fig. 5. Graph showing empirical and model value (personal accounts).

Wyniki aproksymacji prowadzą do modelu opisywanego poniższym równaniem:

$$y = s^2 = 0,25 - 0,02J_0(4(x-1)) \quad (5)$$

gdzie:

x - liczba kolejnych przesypów.

Do weryfikacji uzyskanego modelu zastosowano współczynnik determinacji R^2 , który wyraża liczbową ocenę jakości dopasowania modelu do danych doświadczalnych, z definicji:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (6)$$

gdzie:

y_i – rzeczywista wartość zmiennej objaśnianej

\hat{y}_i – wartość teoretyczna zmiennej objaśnianej (na podstawie modelu)

\bar{y} – średnia arytmetyczna empirycznych wartości zmiennej objaśnianej.

Uzyskany wysoki współczynnik determinacji $R^2 = 0,93$, informuje o dobrym dopasowaniu wyników obliczeń na podstawie modelu do danych doświadczalnych.

WNIOSKI

1. Wskazano na możliwość wykorzystania funkcji Bessela do oceny stanu zmieszania jednorodnego układu ziarnistego.
2. Wartości modelowe uzyskane w oparciu o funkcję Bessela odzwierciedlają rzeczywiste wartości stopnia zmieszania jednorodnych materiałów ziarnistych.
3. Wykorzystanie funkcji Bessela w postaci zaproponowanego modelu korelacyjnego pozwala na uzyskanie informacji opisujących stan zmieszania jednorodnej mieszaniny ziarnistej.
4. Opracowany model dobrze odwzorowuje wartości empiryczne o czym świadczy wysoki współczynnik dopasowania R^2 .

LITERATURA

- [1] BOSS J. 1987. *Mieszanie materiałów ziarnistych*. PWN Warszawa, 8.
- [2] BOSS J., TUKIENDORF M. *Mixing of granular materials using the method of funnel-flow*. Powder Handling & Processing 9, No. 4 October/December, 341-343.
- [3] LEWICKI P., LENART A., KOWALCZYK R., PAŁACHA Z. *Inżynieria procesowa i aparatura przemysłu spożywczego*. WNT, Warszawa, ISBN 83-204-2324-4
- [4] MATUSZEK D., TUKIENDORF M. 2007. *Rozkład koncentracji składników podczas mieszania funnel-flow z systemem RSI*. Inżynieria Rolnicza. Nr 6(94). Kraków, 159-165.
- [5] RUT J. 2011. *Efekty suszenia materiałów ziarnistych w mieszalniku przesywowym*. Rozprawa doktorska, Politechnika Opolska, Opole.
- [6] SZWEDZIAK K., RUT J. 2010. *Wpływ wilgotności na proces mieszania spożywczego układu ziarnistego metodą przesypu*. Postępy Techniki Przetwórstwa Spożywczego, nr 1, 47-49.
- [7] TUKIENDORF M. 2003. *Modelowanie neuronowe procesów mieszania niejednorodnych układów ziarnistych*. Rozprawy Naukowe Akademii Rolniczej w Lublinie, Zesz. 272, Lublin.
- [8] TUKIENDORF M. 2003. *Wpływ zmiany skali urządzenia mieszającego na wyniki procesu mieszania materiałów ziarnistych podczas wysypu ze zbiornika*. XI Ogólnopolska Konferencja: Postęp w Inżynierii Żywności, Frombork, 9-12.

ADAPTATION OF THE BESSEL FUNCTION TO THE DESCRIPTION OF THE CONDITION OF MIXING HOMOGENEOUS GRAIN MIXTURE

SUMMARY

In the article a way of using the Bessel function for the description of state of mixing homogeneous grain mixture is presented. In research consisting used a grain system the corn, of different colour and humidity. The method of variance analysis was used to the estimation on the surface of dispersing the tracer of examined cross sections of the agitator.

Key words: Bessel function, homogeneous grain mixture, mixing granular materials, analysis of the variance.