

PORÓWNANIE JAKOŚCI PRACY REGULATORÓW STANU I PID W UKŁADZIE KASKADOWYM DWÓCH ZBIORNIKÓW

Mirosław TOMERA¹, Mateusz TALAŚKA²

1. Akademia Morska w Gdyni, Wydział Elektryczny, ul. Morska 83, 81-225 Gdynia
tel: 058 690 1471 fax: 058 690 1445 e-mail: tomera@am.gdynia.pl
2. Zakłady Farmaceutyczne Polpharma S.A., ul. Pelplińska 19, 83-200 Starogard Gdański
tel: 058 563 1600 fax: 058 562 2353 e-mail: mateusz.talaska@polpharma.com

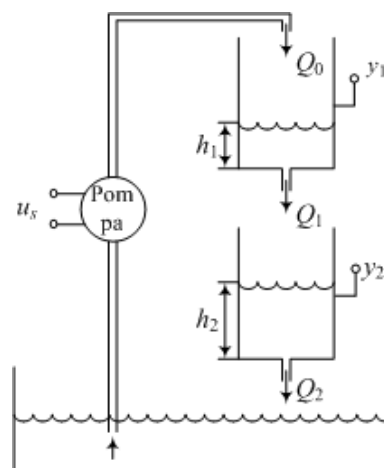
Streszczenie: W referacie przedstawiona została analiza porównawcza dokonana pomiędzy dwoma regulatorami stanu i regulatorem PID, opierająca się na ocenie odpowiedzi czasowej sterowania poziomem wody w układzie kaskadowym dwóch zbiorników. Obiekt sterowania jest układem nieliniowym i składa się z pompy, dwóch zbiorników połączonych kaskadowo oraz czujników do pomiaru poziomów wody w zbiornikach. Szczegółowo przedstawione zostały metody projektowania analizowanych regulatorów. Pierwszy regulator stanu jest regulatorem optymalnym LQR dla którego analitycznie wyprowadzone zostały wzory na obliczanie optymalnych wartości wzmacnień, drugi natomiast zaprojektowany został metodami Ackermana i lokowania biegunów. Parametry regulatora PID również dobrane zostały metodą lokowania biegunów. Badania wstępne przeprowadzone zostały w środowisku obliczeniowym MATLAB/Simulink z użyciem modeli symulacyjnych. Badania docelowe wykonane zostały w układzie rzeczywistym, gdzie algorytmy sterowania wyznaczone metodą emulacji, zaprogramowane zostały w mikrokontrolerze sygnałowym TMS320F28335, wykorzystanym do automatycznego sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku.

Słowa kluczowe: sterowanie całkujące, regulator optymalny LQR, regulator PID

1. WPROWADZENIE

Przedstawiony, schematycznie na rysunku 1, układ kaskadowy dwóch zbiorników stanowi znakomity obiekt wykorzystywany w dydaktyce, pozwalający na nauczanie metod projektowania różnych rodzajów algorytmów sterowania stosowanych w praktyce [4]. Dwa zbiorniki zawieszane kaskadowo pozwalają na użycie dowolnych algorytmów sterowania do regulacji poziomem wody w zbiornikach: dolnym lub w górnym. Zaprojektowane algorytmy sterowania implementowane są w systemie mikroprocesorowym zbudowanym w oparciu o mikrokontroler sygnałowy TMS320F28335 [2].

W pracy przedstawione zostały algorytmy zastosowane do sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku, projektowane zarówno w przestrzeni stanów jak i z użyciem transmitancji. Wykorzystana została metoda emulacji, która polega na tym, że najpierw sterowanie opracowywane jest w dziedzinie czasu ciągłego, a następnie wyznaczony algorytm sterowania poddawany jest dyskretyzacji w celu



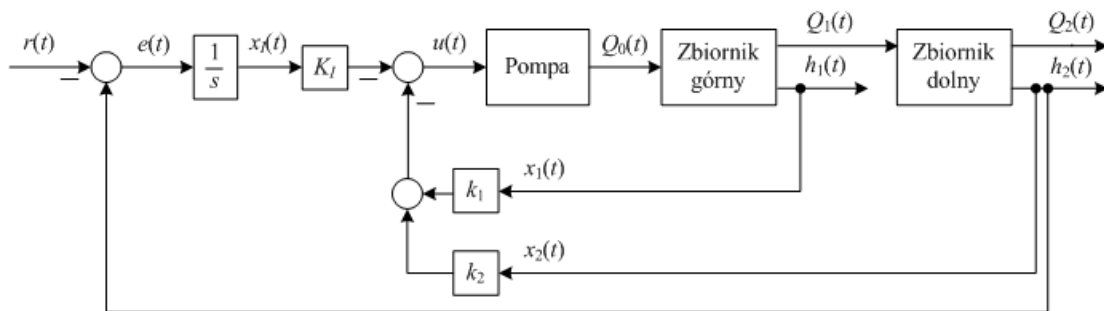
Rys. 1. Schemat sterowanego procesu

zaimplementowania go w urządzeniu cyfrowym.

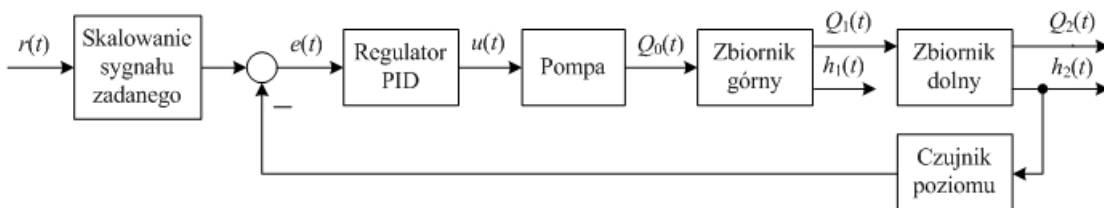
Projektowanie sterowania w przestrzeni stanów, zazwyczaj odbywa się metodą lokowania biegunów lub metodą Ackermana. Obydwie te metody opierają się na charakterystykach pożądanego biegunów układu zamkniętego, które zazwyczaj są bardzo trudne do zdefiniowania, szczególnie dla układów o dużych rozmiarach. Dodatkowo, metody te nie biorą pod uwagę możliwości realizacji zadania sterowania przez wykorzystywane urządzenie wykonawcze.

W procesach sterowania przemysłowego stosowane są regulatory PID, które zawierają w sobie elementy działania proporcjonalnego, całkującego i różniczkującego. Regulatory te posiadają prostą strukturę i pozwalają uzyskać dobrą jakość sterowania w różnych układach regulacji. Jednakże, przy zmianach parametrów obiektu jak również przy zmianach poziomu zakłóceń oddziałujących na obiekt, regulatory PID nie są odpowiednie.

W celu uniknięcia problemów występujących przy stosowaniu regulatora PID i podobnych metod sterowania, może zostać zastosowany optymalny regulator stanu LQR (Linear Quadratic Regulator). Regulator ten daje najlepszą jakość sterowania w odniesieniu do pewnego wskaźnika jakości, który jest funkcją kwadratową zawierającą wektor



Rys. 2. Struktura projektowanego układu sterowania z regulatorami stanu wykorzystującymi sprzężenie całkujące



Rys. 3. Struktura projektowanego układu sterowania z regulatorem PID

stanu i wektor wejścia. Regulator ten posiada własną metodę projektowania przedstawioną w niniejszej pracy.

Zaprojektowany został również nieoptymalny regulator stanu ze sterowaniem całkującym, metodami: lokowania biegunów i Ackermana. Dodatkowo, w celu porównania uzyskanej jakości sterowania zaprojektowany został regulator PID, również metodą lokowania biegunów.

Regulatory stanu pracowały w układzie pokazanym na rysunku 2, natomiast regulator PID w układzie przedstawionym na rysunku 3. Poprzez porównanie uzyskanych wyników sterowania, dokonana została ocena jakości sterowania i znalezienie najlepszego typu regulatora w układzie sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku.

2. MODEL MATEMATYCZNY UKŁADU KASKADOWEGO DWÓCH ZBIORNIKÓW

Projektowane układy regulacji opierają się na liniowym modelu matematycznym obiektu. Układ kaskadowy dwóch zbiorników wraz z pompą jest układem nieliniowym i model matematyczny wymagał linearyzacji. Szczegóły dotyczące wyprowadzenia zastosowanego tutaj liniowego modelu matematycznego można znaleźć w pracy [5]. Tutaj zawarte zostały najważniejsze równania opisujące wyprowadzony model matematyczny, składający się z następującego równania stanu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 \\ \frac{1}{T_1} & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (1)$$

gdzie: $x_1(t) = h_1(t)$, $x_2(t) = h_2(t)$ - zmienne stanu, $u(t)$ - sygnał sterujący pompą, wyjście w regulatora, $T_1 = 73.5663$ [s], $T_2 = 65.5129$ [s] - stałe czasowe, $k = 0.1679$ - wzmacnienie.

i równanie wyjścia

$$y(t) = h_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

3. METODY STEROWANIA

Wszystkie przedstawione regulatory projektowane były metodą emulacji W podrozdziale tym szczegółowo przedstawione zostały wszystkie zaproponowane metody projektowania. Dobór parametrów projektowanych regulatorów związany był ze spełnieniem następujących wymagań projektowych:

- 1) Maksymalne przeregulowanie, mniejsze od 5%;
- 2) Czas narastania, mniejszy niż 100 s;
- 3) Czas regulacji, mniejszy niż 160 s;
- 4) Uchyb w stanie ustalonym < 2%.

Regulatory stanu projektowane są w układzie pokazanym na rysunku 2, w którym zastosowano regulator stanu ze sterowaniem całkującym uchyb. Zakłada się, że wektor zmiennych stanu jest mierzalny. Zlinearyzowany model matematyczny obiektu zapisany w postaci równań dynamicznych opisywany jest następującą postacią ogólną

$$\dot{\mathbf{x}}_{zb}(t) = \mathbf{A}_{zb} \mathbf{x}_{zb}(t) + \mathbf{B}_{zb} u(t) \quad (3)$$

$$y(t) = \mathbf{C}_{zb} \mathbf{x}(t) \quad (4)$$

Poprzez sprzężenie zwrotne, na wejście regulatora wprowadzana jest całka z uchybu regulacji $e(t) = y(t) - r(t)$. W związku z tym, wektor stanu obiektu \mathbf{x}_{zb} , powiększany jest o dodatkowy stan x_I , który daje następujące dodatkowe równanie różniczkowe wprowadzane do zestawu równań stanu

$$\dot{x}_I(t) = \mathbf{C}_{zb} \mathbf{x}_{zb}(t) - r(t) = e(t) \quad (5)$$

wobec tego

$$x_I(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (6)$$

Uzyskany wektor stanu zapisany w postaci macierzowej przyjmuje następującą postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_{zb}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_{zb} \\ 0 & \mathbf{A}_{zb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_I(t) \\ \mathbf{x}_{zb}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_{zb} \end{bmatrix} \cdot u(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r(t) \quad (7)$$

Wyprowadzenie zależności opisujących algorytmy regulatorów stanu prowadzone są przy założeniu, że $r(t) = 0$. Po uwzględnieniu tego warunku równanie (7) zostanie zapisane w następującej postaci ogólnej

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, u) \quad (8)$$

Prawo sterowania obejmujące poszukiwane parametry wektora \mathbf{K} jest następujące

$$u(t) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(t) = -\begin{bmatrix} K_I & k_1 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_I(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Znalezienie wzmocnień \mathbf{K} jest możliwe w przypadku gdy obiekt jest sterowalny.

Transmitancja wzorcowa III rzędu, której odpowiedź skokowa spełnia wymagania projektowe zapisane we wstępie do tego podrozdziału opisana jest wzorem

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{\alpha\omega_n^3}{(s + \alpha\omega_n)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \\ &= \frac{\alpha\omega_n^3}{s^3 + \omega_n(\alpha + 2\zeta)s^2 + \omega_n^2(1 + 2\alpha\zeta)s + \alpha\omega_n^3} \\ &= \frac{\alpha\omega_n^3}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)} \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie $\zeta = 0.7$, $\omega_n = 0.04$, $\alpha = 0.7$.

W celu zaimplementowania projektowanych regulatorów stanu (Rys. 2) w cyfrowym procesorze sygnałowym wymagana jest dyskretyzacja całkowania uchybu (6), co dokonane zostało w oparciu o następujący wzór

$$x_I(k) = x_I(k-1) + T \cdot e(k) \quad (11)$$

gdzie: T – okres próbkowania, $x_I(k)$, $x_I(k-1)$ wartości: bieżąca i poprzednia całki uchybu regulacji, $e(k)$ – wartość uchybu regulacji w chwili próbkowania.

3.1. Regulator optymalny LQR

Synteza regulatora optymalnego LQR polega na takim doborze wektora wzmocnień sprzężenia stanu \mathbf{K} (9), układu liniowego opisanego równaniem stanu (8), dla którego minimalizowana jest następująca funkcja celu

$$\min J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + uRu) dt = \int_0^{\infty} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, u) dt \quad (12)$$

gdzie: \mathbf{Q} i R zawierają współczynniki wagowe i odpowiadają za koszty związane ze sterowaniem oraz za szybkość działania układu regulacji.

Do dalszych obliczeń przyjęto następujące wartości macierzy wagowych [3]

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.1 & 0.1 \\ 0.0023 & 0.0001 & 0 \\ 1 & 10 & 10 \end{bmatrix} \quad R = 1 \quad (13)$$

W minimalizowanym wskaźniku jakości (12) nie jest zadany czas końcowy czyli rozpatrywany układ ma nieskończony horyzont sterowania i jest układem ciągłym w czasie. Zdefiniowany problem sterowania optymalnego rozwiązany zostanie poprzez wykorzystanie teorii sterowania optymalnego. Dla problemu opisanego równaniami (8) i (12) definiowana jest następująca funkcja Hamiltona [3]

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, u) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, u) \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + uRu + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u) \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B} u + uRu \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda}$ jest tzw. zmienną dualną.

Warunki konieczne i wystarczające istnienia rozwiązania optymalnego są następujące

$$\dot{u} = \left(\frac{\partial \mathbf{H}(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda})}{\partial u} \right)^T = 2Ru + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (15)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \left(\frac{\partial \mathbf{H}(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = -2\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (16)$$

Z równania (15) uzyskuje się wzór na sterowanie optymalne

$$u = -\frac{1}{2} R^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (17)$$

Po podstawieniu uzyskanej zależności na sterowanie optymalne u (17) do równania stanu układu (8) otrzymuje się następującą zależność

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \mathbf{A}\mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{B} R^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (18)$$

Równania (18) oraz (16) w zapisie macierzowym przedstawiają się następująco:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\frac{1}{2} \mathbf{B} R^{-1} \mathbf{B}^T \\ -2\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Macierz (19) można uprościć przez zastosowanie następujących zależności:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda}(t) = 2\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t) \quad (20)$$

Dzięki temu równanie (19) może zostać uproszczone do postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\lambda}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} R^{-1} \mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Uzyskana w równaniu (21) macierz nosi nazwę macierzy Hamiltona \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \quad (22)$$

Dla $\hat{\lambda}$ można zapisać:

$$\hat{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \Rightarrow \mathbf{P} = \hat{\lambda} \cdot \mathbf{x}^{-1} \quad (23)$$

gdzie macierz \mathbf{P} jest macierzą dodatnio określoną. Kolejnym krokiem jest wyznaczenie elementów macierzy \mathbf{P} , poprzez podstawienie zależności (23) do pierwszego równania znajdującego się w opisie macierzowym (21)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\hat{\lambda} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \quad (24)$$

Z równania (24) wynika zatem, że

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}]\mathbf{x} \quad (25)$$

Podstawienie zależności (23) dokonywane jest również do drugiego równania znajdującego się w opisie macierzowym (21)

$$\dot{\hat{\lambda}} = -\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\hat{\lambda} = -\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = -[\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}]\mathbf{x} \quad (26)$$

Różniczkując obustronnie zależność (23) uzyskuje się

$$\dot{\hat{\lambda}} = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{x} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \quad (27)$$

Po podstawieniu zależności (26) i (25) do wzoru (27) otrzymuje się

$$-[\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}]\mathbf{x} = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{x} + \mathbf{P}[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}]\mathbf{x} \quad (28)$$

Po podzieleniu wyrażenia (28) obustronnie przez \mathbf{x} oraz uporządkowaniu przedstawia się ono następująco

$$-\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} \quad (29)$$

W ten sposób zostało wyprowadzone różniczkowe równanie Riccatiego (29). W minimalizowanym wskaźniku jakości (12) układ ma nieskończony horyzont sterowania, wobec tego równanie (29) może zostać zapisane jako [3]

$$-\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (30)$$

W równaniu Riccatiego (30) macierz \mathbf{Q} musi być symetryczna co łatwo uzyskać stosując poniższe przekształcenie

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T}{2} \quad (31)$$

Po podstawieniu zależności (23) do równania (17) uzyskuje się zależność

$$u(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\hat{\lambda} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (32)$$

z której wyznaczane są wzmacnienia optymalne \mathbf{K} . Widać,

stąd, że do wyznaczenia wzmacnień optymalnych dla regulatora optymalnego LQR potrzebna jest macierz \mathbf{P} będącą rozwiązaniem równania Riccatiego (30).

W rozważanej pracy macierz \mathbf{P} wyznaczona została w sposób numeryczny na podstawie macierzy Hamiltona \mathbf{H} opisanej wzorem (22). Sposób ten polega na tym, że najpierw na podstawie macierzy Hamiltona \mathbf{H} wyznacza się jej wartości oraz wektory własne. Niech macierz \mathbf{V} zawiera wektory własne, natomiast macierz \mathbf{E} wartości własne macierzy \mathbf{H} . W analizowanym przypadku obydwie te macierze są o rozmiarze 6x6. Aby jednak projektowany układ był stabilny i sterowalny to wszystkie uzyskane wartości własne muszą znajdować się w lewej półpłaszczyźnie.

Następnie z macierzy wektorów własnych \mathbf{V} wybiera się tylko te kolumny, którym odpowiadają wartości własne macierzy \mathbf{E} mające ujemne części rzeczywiste. W ten sposób powstaje nowa macierz wektorów własnych \mathbf{W} o rozmiarze 6x3, którą następnie dzieli się na dwie równe macierze o rozmiarze 3x3 i otrzymuje się dwie nowe macierze. Z górnych trzech wierszy uzyskuje się macierz \mathbf{W}_1 , natomiast z dolnych trzech wierszy macierz \mathbf{W}_2 . Następnie w celu wyznaczenia wartości macierzy \mathbf{P} dokonuje się podzielenia macierzy \mathbf{W}_2 przez macierz \mathbf{W}_1 .

$$\mathbf{P} = \mathbf{W}_2 / \mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2 \cdot (\mathbf{W}_1)^{-1} \quad (33)$$

Po przeprowadzeniu tej operacji otrzymuje się macierz \mathbf{P} o rozmiarze 3x3, będącą rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego (30)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -0.0842 & 0.5957 & 2.3992 \\ 0.5957 & 4.5072 & 25.5629 \\ 2.3992 & 25.5629 & -118.5065 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Mając obliczoną macierz \mathbf{P} można teraz obliczyć wartości wzmacnień dla regulatora optymalnego LQR, korzystając z zależności (32) i otrzymuje się wówczas macierz wynikową \mathbf{K} w postaci:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = [0.1 \quad 0.7567 \quad 4.2914] \quad (35)$$

3.2. Regulator stanu projektowany metodą Ackermana

Metoda Ackermana służąca do wyznaczania wzmacnień nieoptymalnego regulatora stanu (9), w układzie pokazanym na rysunku 2, opiera się na następującym wzorze

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \alpha_c(\mathbf{A}) \quad (36)$$

Macierz sterowalności \mathbf{S} wyznaczana jest następująco

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] \quad (37)$$

gdzie macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} macierzami zawartymi w równaniu stanu opisanym wzorem (8).

Macierz $\alpha_c(\mathbf{A})$ ze wzoru (36) wyznaczana jest z zależności

$$\alpha_c(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + \alpha_{c1}\mathbf{A}^2 + \alpha_{c2}\mathbf{A} + \alpha_{c3}\mathbf{I} \quad (38)$$

gdzie α_{ci} , $i = 1, 2, 3$, są współczynnikami wzorcowego równania charakterystycznego, \mathbf{I} jest macierzą jednostkową.

Wzorcowe równanie charakterystyczne wyznaczone jest w oparciu o położenia biegunów wzorcowych s_1, s_2, s_3 wyznaczonych z mianownika transmitancji wzorcowej (10)

$$\alpha_c(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = s^3 + \alpha_{c1}s^2 + \alpha_{c2}s + \alpha_{c3} = 0 \quad (39)$$

W wyniku przeprowadzonych obliczeń metodą Ackermana uzyskane zostały następujące wartości wzmacnień nieoptymalnego regulatora stanu

$$\mathbf{K} = [0.0196 \quad 0.3285 \quad 0.9285] \quad (40)$$

3.3. Regulator stanu projektowany metodą lokowania biegunów

Metoda lokowania biegunów służąca do wyznaczania wzmacnień nieoptymalnego regulatora stanu (9), w układzie pokazanym na rysunku 2, polega na takim doborze wzmacnień sterowania \mathbf{K} , które ulokują bieguny układu skorygowanego w położeniach wzorcowych s_1, s_2, s_3 (10). Wówczas odpowiadające im pożądane równanie charakterystyczne sterowania przyjmie postać opisaną wzorem (39).

Podstawiając prawo sterowania (9) do równania stanu obiektu (8), otrzymuje się równanie stanu układu skorygowanego [1]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}] \cdot \mathbf{x}(t) \quad (41)$$

Równanie charakterystyczne uzyskiwane z równania stanu (41) opisywane jest wzorem

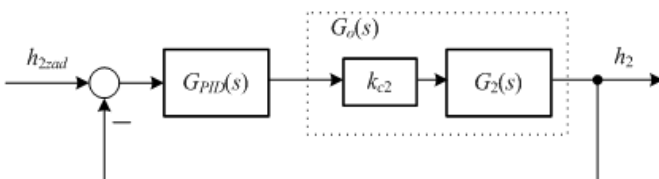
$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})] = 0 \quad (42)$$

Pożądane elementy wektora \mathbf{K} uzyskiwane są poprzez porównanie współczynników równania (39) oraz (42). Prowadzi to do tego, że uzyskany wielomian charakterystyczny będzie identyczny z pożądanym i bieguny układu zamkniętego będą umieszczone w pożądanym położeniach. W wyniku przeprowadzonych obliczeń, metodą lokowania biegunów uzyskane zostały następujące wartości wzmacnień nieoptymalnego regulatora stanu

$$\mathbf{K} = [0.0196 \quad 0.3285 \quad 0.9285] \quad (43)$$

3.4. Synteza regulatora PID

Na rysunku 3 przedstawiony został schemat blokowy układu regulacji zastosowany do sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku z użyciem regulatora PID. Uproszczony model matematyczny układu sterowania zastosowany do wyznaczenia wartości parametrów regulatora PID przedstawiony został na rysunku 4.



Rys. 4. Schemat blokowy uproszczonego modelu matematycznego układu sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku z regulatorem PID

Transmitancja wypadkowa obiektu pokazanego na rysunku 4 jest następująca

$$G_o(s) = k_{c2}G_2(s) = \frac{k_{c2}kT_2}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} = \frac{k_{c2}ka}{(s + a)(s + b)} \quad (44)$$

gdzie $k_{c2} = 0.1417$ jest wzmacnieniem czujnika pomiarowego w punkcie pracy, zamontowanego w dolnym zbiorniku.

Do sterowania poziomem w dolnym zbiorniku zastosowany został regulator PID o transmitancji

$$G_{PID}(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) \quad (45)$$

Transmitancja wypadkowa układu pokazanego na rysunku 4

$$T(s) = \frac{k_{c2}kaK_P \left(s^2T_D + s + \frac{1}{T_I} \right)}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (46)$$

gdzie współczynniki mianownika transmitancji wypadkowej opisanej wzorem (46)

$$a_2 = a + b + ak_{c2}kK_P T_D \quad (47)$$

$$a_1 = ab + ak_{c2}kK_P \quad (48)$$

$$a_0 = \frac{ak_{c2}kK_P}{T_I} \quad (49)$$

Z porównania współczynników mianowników transmitancji opisanej wzorem (10) i transmitancji wypadkowej projektowanego układu (46), uzyskuje się następujące zależności, pozwalające na wyznaczenie wartości parametrów regulatora PID (45)

$$K_P = \frac{(1 + 2\alpha\zeta)\omega_n^2 - ab}{ak_{c2}k} = 9.1545 \quad (50)$$

$$T_I = \frac{ak_{c2}kK_P}{\alpha\omega_n^3} = \frac{(1 + 2\alpha\zeta)\omega_n^2 - ab}{\alpha\omega_n^3} = 66.0828 \text{ [s]} \quad (51)$$

$$T_D = \frac{\omega_n(\alpha + 2\zeta) - a - b}{(1 + 2\alpha\zeta)\omega_n^2 - ab} = 18.6218 \text{ [s]} \quad (52)$$

Zaprojektowany regulator PID (45) jest regulatorem ciągłym. W celu zaimplementowania go w cyfrowym procesorze sygnałowym, dokonano jego dyskretyzacji poprzez przejście z opisem z płaszczyzny s na płaszczyznę z . Aproksymację części całkującej i różniczkującej zrealizowano przy użyciu następujących zależności

$$\frac{1}{s} \approx \frac{1}{\frac{2}{T_p} \frac{z-1}{z+1}} \quad (53)$$

$$s \approx \frac{1}{T_p} \frac{z-1}{z} \quad (54)$$

Wynikiem powyższych operacji było uzyskanie transmitancji regulatora PID zapisanej w postaci dyskretnej.

Przedstawia się ona następująco

$$G_{PID}(z) = K_P \left(1 + \frac{1}{\frac{2}{z-1} \frac{1}{T_I} + \frac{1}{T_p} \frac{z-1}{z}} T_D \right) \quad (55)$$

$$= \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

gdzie

$$q_0 = K_P \left(1 + \frac{T_p}{2T_I} + \frac{T_D}{T_p} \right) \quad (56)$$

$$q_1 = -K_P \left(1 - \frac{T_p}{2T_I} + 2 \frac{T_D}{T_p} \right) \quad (57)$$

$$q_2 = K_P \frac{T_D}{T_p} \quad (58)$$

Algorytm sterowania dyskretnego PID zapisany został w postaci rekurencyjnej oraz zaimplementowany w cyfrowym procesorze sygnałowym.

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \quad (59)$$

4. WYNIKI BADAŃ ZAPROJEKTOWANYCH UKŁADÓW STEROWANIA

W celu dokonania porównania jakości pracy zaprojektowanych regulatorów stanu i regulatora PID, przeprowadzone zostały badania symulacyjne w środowisku obliczeniowym MATLAB/Simulink, które następnie zostały zweryfikowane na obiekcie rzeczywistym w układzie kaskadowych dwóch zbiorników. Badania symulacyjne

miały przede wszystkim za zadanie przygotowanie kodów źródłowych programów zapisanych w języku programowania C, opisujących zaprojektowane algorytmy sterowania, które następnie były implementowane w procesorze sygnałowym.

Dyskretyzacja zaprojektowanych algorytmów ciągłych na postać dyskretną przeprowadzona została z okresem próbkowania wynoszącym $T = 0.5$ [s].

Sygnaly pomierzone przez czujniki poziomu wymagały filtracji w celu wyeliminowania z nich szumów pomiarowych. W każdym torze pomiarowym zastosowany został filtr dolnoprzepustowy opisany transmitancją

$$G_f(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (59)$$

który został zapisany w postaci zestawu równań dynamicznych

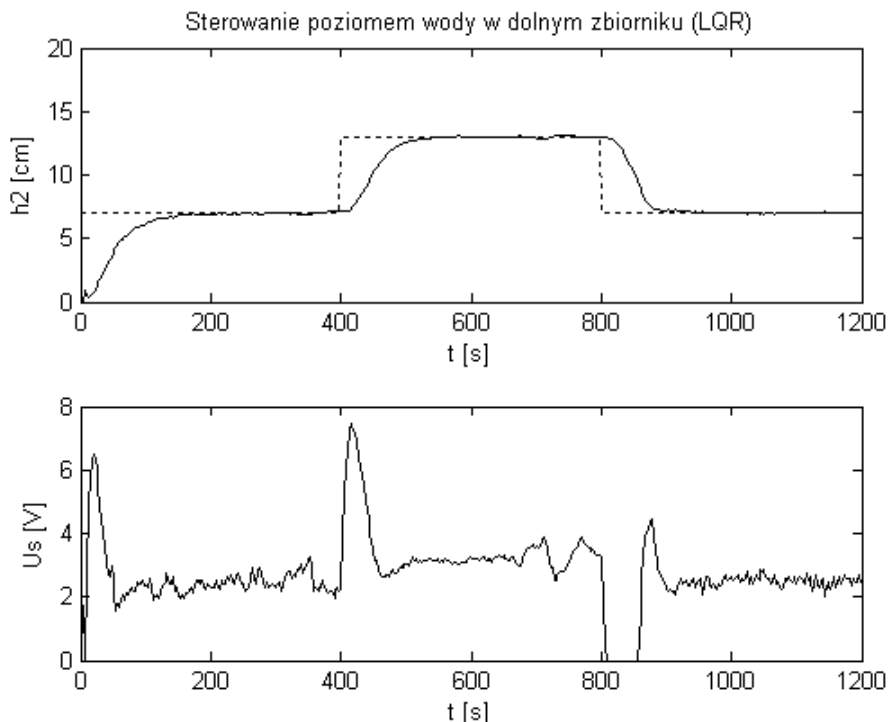
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1f}(t) \\ \dot{x}_{2f}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1f}(t) \\ x_{2f}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u_f(t) \quad (60)$$

$$y_f(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1f}(t) \\ x_{2f}(t) \end{bmatrix} \quad (61)$$

Filtr ten całkowany był w procesorze sygnałowym metodą Rungego-Kutty IV rzędu z krokiem całkowania $T = 0.01$ [s].

Parametry nieoptymalnego regulatora stanu \mathbf{K} wyznaczone metodami: Ackermanna (40) i lokowania biegunów (43) mają identyczne wartości i regulator z tymi wartościami nazwany tutaj regulatorem stanu.

Dla każdego z rozważanych układów regulacji przeprowadzona została próba składająca się z trzech odcinków stabilizacji poziomu wody w dolnym zbiorniku, każdy o czasie trwania 400 s. W chwili załączenia układów regulacji, obydwa zbiorniki były puste. Na odcinku pierwszym zadany poziom wody wynosił 7 cm, na drugim



Rys. 5. Wyniki sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku z użyciem optymalnego regulatora stanu LQR

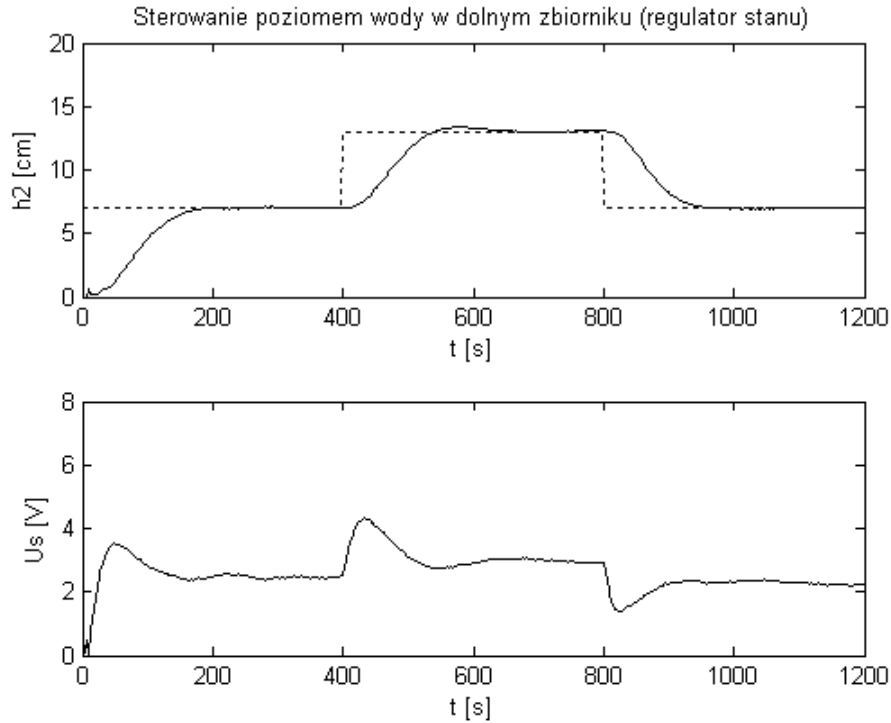
13 cm i na ostatnim, trzecim odcinku ponownie 7 cm.

Ocena jakości pracy rozważanych układów regulacji polegała na ocenie wskaźników jakości definiowanych na podstawie odpowiedzi skokowej i były to: maksymalne przeregulowanie M_p , czas regulacji t_R mierzony przy strefie dokładności $\Delta = 5\%$. Dodatkowo na każdym odcinku stabilizacji poziomu, na podstawie pomierzonych wartości poziomu i sygnału sterującego wyznaczany był funkcjonal

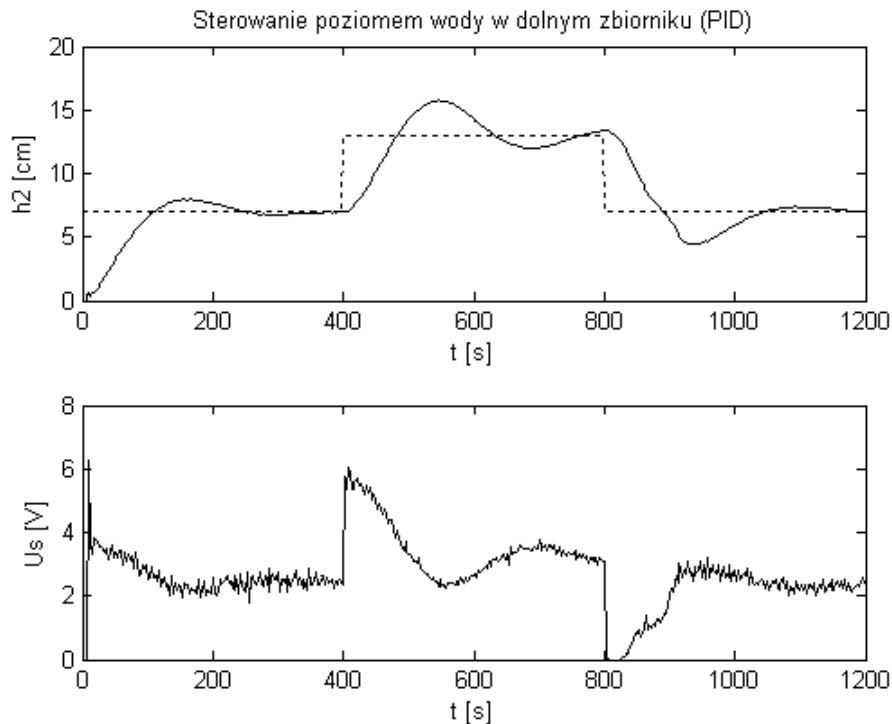
$$J = \sum_{k=1}^N e^2(k) + u^2(k) \quad (62)$$

gdzie: $e(k) = h_{2zad}(k) - h_2(k)$ – uchyb regulacji, $u(k)$ – sygnał sterujący pompą, wyjście w regulatora

Pomiar odbywał się z okresem próbkowania wynoszącym 2,5 s co dawało $N = 160$ pomierzonych próbek w każdym



Rys. 6. Wyniki sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku z użyciem nieoptymalnego regulatora stanu



Rys. 7. Wyniki sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku z użyciem regulatora PID

Tabela 1. Wskaźniki oceny jakości sterowania uzyskane z wykresów czasowych pokazanych na rysunkach 5 – 7

Typ regulatora	Odcinek 1 (0 s – 400 s)			Odcinek 2 (400 s – 800 s)			Odcinek 3 (800 s – 1200 s)			J_c [-]
	M_p	t_R	J	M_p	t_R	J	M_p	t_R	J	
	[%]	[s]	[-]	[%]	[s]	[-]	[%]	[s]	[-]	
LQR	2,48	137,5	1896,6	3,07	112,5	2663,7	1,06	85,0	1539,1	6099,4
Stanu	1,48	160,0	2344,4	5,90	200,0	2445,7	1,09	132,5	1579,6	6369,6
PID	14,12	222,5	1939,4	46,16	-	2860,5	42,90	345,0	1594,7	6394,6

odcinku stabilizacji. Dodatkowo, dla każdej próby wyznaczony został funkcjonal całkowity J_c . Próba sterowania, pomierzona na stanowisku badawczym w układzie z regulatorem optymalnym LQR pokazana została na rysunku 5, z nieoptymalnym regulatorem stanu na rysunku 6, natomiast próba z regulatorem PID na rysunku 7. Wskaźniki jakości, wyznaczone na podstawie tych prób znajdują się w tabeli 1.

7. WNIOSKI KOŃCOWE

W niniejszej pracy zaprojektowane i przebadane zostały dwa regulatory stanu: optymalny LQR i nieoptymalny, które wymagały pomiaru poziomu w obydwu zbiornikach oraz regulator PID korzystający z pomiaru poziomu jedynie w dolnym zbiorniku. Dokonana ocena jakości pozwala stwierdzić, że najslabsze wyniki uzyskane zostały przy zastosowaniu regulatora PID, gdzie występują największe przeregulowania i najdłuższe czasy regulacji na każdym rozważanym odcinku stabilizacji poziomu zadanego. Zdecydowanie mniejsze wartości maksymalnego przeregulowania uzyskane zostały w układach sterowania w których zastosowane zostały regulatory stanu: optymalny LQR i nieoptymalny.

Regulator optymalny LQR w porównaniu z nieoptymalnym, nastrojony został na osiągnięcie dużej jakości sterowania, charakteryzującej się małymi wartościami maksymalnego przeregulowania i czasu regulacji, co odbyło się kosztem dużych zmian sygnału sterującego.

Sygnał sterujący wyznaczany przez nieoptymalny regulator stanu charakteryzował się najmniejszą zawartością szumów pomiarowych.

Podsumowując, w układzie kaskadowym dwóch zbiorników lepszą jakość sterowania uzyskuje się wykorzystując regulatory posiadające informacje o poziomach wody w obydwu zbiornikach.

8. BIBLIOGRAFIA

- Franklin G. F., Powell J. D., Emami-Naeini A.: Feedback control of dynamic systems, 5th ed., Pearson Prentice Hall, 2006, ISBN 0-13-149930-0.
- Kęska J.: Sterowanie obiektem rzeczywistym przy użyciu cyfrowego procesora sygnałowego, Praca inżynierska, Akademia Morska, Gdynia 2010.
- Talaśka M.: Sterowanie optymalne w układzie kaskadowym dwóch zbiorników, Praca magisterska, Akademia Morska, Gdynia 2011.
- Tomera M., Kaczmarczyk M.: Komputerowy układ sterowania poziomem wody w kaskadzie dwóch zbiorników, Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej, Nr 28, s. 135-138, 2010, ISSN 1425-5766.
- Tomera M., Kęska J., Kasprowicz A.: Sterowanie poziomem wody w kaskadzie dwóch zbiorników przy użyciu mikrokontrolera TMS320F28335, Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej, Nr 30, s. 123-132, 2011, ISSN 1425-5766.

COMPARISON PERFORMANCE BETWEEN STATE CONTROLLERS AND PID IN A DOUBLE TANK CASCADE SYSTEM

Key-words: integral control, optimal control LQR, PID control

The paper presents the comparative analysis made between the two state regulators and PID controller, based on an assessment of response time water level control in a cascade of two tanks. Object control system is nonlinear and consists of a pump, the two tanks connected in cascade, and sensors for measuring the water level in the tanks. Details of which have been analyzed controller design method. The first controller is the state of optimal LQR controller for which analytical formulas are derived to calculate the optimal values of gains, while the next is designed by Ackerman and pole placement method. The PID controller was designed also by pole placement method. Simulation study was carried out using the computational environment MATLAB/Simulink. Target tests were performed in a real time system, where the control algorithms set by the emulation method was programmed in digital signal processor TMS320F28335 deployed to automatically control the water level in the bottom tank.