

PORÓWNANIE METOD ESTYMACJI ZMIENNYCH STANU W UKŁADZIE KASKADOWYM DWÓCH ZBIORNIKÓW

Mirosław TOMERA¹, Karol POZORSKI²

1. Akademia Morska w Gdyni, Wydział Elektryczny, ul. Morska 83, 81-225 Gdynia
tel: 058 690 1471 fax: 058 690 1445 e-mail: tomera@am.gdynia.pl
2. Venture Industries Sp. z o.o., ul. Mokra 27, 05-092 Łomianki-Kiełpin
tel: 022 751 9550 fax: 022 751 2259 e-mail: karol.pozorski@venture.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiona została analiza porównawcza dokonana pomiędzy trzema obserwatorami stanu: obserwatorem liniowym Luengergera oraz dwoma filtrami Kalmana: liniowym i rozszerzonym (EKF – Extended Kalman Filter) opierająca się ocenie dokładności estymacji zmiennych stanu. Analizowany obiekt w którym estymowane są zmienne stanu, składa się z dwóch zbiorników zawieszonych kaskadowo. Rozpatrzony został przypadek w którym pomiar poziomu wody odbywa się tylko w dolnym zbiorniku, natomiast informacja o poziomie wody w górnym zbiorniku uzyskiwana jest w wyniku estymacji.

Analizowane obserwatory wykorzystane zostały w układzie sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku przy użyciu regulatora stanu, który wymaga znajomości poziomu wody w obydwu zbiornikach. Dodatkowo dokonano porównania jakości sterowania układów regulacji z wykorzystaniem regulatora stanu w konfiguracji z wyżej wymienionymi obserwatorami oraz z użyciem regulatora PID, który wykorzystuje tylko pomiar poziomu wody w dolnym zbiorniku i nie potrzebuje obserwatora.

Wstępnie przeprowadzone zostały badania symulacyjne z wykorzystaniem środowiska obliczeniowego MATLAB/Simulink. Badania docelowe wykonane zostały w układzie rzeczywistym, gdzie zaprojektowane obserwatory wraz z regulatorami zaprogramowane zostały w mikrokontrolerze sygnałowym TMS320F28335, wykorzystanym do automatycznego sterowania poziomem wody w zbiorniku dolnym.

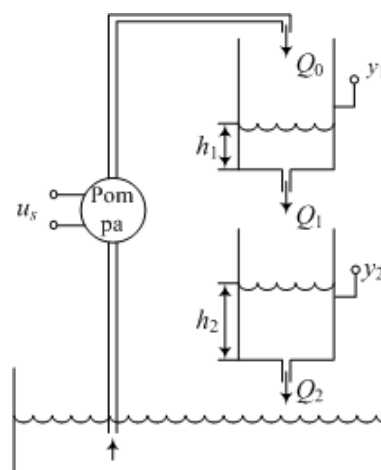
Słowa kluczowe: obserwatory, regulator stanu, regulator PID

1. WPROWADZENIE

Pojęcie obserwatorów często utożsamiane jest tzw. estymatorami, czyli układami śledzącymi zmienność stanu procesów dynamicznych na podstawie wiedzy o aktualnym stanie wejść i wyjść. Model matematyczny, służący do właściwego odwzorowania zachowań procesu jest podstawą działania obserwatora [1].

Rozważone zostały trzy obserwatory: liniowy obserwator Luenbergera oraz dwa obserwatory wykorzystujące filtr Kalmana: liniowy i rozszerzony. Ze względu na docelową implementację obserwatorów w cyfrowym procesorze sygnałowym przyjęto od początku rozważania w dziedzinie czasu dyskretnego.

W niniejszej pracy przedstawione obserwatory zostały wykorzystane do estymacji poziomów wody w układzie



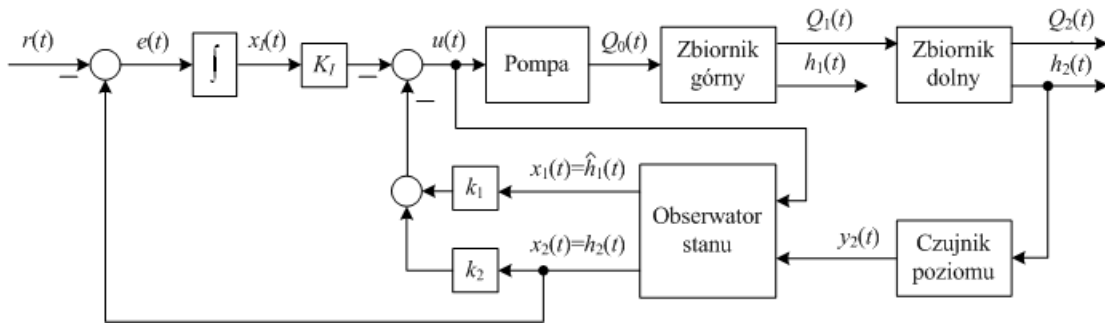
Rys. 1. Struktura układu kaskadowego dwóch zbiorników

kaskadowym dwóch zbiorników, schematycznie pokazanym na rysunku 1. Rozpatrzony został przypadek estymacji poziomu w zbiorniku górnym i dodatkowo zaprojektowane obserwatory wykorzystane zostały w układzie regulacji z regulatorem stanu do sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku.

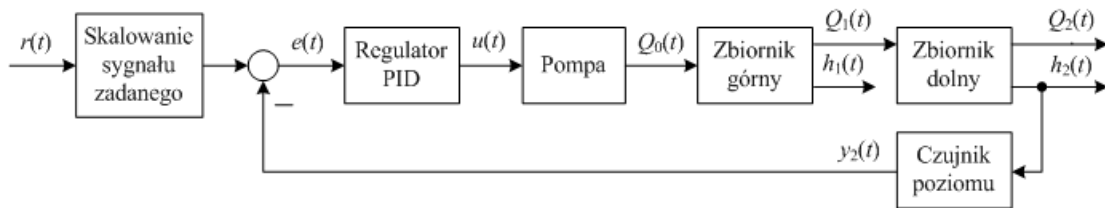
W praktyce, najczęściej stosowanym regulatorem w układach sterowania automatycznego jest regulator PID. Regulator ten również został wykorzystany do sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku i nie wymaga stosowania obserwatora, wystarczy tylko pomiar poziomu wody w dolnym zbiorniku.

W ten sposób zostały uzyskane dwa typy układów sterowania, obydwa wykorzystujące pomiar poziomu wody w dolnym zbiorniku. Pierwszy typ uzyskanego układu sterowania wykorzystujący zmienne stanu, pokazany został na rysunku 2, natomiast drugi typ układu sterowania z regulatorem PID na rysunku 3. Zaprojektowane obserwatory wraz z regulatorami zaprogramowane zostały w mikrokontrolerze sygnałowym TMS320F28335

W układzie sterowania z rysunku 2, regulator stanu wraz z obserwatorami projektowane były metodą bezpośrednią w dziedzinie czasu dyskretnego z okresem próbkowania $T = 1$ [s], natomiast regulator PID pracujący



Rys. 2. Struktura projektowanego układu sterowania z obserwatorem i regulatorem stanu



Rys. 3. Struktura projektowanego układu sterowania z regulatorem PID

w układzie z rysunku 3, zaprojektowany został metodą emulacji. Metoda emulacji polega na tym, że projektowanie przeprowadzane jest w dziedzinie czasu ciągłego i następnie uzyskany algorytm sterowania konwertowany jest w dziedzinę czasu dyskretnego, w tym przypadku również z okresem próbkowania $T = 1$ [s].

Szczegóły związane z projektowaniem regulatorów zastosowanych w układach sterowania pokazanych na rysunkach 2 i 3 nie zostaną tutaj przedstawione. Opis syntezy regulatora PID zastosowanego do sterowania poziomem w dolnym zbiorniku można znaleźć w pracy [2], natomiast regulatora stanu zastosowanego w układzie sterowania z rysunku 2 znajduje się w pracy [3].

2. MODEL MATEMATYCZNY OBIEKTU STEROWANIA

Szczegółowy sposób wyznaczenia modelu matematycznego, rozważanego tutaj układu kaskadowego dwóch zbiorników można znaleźć w pracy [3]. Tutaj przedstawione zostaną najważniejsze równania, niezbędne przy projektowaniu regulatorów i obserwatorów stanu.

Układ kaskadowy dwóch zbiorników opisany jest nieliniowymi równaniami różniczkowymi. Dynamika zmian poziomu wody w zbiornikach: górnym i dolnym opisana jest następującymi wzorami

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = -\alpha_1 \sqrt{2gh_1(t)} + \beta \sqrt{u(t) - U_{\min}} \quad (1)$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \alpha_1 \sqrt{2gh_1(t)} - \alpha_2 \sqrt{2gh_2(t)} \quad (2)$$

gdzie: $\alpha_1 = 0.00206$, $\alpha_2 = 0.00218$, $\beta = 0.37037$ – współczynniki, $g = 981$ [cm/s] – przyspieszenie ziemskie, $U_{\min} = 2$ [V] – próg minimalny zadziałania pompy, h_1 – poziom wody w górnym zbiorniku, h_2 – poziom wody w dolnym zbiorniku, u – sygnał sterujący pompą, wyjście w regulatora.

Charakterystyka czujnika pomiaru poziomu wody w dolnym zbiorniku aproksymowana jest wzorem

$$y_2 = k_{c2} h_2 + b_2 \quad (3)$$

gdzie $k_{c2} = 0.0583$ – wzmacnienie, $b_2 = 0.8666$ – współczynnik przesunięcia.

Projektowanie obserwatorów wymagało liniowego modelu matematycznego obiektu i w tym celu dokonana została linearyzacja modelu opisanego wzorami (1), (2) i (3) w otoczeniu następującego punktu pracy

$$(u^0, h_1^0, h_2^0, y_2^0) = (3.06; 11.3; 10.0; 1.42) \quad (4)$$

Pozwoliło to wyznaczyć ciągły model liniowy opisanymi następującymi równaniami stanu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 \\ \frac{1}{T_1} & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (5)$$

gdzie: $x_1(t) = h_1(t)$, $x_2(t) = h_2(t)$ – zmienne stanu, $u(t)$ – sygnał sterujący, $T_1 = 73.5663$ [s], $T_2 = 73.5663$ [s] – stałe czasowe, $k = 0.1679$ – wzmacnienie.

i równaniem wyjścia

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0.142 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

gdzie: $y(t)$ – sygnał powierzony, wyjście z czujnika.

Aby obserwatory stanu na swoich wyjściach wyznaczały wysokości poziomów wody wyrażone w centymetrach to pomierzony sygnał wejściowy z czujnika wyrażony w woltach, na wejściu obserwatorów został przeskalowany przez odwrotną charakterystykę czujnika

$$h_{2zm} = k_{o2} y_2 + b_{o2} \quad (7)$$

gdzie $k_{o2} = 17.1527$, $b_{o2} = -14.8645$.

Charakterystyka ta umieszczona na wejściu obserwatora stanu znosi charakterystykę czujnika i powoduje, że zmianie ulega równanie wyjścia (6) i po tej korekcie przyjmuje postać

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Obserwatory stanu, docelowo będą implementowane w cyfrowym procesorze sygnałowym, dlatego też projektowane ich przeprowadzone zostało w przestrzeni czasu dyskretnego. W tym celu uzyskany ciągle model liniowy opisany wzorami (5) i (8) został przekonwertowany do postaci dyskretniej z okresem próbkowania $T = 1$ [s].

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{G} \cdot u(k) \quad (9)$$

$$y(k) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}(k) \quad (10)$$

gdzie \mathbf{F} – dyskretna macierz stanu, \mathbf{G} – dyskretna macierz wejścia, \mathbf{H} – dyskretna macierz wyjścia.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.9865 & 0.0 \\ 0.0134 & 0.9849 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.1787 \\ 0.0012 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Szczegóły dotyczące konwersji równań dynamicznych ciągłych do postaci dyskretniej można znaleźć w pracy [3].

3. OBSERWATORY STANU

Regulator stanu, zastosowany w układzie sterowania pokazanym na rysunku 2 wymaga znajomości wszystkich zmiennych stanu, w tym przypadku są to poziomy wody w zbiornikach górnym i dolnym. W układzie tym mierzony jest poziom tylko w zbiorniku dolnym i brakujący poziom wody w górnym zbiorniku musi być rekonstruowany na podstawie znajomości modelu matematycznego obiektu przez obserwator stanu.

3.1. Obserwator liniowy Luenbergera

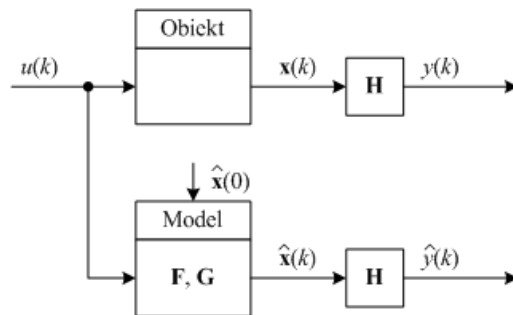
Pierwszy z projektowanych obserwatorów wykorzystuje liniowy model matematyczny obiektu opisany równaniami (9), (10) i równanie estymacji wektora stanu przyjmuje postać

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{G}u(k) \quad (13)$$

gdzie $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2]^T = [\hat{h}_1 \quad \hat{h}_2]^T$ – estymowany wektor zmiennych stanu.

Znając macierze \mathbf{F} , \mathbf{G} oraz wejście $u(k)$ można zbudować obserwator, który będzie poprawnie pracował jeśli otrzyma warunki początkowe $\hat{\mathbf{x}}$, równe wartościom początkowym obiektu. Na rysunku 4 przedstawiony został obserwator pracujący w pętli otwartej.

Jeśli obserwator pracuje w pętli otwartej i nie wykorzystuje żadnych pomiarów o zachowaniu obiektu to można się spodziewać, że estymowany wektor zmiennych stanu będzie się różnił od wartości poprawnych. Jeśli natomiast do obserwatora wprowadzona zostanie różnica pomiędzy wyjściami: pomierzonymi i estymowanymi oraz będzie ciągle korygować model tym sygnałem błędem to



Rys. 4. Obserwator liniowy pracujący w pętli otwartej

wówczas rozbieżność powinna zostać zminimalizowana. Idea ta służy do skonstruowania układu ze sprzężeniem wokół obserwatora pracującego w otwartej pętli z estymowanym błędem wyjściowym jako sprzężeniem. Schemat ten pokazany został na rysunku 5, równanie dla tego układu ma postać [1]

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{G}u(k) + \mathbf{L}[y(k) - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(k)] \quad (14)$$

gdzie $\mathbf{L} = [l_1 \quad l_2]^T$ jest wektorem wzmocnień sprzężenia obserwatora.

Po przekształceniu równania (14)

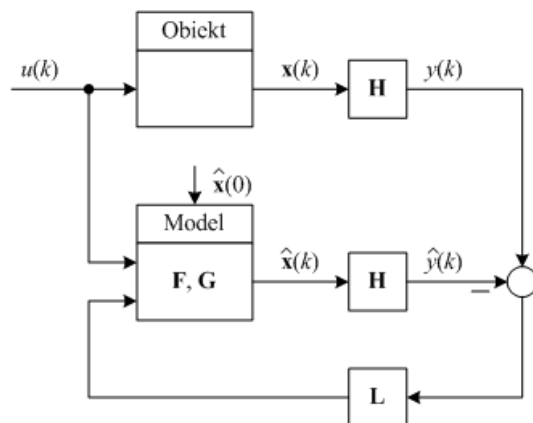
$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H}] \cdot \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{G}u(k) + \mathbf{L}y(k) \quad (15)$$

wyznaczona zostaje macierz stanu obserwatora $[\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H}]$. Jeśli układ ten będzie asymptotycznie stabilny to wówczas błąd estymacji obserwatora będzie zanikał do zera.

Macierz wzmocnień \mathbf{L} obserwatora liniowego składa się z dwóch elementów i wyznaczana jest w taki sposób aby wartości własne macierzy $[\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H}]$ pokrywały się z pożądanymi położeniami β_1, β_2 na płaszczyźnie z celem uzyskania pożądanego równania charakterystycznego estymatora

$$\alpha_e(z) = (z - \beta_1)(z - \beta_2) = z^2 + \alpha_{e1}z + \alpha_{e2} = 0 \quad (16)$$

Pożądane położenia biegunów obserwatora wyrażają jego dynamikę i określają jak szybko wektor stanu obserwatora zbiega się z wektorem stanu obiektu. W projektowanym obserwatorze liniowym Luenbergera przyjęto, że bieguny będą miały odpowiedź impulsową cztery razy szybszą od zanikania odpowiedzi impulsowej biegunów regulatora stanu.



Rys. 5. Obserwator liniowy pracujący w pętli zamkniętej

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (17)$$

gdzie $\zeta = 0.6$, $\omega_n = 0.14$.

Bieguny te zostały przekonwertowane na płaszczyznę z przy użyciu przekształcenia

$$\beta_i = e^{-s_i T}, \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

gdzie $T = 1$ [s] – okres próbkowania.

Wyznaczenie macierzy \mathbf{L} można to uzyskać dwoma metodami: lokowania biegunów i Ackermana. Poniżej przedstawione zostały obydwie te metody.

Metoda lokowania biegunów

Postać równania charakterystycznego uzyskiwana z opisu macierzowego obserwatora (13) jest następująca

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{LH}| = 0 \quad (19)$$

Równania (16) oraz (19) muszą być identyczne. Dlatego też współczynniki każdej potęgi zmiennej z muszą być takie same, uzyska się w ten sposób w rozważanym przypadku dwa równania z dwoma nieznanymi elementami wektora wzmocnień \mathbf{L} .

W wyniku przeprowadzonych obliczeń, metodą lokowania biegunów uzyskane zostały następujące wartości wzmocnień regulatora stanu

$$\mathbf{L} = [1.5489 \quad 0.1693]^T \quad (20)$$

Metoda Ackermana

Inną metodą wyznaczania wzmocnień \mathbf{L} dla obserwatora liniowego jest metoda Ackermana, która opiera się na następującym wzorze

$$\mathbf{L} = \alpha_e(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{O}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

gdzie $\alpha_e(\mathbf{F})$ jest macierzą zdefiniowaną następująco

$$\alpha_e(\mathbf{F}) = \mathbf{F}^2 + \alpha_{e1}\mathbf{F} + \alpha_{e2}\mathbf{I} \quad (22)$$

α_{ei} – są pożądanymi współczynnikami wielomianu charakterystycznego (16), \mathbf{O} jest macierzą obserwowalności składającą się z następujących wierszy

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Warunkiem istnienia rozwiązania jest obserwowalność układu, czyli wyznacznik macierzy obserwowalności \mathbf{O} musi być różny od zera. W wyniku przeprowadzonych tą metodą obliczeń uzyskano identyczne rozwiązanie jak metodą lokowania biegunów

$$\mathbf{L} = [1.5489 \quad 0.1693]^T \quad (24)$$

3.2. Filtr Kalmana

W sposób ogólny można stwierdzić, że filtr Kalmana próbuje wyestymować w sposób optymalny wektor stanu

procesu sterowanego, modelowanego przez liniowe, stochastyczne równanie różnicowe. W tym celu równanie (9) zostanie zapisane jako

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}u(k) + \mathbf{E}w(k) \quad (25)$$

Obserwacje (pomiar) procesu dokonywane są w dyskretnych chwilach czasowych i opisane są przez równanie (10) rozszerzone do postaci

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + v(k) \quad (26)$$

gdzie $w(k)$ są zakłóceniami przypadkowymi wpływającymi na proces, $v(k)$ – błędy pomiarowe.

Zakłada się, że sygnały $w(k)$ oraz $v(k)$ są o zerowej wartości średniej i nie ma żadnej korelacji pomiędzy tymi sygnałami.

Macierze kowariancji dla sygnałów stochastycznych $w(k)$ i $v(k)$ opisane są następująco

$$E\{w(k)w(i)\} = \begin{cases} Q & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (27)$$

$$E\{v(k)v(i)\} = \begin{cases} R & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (28)$$

$$E\{w(k)v(i)\} = 0 \quad (29)$$

Zakłada się, że znane są wartości początkowe estymat procesu w pewnej chwili czasu $t(k)$ i ta estymata będzie oznaczana jako $\bar{\mathbf{x}}(k)$ gdzie kreska będzie oznaczała, że jest to najlepsza estymata przed pomiarem w chwili $t(k)$. Teraz zdefiniowany zostanie błąd estymacji jako

$$\bar{\mathbf{e}}(k) = \mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k) \quad (30)$$

i powiązana z tą różnicą macierz kowariancji błędu

$$\bar{\mathbf{P}}(k) = E\{\bar{\mathbf{e}}(k)\bar{\mathbf{e}}^T(k)\} = E\{[\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)][\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)]^T\} \quad (31)$$

W chwilach próbkowania $t(k)$, w których dokonywany będzie pomiar y , posiadana estymata $\bar{\mathbf{x}}(k)$ będzie korygowana według następującej zależności [1]

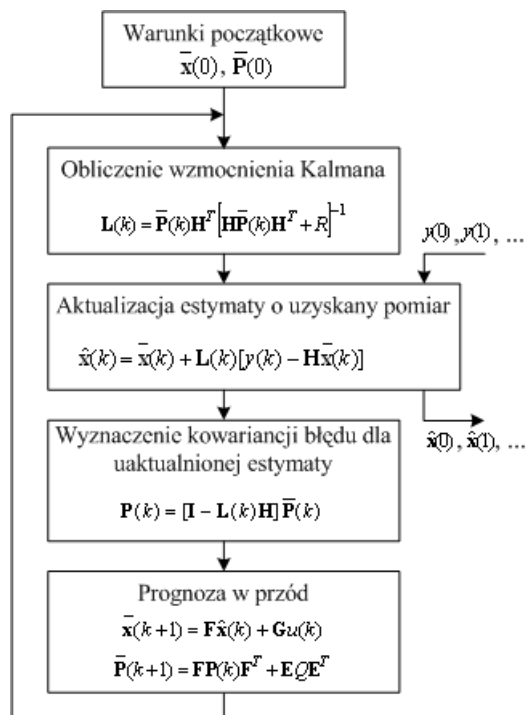
$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{L}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}(k)] \quad (32)$$

gdzie $\hat{\mathbf{x}}(k)$ – estymata zaktualizowana o dokonany pomiar, $\mathbf{L}(k)$ – wzmocnienie skalujące.

Teraz problemem jest znalezienie takich wzmocnień wektora $\mathbf{L}(k)$ które będą aktualizować estymatę w sposób optymalny. W tym celu przeprowadzona zostanie minimalizacja błędu średnio kwadratowego. Zdefiniowana zostanie macierz kowariancji błędu związanego z estymatą zaktualizowaną przez uzyskany pomiar

$$\mathbf{P}(k) = E\{\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^T(k)\} = E\{[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]^T\} \quad (33)$$

Estymaty w czasie pomiędzy chwilami próbkowania



Rys. 6. Algorytm filtru Kalmana

wyznaczane będą z następującego wzoru

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{G}u(k) \quad (34)$$

W pierwszej kolejności wyznaczona zostanie macierz kowariancji $\bar{\mathbf{P}}(k+1)$ w oparciu o wzór (33) po skorygowaniu jej o jedną próbkę do przodu

$$\bar{\mathbf{P}}(k+1) = E\left\{\left[\mathbf{x}(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1)\right] \cdot \left[\mathbf{x}(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1)\right]^T\right\} \quad (35)$$

Po podstawieniu do wzoru (35) zależności (25) i (34) po przekształceniach uzyskuje się

$$\bar{\mathbf{P}}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{P}(k)\mathbf{F}^T + \mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{E}^T \quad (36)$$

Po podstawieniu do wzoru (33) zależności (32) otrzymuje się

$$\mathbf{P}(k) = \bar{\mathbf{P}}(k) - \mathbf{L}(k)\mathbf{H}\bar{\mathbf{P}}(k) - \bar{\mathbf{P}}(k)\mathbf{H}^T\mathbf{L}^T(k) + \mathbf{L}(k)\left[\mathbf{H}\bar{\mathbf{P}}(k)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\right] \cdot \mathbf{L}^T(k) \quad (37)$$

Poszukiwana jest taka wartość wektora wzmocnień $\mathbf{L}(k)$, która zminimalizuje macierz $\mathbf{P}(k)$, będącą sumą błędów średnio-kwadratowych estymat wszystkich elementów wektora stanu. Po zróżniczkowaniu macierzy $\mathbf{P}(k)$ w odniesieniu do macierzy $\mathbf{L}(k)$ i przyrównaniu uzyskanego wyniku do zera uzyskuje się wyrażenie na macierz wzmocnień filtru Kalmana

$$\mathbf{L}(k) = \bar{\mathbf{P}}(k)\mathbf{H}^T\left[\mathbf{H}\bar{\mathbf{P}}(k)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\right]^{-1} \quad (38)$$

Podstawienie uzyskanego wyrażenia (38) do wzoru (37), upraszcza macierz kowariancji błędu estymacji do postaci

$$\mathbf{P}(k) = \bar{\mathbf{P}}(k) - \mathbf{L}(k)\mathbf{H}\bar{\mathbf{P}}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{L}(k)\mathbf{H}] \cdot \bar{\mathbf{P}}(k) \quad (39)$$

Na rysunku 6, w postaci schematu blokowego przedstawiony został rekurencyjny algorytm obliczeniowy, oparty na równaniach (32), (34), (35), (38), (39) powszechnie znany jako filtr Kalmana.

3.3. Rozszerzony filtr Kalmana

Rozszerzony filtr Kalmana (EKF – Extended Kalman Filter) działa w oparciu o zasadę pokazaną na rysunku 6, z tą różnicą, że w bloku oznaczonym jako "Prognoza w przód", zamiast równania (34) wykorzystywany jest nieliniowy model matematyczny obiektu opisany równaniami (1) i (2). Stan $\bar{\mathbf{x}}(k+1)$ wyznaczany jest przez zastosowanie całkowania numerycznego

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k) + T \cdot \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k), u(k)) \quad (40)$$

gdzie

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k), u(k)) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \sqrt{2g\hat{x}_1(k)} + \beta \sqrt{u(k) - U_{\min}} \\ \alpha_1 \sqrt{2g\hat{x}_1(k)} - \alpha_2 \sqrt{2g\hat{x}_2(k)} \end{bmatrix} \quad (41)$$

4. BADANIA UKŁADÓW STEROWANIA I OBSERWATORÓW STANU

W pierwszej kolejności, zaprojektowane układy obserwatorów stanu zostały zaimplementowane w środowisku obliczeniowym MATLAB/Simulink w postaci S-funkcji, zapisanych w kodzie języka C w układzie sterowania pokazanym na rysunku 2. Etap miał za zadanie przygotowanie kodów źródłowych algorytmów, które następnie były implementowane w procesorze sygnałowym. Przebadane zostały cztery układy sterowania, trzy z nich zawierały zaprojektowane obserwatory pracujące w układzie z regulatorem stanu (Rys. 2), natomiast czwarty układ sterowania wykorzystywał sam regulator PID bez obserwatora. Wszystkie te układy sterowania działały w oparciu o poziom wody pomierzony w dolnym zbiorniku. Uzyskane wyniki sterowania pokazane zostały na rysunkach 7 – 10.

Ocena jakości sterowania rozważanych układów regulacji polegała na ocenie wskaźników jakości definiowanych na podstawie odpowiedzi skokowej i były to: maksymalne przeregulowanie M_p , czas regulacji t_R mierzony przy strefie dokładności $\Delta = 5\%$. Dodatkowo na każdym odcinku stabilizacji poziomu, na podstawie pomierzonych wartości poziomu i sygnału sterującego wyznaczany był funkcjonal

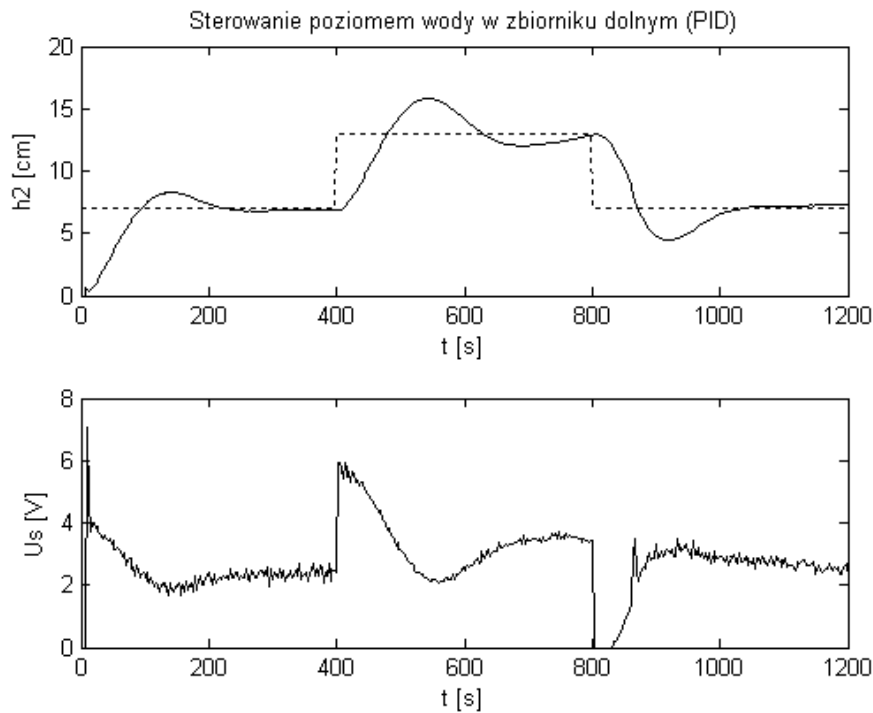
$$J = \sum_{k=0}^N \left[e^2(k) + u^2(k) \right], \quad N = 400/2.5 = 160 \quad (42)$$

gdzie: $e(k) = h_{2\text{zad}}(k) - h_2(k)$ – uchyb regulacji, $u(k)$ – sygnał sterujący pompą, wyjście w regulatora

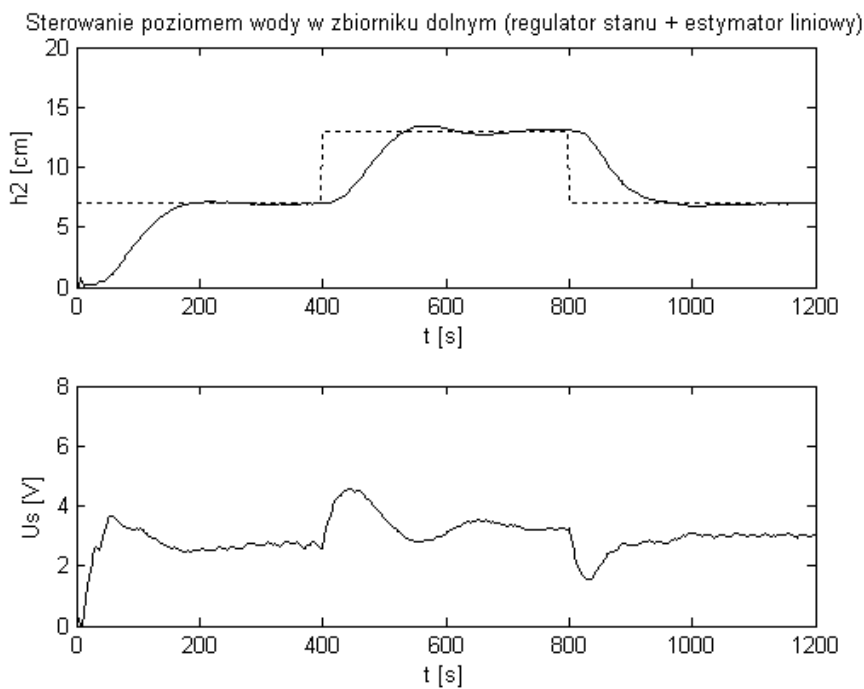
Uzyskane wyniki parametrów oceny jakości sterowania na poszczególnych odcinkach stabilizacji poziomu wody w dolnym zbiorniku, zawarte są w tabeli 1.

W układzie rzeczywistym dodatkowo mierzony był poziom wody w górnym zbiorniku, który posłużył do oceny dokładności estymacji poziomu w zbiorniku górnym.

Sygnały pomierzone przez czujniki poziomu wymagały filtracji w celu wyeliminowania z nich szumów pomiarowych [1, 3].



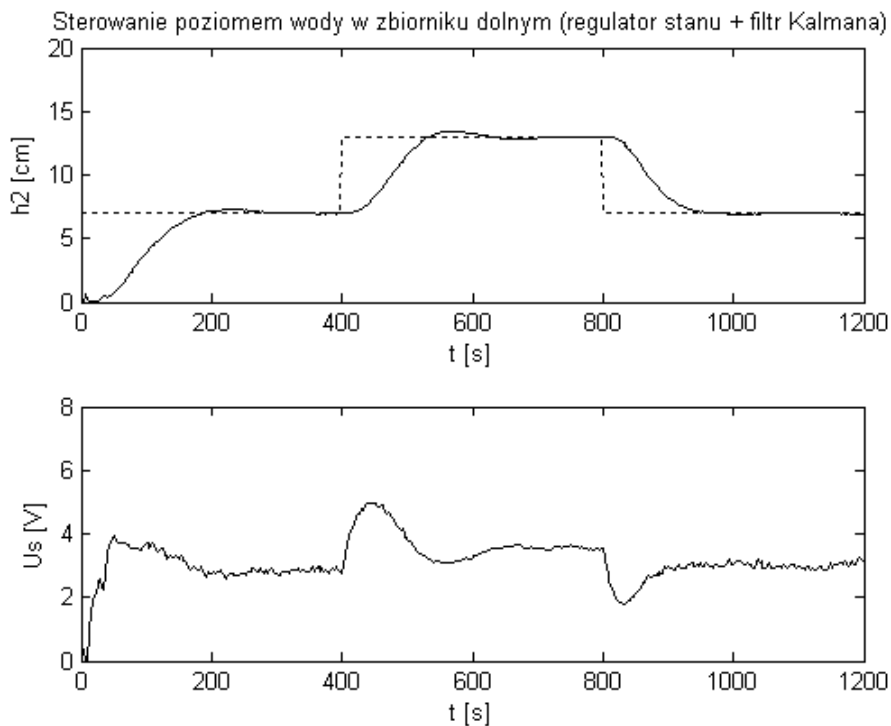
Rys. 7 Wyniki sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku użyciem regulatora PID w układzie z rysunku 3



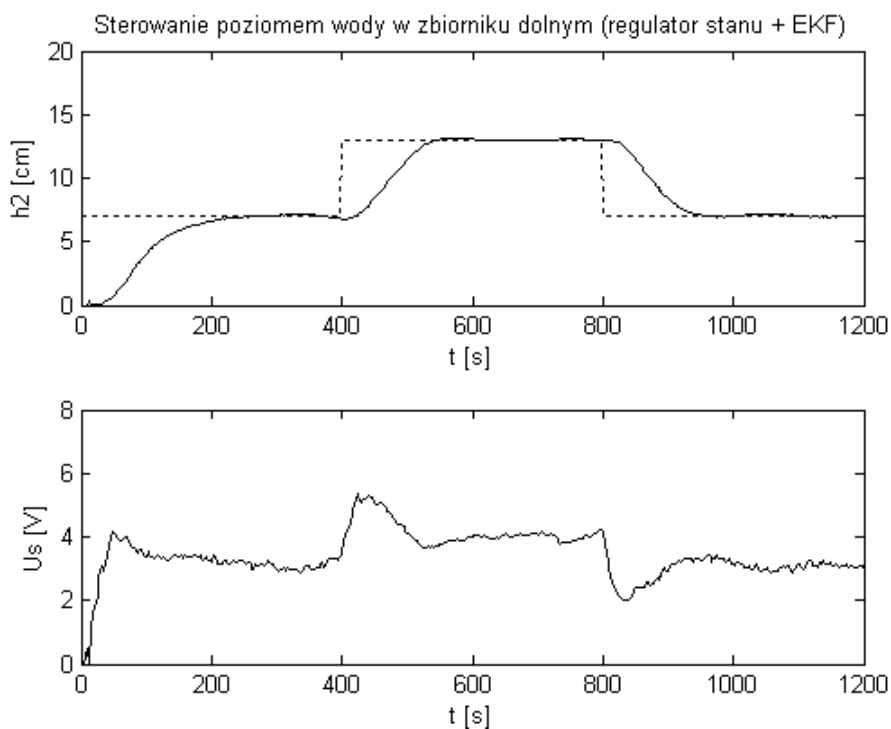
Rys 8. Wyniki sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku z użyciem regulatora stanu i estymatora liniowego Luenbergera

Tabela 1 Wskaźniki oceny jakości sterowania z wykresów czasowych pokazanych na rysunkach 7 - 10

Typ układu		Odcinek 1 (0 s – 400 s)			Odcinek 2 (400 s – 800 s)			Odcinek 3 (800 s – 1200 s)			J_c
		M_p [%]	t_R [s]	J [-]	M_p [%]	t_R [s]	J [-]	M_p [%]	t_R [s]	J [-]	
Regulator PID		18,53	200,0	1806,8	47,02	-	2834,9	42,28	392,5	1845,2	6487,0
Regulator stanu +	estymator liniowy	1,72	162,5	2665,4	7,71	195,0	2781,0	3,79	137,5	2050,3	7496,7
	filtr Kalmana	3,91	170,0	2905,8	7,34	200,0	3104,9	2,25	135,0	2132,9	8143,7
	rozszerzony filtr Kalmana (EKF)	2,35	205,0	3136,4	2,22	132,5	3685,6	1,38	135,0	2286,6	9108,6



Rys. 9. Wyniki sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku z użyciem regulatora stanu i filtrem Kalmana w układzie z rys. 2



Rys. 10. Wyniki sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku z użyciem regulatora stanu i rozszerzonym filtrem Kalmana (EKF)

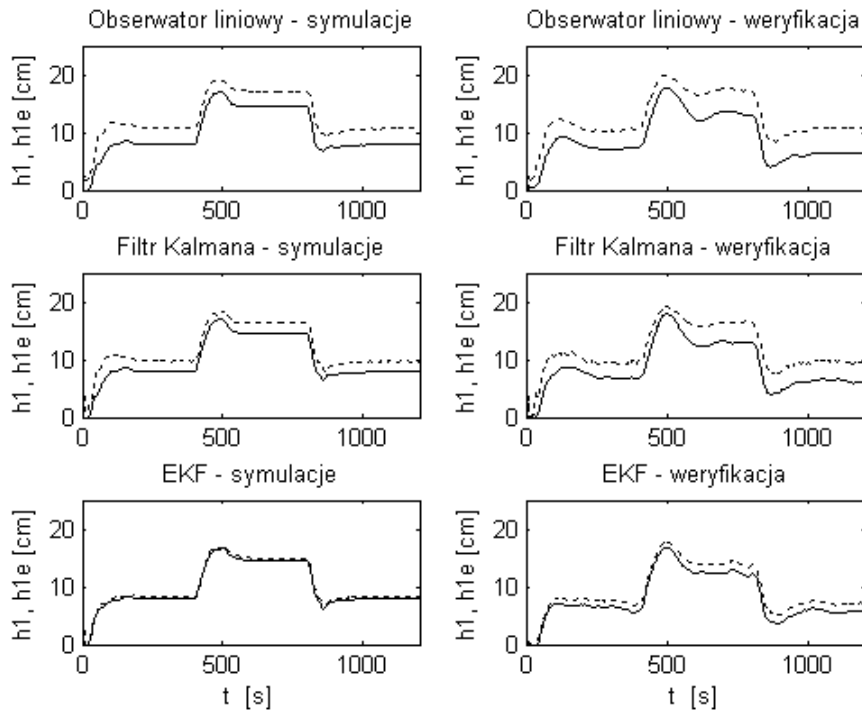
Przebiegi czasowe poziomu wody w górnym zbiorniku: pomierzonego h_{1zm} i estymowanego \hat{h}_1 pokazane zostały na rysunku 11. Ocena dokładności estymacji polegała na wyznaczeniu pierwiastka błędu średniokwadratowego (RMSE - Root Mean Square Error)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^N (h_{1zm} - \hat{h}_1)^2}, \quad N = 1200/2.5 = 480 \quad (43)$$

Tabela 2. Wskaźniki oceny dokładności estymacji poziomu w zbiorniku górnym (RMSE)

	Estymator liniowy	Filtr Kalmana	Rozszerzony filtr Kalmana
	[cm]	[cm]	[cm]
Symulacje	2.83	1.95	0.47
Weryfikacje	3.74	3.02	1.28

Uzyskane wyniki zawarte zostały w tabeli 2.



Rys. 11. Wyniki estymacji poziomu wody w zbiorniku górnym (linia ciągła – poziom pomierzony h_1 , linia przerywana – poziom estymowany h_{1e})

5. WNIOSKI KOŃCOWE

Badania zaprojektowanych obserwatorów stanu przeprowadzone zostały w układzie sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku. Jako obserwatory stanu niemierzonego rozpatrzone zostały trzy układy: obserwator liniowy Luenbergera, filtr Kalmana i rozszerzony filtr Kalmana. Przeprowadzone badania pokazały, że regulator stanu we współpracy z obserwatorami stanu niemierzonego pozwala na uzyskanie zdecydowanie lepszej jakości sterowania (Rys. 8 - 10) niż regulator PID (Rys. 7).

Przedstawione wyniki badań pokazały, że największą dokładność estymacji poziomu wody w górnym zbiorniku uzyskano przy wykorzystaniu rozszerzonego filtra Kalmana (EKF). Największa dokładność estymacji tego obserwatora przełożyła się również na najlepszą jakość sterowania poziomem wody w dolnym zbiorniku.

6. BIBLIOGRAFIA

1. Pozorski K.: Filtracja optymalna sygnałów pomierzonych w układzie kaskadowym dwóch zbiorników, Praca magisterska, Akademia Morska, Gdynia 2011.
2. Tomera M., Kaczmarczyk M.: Komputerowy układ sterowania poziomem wody w kaskadzie dwóch zbiorników, Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej, Nr 28, s. 135-138, 2010, ISSN 1425-5766.
3. Tomera M., Kęska J., Kasprówicz A.: Sterowanie poziomem wody w kaskadzie dwóch zbiorników przy użyciu mikrokontrolera TMS320F28335, Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej, Nr 30, s. 123-132, ISSN 1425-5766.

COMPARISON OF STATE VARIABLE ESTIMATION METHODS IN A DOUBLE TANK CASCADE SYSTEM

Key-words: observers, state controller, PID control

The paper presents the comparative analysis made between the linear observer and two linear Kalman filters: linear and extended Kalman filter (EKF), which is based assessment of the accuracy of estimation of state variables. The analyzed object in the estimated state variables are composed of two cascaded tanks suspended. Was examined in a case in which the measurement of the water level takes place only in the bottom tank, and information about the water level in the top tank is obtained by the estimation.

Observers analyzed were used in the control water level in the lower tank with the control condition, which requires the knowledge of the water level in both tanks. In addition, a comparison of the quality control using the control systems of the controller with the above configuration, observers, and using the PID controller, which uses only the measurement of the water level in the bottom tank, and does not require the observer.

Pre-simulation study was carried out using the computational environment MATLAB/Simulink. The research targets were made in a real time system, where the observers designed with controls are programmed in a digital signal processor TMS320F28335, deployed to automatically control the water level in the bottom tank.