

**XIV Seminarium
ZASTOSOWANIE KOMPUTERÓW W NAUCE I TECHNICE' 2004**
Oddział Gdański PTETiS

**ZAKRES STABILNEJ PRACY SILNIKA INDUKCYJNEGO
Z OBSERWATOREM PRĘDKOŚCI KĄTOWEJ WAŁU
WYZNACZONY ZA POMOCĄ DRUGIEJ METODY LAPUNOWA**

Anna WITKOWSKA

W artykule zamieszczono analizę stabilności układu regulacji silnika indukcyjnego z obserwatorem prędkości kątowej wału w oparciu o drugą metodę Lapunowa. Na podstawie modelu matematycznego układu silnika z obserwatorem wyznaczono funkcję Lapunowa oraz udowodniono warunki jej poprawności. Dokonano analizy lokalnej dla małych prędkości oraz częściowej analizy globalnej rozważanego układu. Wyniki potwierdzono w symulacji komputerowej z zastosowaniem algorytmów napisanych w języku C oraz wykorzystaniem programu MATHCAD.

1. WSTĘP

W ostatnich latach dużo uwagi w świecie naukowym poświęcono problemowi sterowania silnikami indukcyjnymi. Z procesem sterowania maszynami indukcyjnymi wiąże się jednak wiele trudności, które wynikają przede wszystkim z ich nieliniowej dynamiki. Problem dodatkowo się komplikuje, gdy rozpatrujemy silnik indukcyjny zasilany z falownika napięcia z uwzględnieniem obserwatora prędkości kątowej wału [1, 2, 9, 10]. Z matematycznego punktu widzenia określenie poprawnej pracy układu, zakresu stabilności oraz współpracy z innymi podukładami staje się bardzo złożone. Matematyczne metody analizy nieliniowego układu regulacji nie są obecnie do końca udowodnione. W szczególności, nie istnieją bezpośrednie analityczne metody rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych wyższych rzędów. Stosuje się jednak wystarczające metody, aby śledzić zachowanie układu bez konieczności obliczania rozwiązania tego układu. Najbardziej rozpowszechnione są obecnie pierwsza i druga metoda Lapunowa.

Pierwsza metoda Lapunowa, zwana metodą pośrednią, pozwala ocenić stabilność punktu równowagi układu nieliniowego w oparciu o zbadanie stabilności punktu równowagi wersji zlinearyzowanej badanego układu. Druga metoda Lapunowa, zwana metodą bezpośrednią, polega na ocenie stabilności funkcji energetycznej układu, zwanej funkcją Lapunowa bez stosowania bezpośredniego szukania pierwiastków równań charakterystycznych.

W ostatnich latach rozwój techniki komputerowej pozwala na rozpatrywanie coraz to bardziej złożonych struktur układów energoelektronicznych przy zastosowaniu metod Lapunowa. Problem stabilności globalnej układów napędowych jest ze względu na ich dużą złożoność i występujące nieliniowości wciąż tematem aktualnym i wymagającym nadal znacznego nakładu badań naukowych. W artykule zamieszczono analizę stabilności układu

regulacji silnika indukcyjnego z obserwatorem prędkości kątowej wału w oparciu o drugą metodę Lapunowa z zastosowaniem technik komputerowych.

2. MODEL MATEMATYCZNY SILNIKA INDUKCYJNEGO

W artykule przyjęto model matematyczny silnika indukcyjnego w postaci równań różniczkowych dla zmiennych określonych w wirującym układzie współrzędnych kartezjańskich w osiach x i y , związanym z wektorem przestrzennym strumienia wirnika. Zatem można przyjąć, że wektor strumienia wirnika w osi y jest równy zero.

$$\frac{di_{sx}}{dt} = a_1 i_{sx} + a_2 \Psi_{rx} + a_4 u_{sx} + \omega_a i_{sy}, \quad (1)$$

$$\frac{di_{sy}}{dt} = a_1 i_{sy} - a_3 \omega \Psi_{rx} + a_4 u_{sy} - \omega_a i_{sx}, \quad (2)$$

$$\frac{d\Psi_{rx}}{dt} = a_5 \Psi_{rx} + a_6 i_{sx}, \quad (4)$$

$$\frac{d\Psi_{ry}}{dt} = \omega \Psi_{rx} + a_6 i_{sy} - \omega_a \Psi_{rx}, \quad (5)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{L_m}{L_r J} \Psi_{rx} i_{sy} - \frac{1}{J} m_0, \quad (6)$$

gdzie i_s jest wektorem prądu stojana, Ψ_r jest wektorem strumienia skojarzonego z uzwojeniem wirnika, R_s , R_r są rezystancjami uzwojeń stojana i wirnika, J jest momentem bezwładności, ω jest prędkością kątową wirnika względem stojana, m_0 jest momentem obciążenia, indeksy x , y oznaczają składowe wektorów w układzie współrzędnych oraz $\omega_\sigma = \sigma L_r L_s$, gdzie $\sigma = 1 - (L_m^2 / L_s L_r)$ jest współczynnikiem rozproszenia Blondella, natomiast współczynniki $a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7$ są zależne jedynie od parametrów silnika, w następujący sposób:

$$a_1 = -\frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{L_r \omega_\sigma}, \quad (7) \quad a_2 = \frac{R_r L_m}{L_r \omega_\sigma}, \quad (8) \quad a_3 = \frac{L_m}{\omega_\sigma}, \quad (9)$$

$$a_4 = \frac{L_r}{\omega_\sigma}, \quad (10) \quad a_5 = -\frac{R_r}{L_r}, \quad (11) \quad a_6 = R_r \frac{L_m}{L_r}, \quad (12)$$

$$a_7 = \frac{\omega_\sigma}{L_r}. \quad (13)$$

3. OBSERWATOR PRĘDKOŚCI KĄTOWEJ WIRNIKA

Struktura obserwatora prędkości powstała przez zastąpienie w modelu wektorowym silnika iloczynów prędkości kątowej wirnika i składowych wektora strumienia wirnika przez składowe wektora zakłóceń. Szczegółowy opis modelu obserwatora przedstawiono w

[9]. Dla potrzeb analizy przyjęto model obserwatora określony w wirującym układzie odniesienia za pomocą następujących zależności:

$$\frac{d\hat{i}_{sy}}{d\tau} = a_1\hat{i}_{sy} + a_2\hat{\psi}_{ry} - a_3\zeta_x - \omega_a\hat{i}_{sx} + a_4u_{sy} + k_3k_1(i_{sy} - \hat{i}_{sy}), \quad (14)$$

$$\frac{d\hat{i}_{sx}}{d\tau} = a_1\hat{i}_{sx} + a_2\hat{\psi}_{rx} + \omega_a\hat{i}_{sy} + a_4u_{sx} + k_3(k_1(i_{sx} - \hat{i}_{sx}) - \omega_a\zeta_x), \quad (15)$$

$$\frac{d\hat{\psi}_{rx}}{d\tau} = a_6\hat{i}_{sx} + a_5\hat{\psi}_{rx} + \omega_a\hat{\psi}_{ry} - k_2\hat{\omega}\hat{\psi}_{ry}, \quad (16)$$

$$\frac{d\hat{\psi}_{ry}}{d\tau} = a_6\hat{i}_{sy} + \zeta_x - \omega_a\hat{\psi}_{rx} + k_2(\hat{\omega}\hat{\psi}_{rx} - \zeta_x), \quad (17)$$

$$\frac{d\zeta_y}{d\tau} = -k_1(i_{sx} - \hat{i}_{sx}) - \zeta_x\omega_a; \quad \frac{d\zeta_x}{d\tau} = k_1(i_{sy} - \hat{i}_{sy}), \quad (18)$$

$$\hat{\omega} = S \sqrt{\frac{\zeta_x^2}{\hat{\psi}_{ry}^2 + \hat{\psi}_{rx}^2}} + V, \quad (19) \quad V = -S\hat{\psi}_{ry}\zeta_x. \quad (20)$$

gdzie:

$$\zeta_x = \omega\psi_{rx}, \quad \zeta_y = \omega\psi_{ry} = 0 \quad (21)$$

oznaczają składowe wektora zakłóceń, będące iloczynem prędkości kątowej wirnika ω oraz składowej wektora strumienia wirnika odpowiednio w osiach x i y , k_1, k_2, k_3 są współczynnikami wzmocnienia, i_{sx}, i_{sy} są składowymi wektora prądu stojana, $\hat{i}_{sx}, \hat{i}_{sy}, \hat{\psi}_{rx}, \hat{\psi}_{ry}$ są składowymi odwzartanych wektorów prądu stojana i strumienia wirnika, τ - czas względny, S jest znakiem prędkości kątowej wirnika. Wszystkie zmienne i parametry wyrażono w wielkościach względnych.

4. MODEL UKŁADU SILNIKA INDUKCYJNEGO Z OBSERWATOREM PRĘDKOŚCI KĄTOWEJ

W niniejszym rozdziale, dla potrzeb dalszej analizy przyjęto „nowy wektor zmiennych stanu” ($ei_{sx}, ei_{sy}, e\psi_{rx}, e\psi_{ry}, e\omega$), zależny od błędów składowych wektorów prądu stojana, strumienia wirnika odpowiednio w osiach x i y oraz błędu prędkości, określonych z modelu obserwatora i silnika. Wektor ten został wprowadzony jedynie w celu uproszczenia odpowiednich przekształceń i obliczeń, natomiast nie wpływa on na zmianę postaci układu równań opisujących układ.

$$ei_{sx} = i_{sx} - \hat{i}_{sx}, \quad (22) \quad ei_{sy} = i_{sy} - \hat{i}_{sy}, \quad (23) \quad e\omega = \omega - \hat{\omega}, \quad (24)$$

$$e\psi_{rx} = \psi_{rx} - \hat{\psi}_{rx} \quad (25) \quad e\psi_{ry} = \psi_{ry} - \hat{\psi}_{ry} = -\hat{\psi}_{ry}, \quad (26)$$

Na podstawie zależności (1) - (20) wyznaczono równania różniczkowe, opisujące układ silnika indukcyjnego z obserwatorem prędkości kątowej wału z uwzględnieniem nowo przyjętych zmiennych $ei_{sx}, ei_{sy}, e\psi_{rx}, e\psi_{ry}, e\omega$.

$$\frac{dei_{sy}}{d\tau} = a_1 e\psi_{sy} + a_2 e\psi_{ry} - \omega_a ei_{sx} - k_3 k_1 ei_{sy} - a_3 (\omega\psi_{rx} - \zeta_x), \quad (27)$$

$$\frac{dei_{sx}}{d\tau} = a_1 ei_{sx} + a_2 e\psi_{rx} + \omega_a ei_{sy} - k_3 (k_1 ei_{sx} - \hat{\omega}\zeta_x), \quad (28)$$

$$\frac{de\psi_{rx}}{d\tau} = a_6 ei_{sx} + a_5 e\psi_{rx} + \omega_a e\psi_{ry} + k_2 \hat{\omega}\hat{\psi}_{ry}, \quad (29)$$

$$\frac{de\psi_{ry}}{d\tau} = a_6 ei_{sy} + a_5 e\psi_{ry} - \omega_a e\psi_{rx} - k_2 (\hat{\omega}\hat{\psi}_{rx} - \zeta_x) + (\omega\psi_{rx} - \zeta_x), \quad (30)$$

$$\frac{de\omega}{d\tau} = -\frac{d\hat{\omega}}{d\tau}, \quad (31)$$

$$\hat{\omega} = S \sqrt{\frac{\zeta_x^2}{\hat{\psi}_{ry}^2 + \hat{\psi}_{rx}^2}} + V, \quad (32) \quad V = -S\hat{\psi}_{ry}\zeta_x. \quad (33)$$

5. KONSTRUKCJA FUNKCJI LAGUNOWA

Na podstawie modelu silnika indukcyjnego i obserwatora prędkości kątowej wału, opisanego za pomocą równań (27) - (33), wyznaczono funkcję Lapunowa $V : R^n \rightarrow R_+$ w postaci:

$$V(ei_{sx}, ei_{sy}, e\psi_{rx}, e\psi_{ry}, e\omega) = \frac{1}{2} (ei_{sx}^2 + ei_{sy}^2 + e\psi_{rx}^2 + e\psi_{ry}^2 + e\omega^2), \quad (34)$$

oraz pochodną tej funkcji, opisaną wzorem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} V = & (a_1 - k_3 k_1)(ei_{sx}^2 + ei_{sy}^2) + a_5 (e\psi_{rx}^2 + e\psi_{ry}^2) + (a_2 + a_6)(e\psi_{rx} ei_{sx} + e\psi_{ry} ei_{sy}) + \\ & k_3 \omega (ei_{sx} \zeta_x + ei_{sy} \zeta_y) + (\omega\psi_{rx} - \zeta_x) e\psi_{ry} - (\omega\psi_{ry} - \zeta_y) e\psi_{rx} + a_3 (\omega\psi_{ry} - \zeta_y) ei_{sx} + \\ & - a_3 (\omega\psi_{rx} - \zeta_x) ei_{sy} + k_2 e\psi_{rx} (\hat{\omega}\hat{\psi}_{ry} - \zeta_y) - k_2 e\psi_{ry} (\hat{\omega}\hat{\psi}_{rx} - \zeta_x) - (\omega - \hat{\omega}) \frac{d}{d\tau} (\omega - \hat{\omega}) \end{aligned} \quad (35)$$

Można zauważyć, że funkcja $V(x)$ jest poprawnie określona, tzn. spełnia założenia drugiej metody Lapunowa, gdyż jest dodatnia dla każdego wektora zmiennych stanu $x = (ei_{sx}, ei_{sy}, e\psi_{rx}, e\psi_{ry}, e\omega)$ oraz $V(0) = 0$.

6. STABILNOŚĆ GLOBALNA UKŁADU REGULACJI

Badając stabilność globalną układu regulacji należy dowieść niedodatnią wartość pochodnej funkcji Lapunowa dla każdego wektora zmiennych stanu. W tym celu rozpatrzono poszczególne składowe tej pochodne przyjmując następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= (a_1 - k_3 k_1)(e_{i_{sx}}^2 + e_{i_{sy}}^2) + a_5(e\psi_{rx}^2 + e\psi_{ry}^2) \leq 0 \\
 \Delta_2 &= (a_2 + a_6)(e\psi_{rx} e_{i_{sx}} + e\psi_{ry} e_{i_{sy}}) \\
 \Delta_3 &= k_3 \omega (e_{i_{sx}} \zeta_x + e_{i_{sy}} \zeta_y) \\
 \Delta_4 &= (\omega \psi_{rx} - \zeta_x) e\psi_{ry} - (\omega \psi_{ry} - \zeta_y) e\psi_{rx} = 0 \\
 \Delta_5 &= a_3 (\omega \psi_{ry} - \zeta_y) e_{i_{sx}} - a_3 (\omega \psi_{rx} - \zeta_x) e_{i_{sy}} = 0 \\
 \Delta_6 &= k_2 e\psi_{rx} (\hat{\omega} \hat{\psi}_{ry} - \zeta_y) - k_2 e\psi_{ry} (\hat{\omega} \hat{\psi}_{rx} - \zeta_x) + (\omega - \hat{\omega}) \frac{d}{d\tau} (\omega - \hat{\omega})
 \end{aligned} \tag{36}$$

Ponieważ współczynniki k_1 i k_3 są dodatnie zatem składnik pochodnej Δ_1 jest niedodatni. Przy założeniu (21), składniki Δ_4 i Δ_5 są równe zero natomiast składniki Δ_3 i Δ_6 przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 \Delta_3 &= k_3 \omega e_{i_{sx}} \zeta_x \\
 \Delta_6 &= k_2 e\psi_{rx} \hat{\omega} \hat{\psi}_{ry} - k_2 e\psi_{ry} (\hat{\omega} \hat{\psi}_{rx} - \zeta_x) + (\omega - \hat{\omega}) \frac{d}{d\tau} (\omega - \hat{\omega})
 \end{aligned} \tag{37}$$

Analizując poszczególne składniki pochodnej stwierdzono, że największy wpływ na zmiany zachowania się tej funkcji mają składniki $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_6$. Składniki te w szczególności zależą od położenia wektorów strumienia wirnika wyznaczonych z modelu silnika i obserwatora. W dalszych rozważaniach stabilności globalnej należy sprawdzić w jakim stopniu znak rozpatrywanej pochodnej zależy od tych składników oraz przyjmując określone modyfikacje równań obserwatora, eliminując niepożądane zjawiska.

7. STABILNOŚĆ LOKALNA UKŁADU REGULACJI.

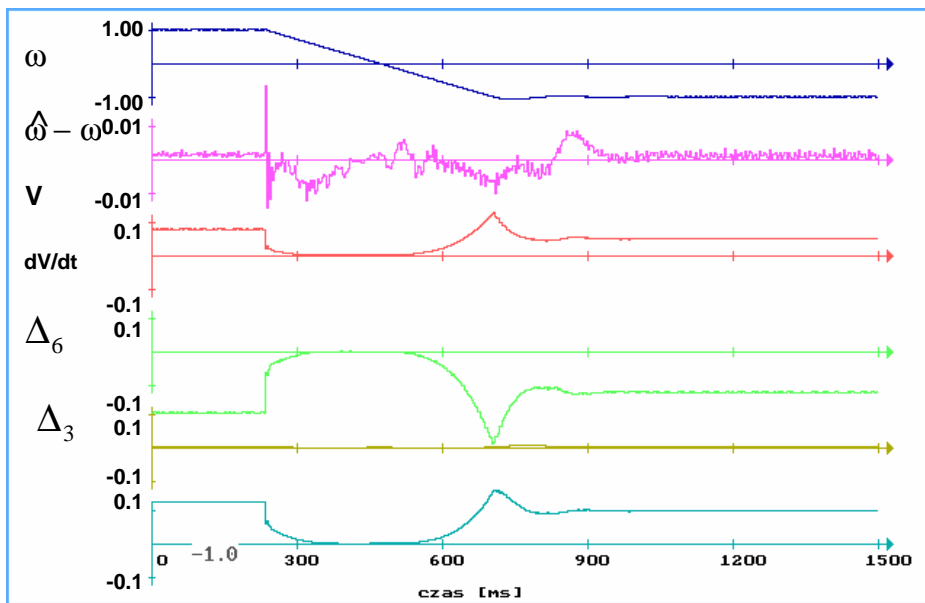
Obszar stabilności układu napędowego zależy od parametrów silnika oraz regulatorów w takim samym stopniu jak od wartości prędkości i momentu obciążenia. Wraz ze zmniejszaniem prędkości silnika maleje również obszar stabilności. Celem artykułu jest przedstawienie analizy zachowania się układu przy małych prędkościach obrotowych silnika indukcyjnego. Stabilność lokalną rozpatrywano dla prędkości kątowej z zakresu od -1 do 1, przy ustalonym momencie obciążenia. Przyjęte parametry silnika rozpatrywano w wielkościach względnych ($R_s=0,047$, $R_r=0,045$, $L_m=1,85$, $L_r=L_s=1,927$).

Dla potwierdzenia poprawności funkcji Lapunowa opracowano model w symulacji komputerowej napisany w języku C. Na rysunku 1 zamieszczono przykładowe przebiegi prędkości obrotowej, funkcji Lapunowa, pochodnej funkcji Lapunowa oraz jej składników Δ_3, Δ_6 , przy przejściu prędkości obrotowej przez zero. Przy przejściu prędkości przez zero funkcja Lapunowa maleje do zera, natomiast jej pochodna rośnie do zera. Obie funkcje nie przekroczyły jednak wartości zerowej. W tej sytuacji stabilność układu jest zachowana, ale nie występuje stabilność asymptotyczna. Przedstawione wyniki otrzymano przy znamionowym obciążeniu silnika w stanie ustalonym.

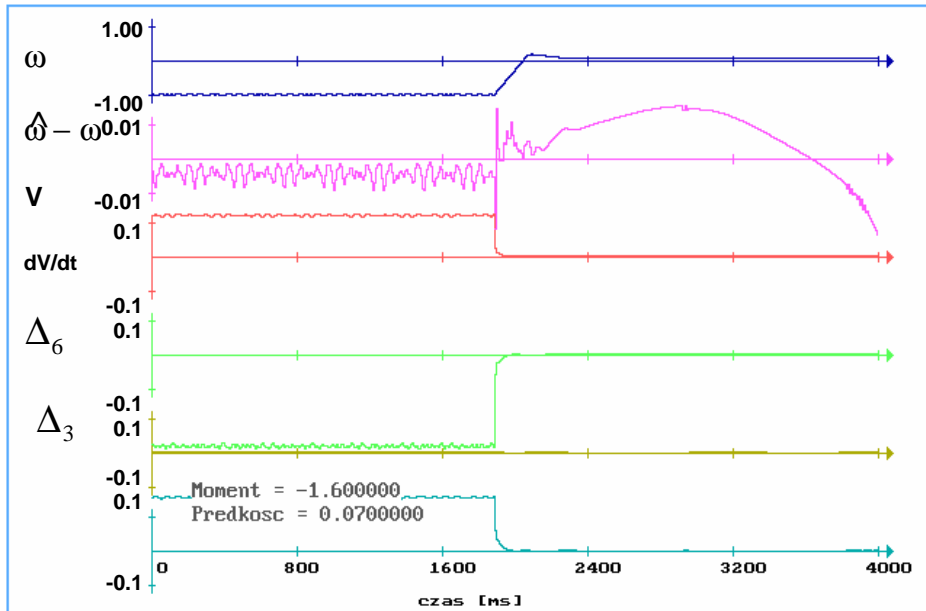
Zauważono natomiast, że dla zadanej prędkości i momentu obciążenia równych np. $\omega = 0.07$ i $m = -1.6$ lub $\omega = 0.025$ i $m = -0.555$, układ może zachować się

niepoprawnie. Na rysunku 2 i 3 zamieszczono przykład wystąpienia niestabilności pracy układu – dla powyższej sytuacji. Błąd prędkości obrotowej wału silnika nie jest kontrolowany. Funkcja Lapunowa i jej pochodna wykazują pewne oscylacje oraz pochodna zmienia znak.

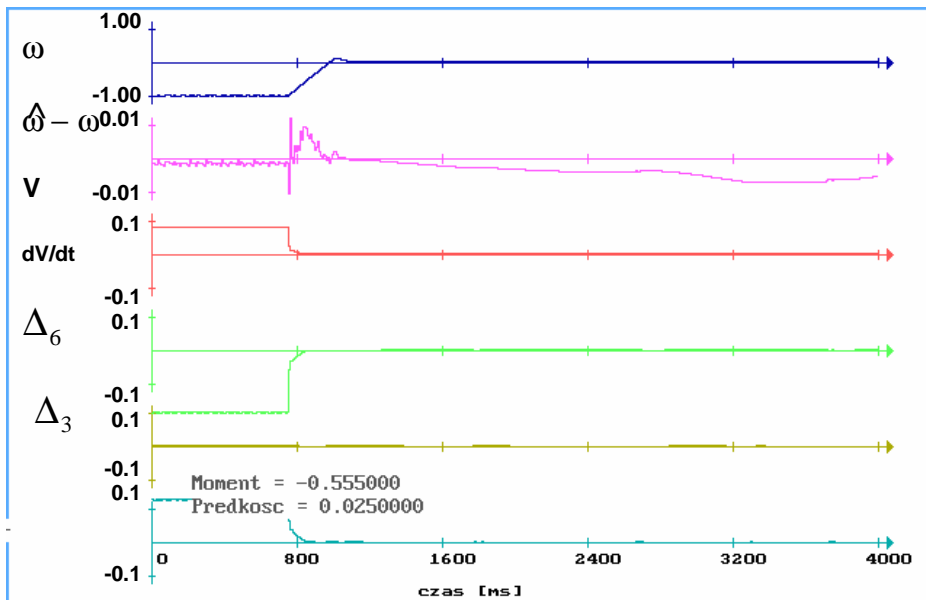
Pokazane w artykule punkty niestabilności układu są tylko przykładowe. Analizując zachowanie się funkcji Lapunowa i jej pochodnej można wyznaczyć „mapę” punktów niestabilnej pracy układu. Wymaga to jednak dużego nakładu pracy. Dlatego w dalszych badaniach stabilności tego typu układów napędowych proponuje się zastosowanie sieci neuronowych w celu eliminacji punktów niestabilnej pracy układu.



Rys.1. Przebiegi prędkości obrotowej, funkcji Lapunowa, pochodnej funkcji Lapunowa oraz jej składników Δ_3, Δ_6 przy zmianie prędkości obrotowej $-1 < \omega < 1, m = 0.5$



Rys.2. Przebiegi prędkości obrotowej, funkcji Lapunowa, pochodnej funkcji Lapunowa oraz jej składników Δ_3, Δ_6 podczas wystąpienia niestabilności układu napędowego, dla $\omega = 0.07, m = -1.6$



Rys.3. Przebiegi prędkości obrotowej, funkcji Lapunowa, pochodnej funkcji Lapunowa oraz jej składników Δ_3, Δ_6 podczas wystąpienia niestabilności układu napędowego, dla $\omega = 0.025, m = -0.555$

8. WNIOSKI

Istotnym problemem naukowym w rozpatrywanym układzie napędowym były stany niestabilnej pracy układu. Określenie charakterystycznych punktów niepoprawnej pracy napędu pozwoliło na sformułowanie zagadnienia określającego zależności wpływające na ten stan. W celu określenia globalnej stabilności układu niezbędna jest dalsza analiza uwzględniająca składniki $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_6$ równania (36) w celu modyfikacji równań rozpatrywanego obserwatora prędkości kątowej wału.

Rozpatrywana problematyka może mieć nie tylko znaczenie naukowe lecz również dydaktyczne określając metodykę badań układów napędowych z wyznaczaniem ich punktów stabilnej pracy z zastosowaniem technik komputerowych.

9. LITERATURA

1. R. Marino, P. Tomei, C. M. Verrelli: A Global Tracking Control for Speed - Sensorless Induction Motors, *Automatica* 40 (2004) 1071-1077.
2. R. Ortega, D. Taoutou: Indirect Field Oriented Speed Regulation for Induction Motors is Globally Stable, *IEEE Transactions on Ind. Electronics*, vol.43, No. 2, 1996.
3. M. R. Dubowski: Stabilność układów napędowych sterowanych zgodnie z zasadą pośredniej orientacji polowej, *Rozprawy Naukowe* Nr 80, WPB Białystok 2001.
4. S. Peresada, A. Tilli, S. Kovbasa, M. Montanari, F. Ronchi: Simple Sensorless Vector Control of Induction Motors with Natural Field Orientation, 27th Conf. IEEE Industr. Electron. Soc. (IECON01), Nov. 29 - Dec. 2, 2001, Denver, USA.
5. M. Montanari, S. Peresada, A. Tilli, A. Tilli, A. Tonielli: Speed Sensorless Control of Induction Motor based on Indirect Field – Orientation.
6. M. Montanari, S. Peresada, A. Tilli: Observerless Scheme for Sensorless Control of Induction Motor: Stability Analysis and Design Procedure, *MED 2002*, Lisbon, Portugal, July 9-12, 2002.
7. T. Orłowska-Kowalska: Application of extended Luenberger observer for flux and rotor time-constant estimation in induction motor drives. *IEE Proceedings*, vol.136, Pt. D. ,1989
8. J. La Salle, S. Lefschetz: *Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej*. BNI. Warszawa 1966.
9. Z. Krzemiński: *Cyfrowe sterowanie maszynami asynchronicznymi*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2001.
10. Z. Krzemiński, A. Puszcz: *Stabilność silnika indukcyjnego w układzie regulacji z obserwatorem prędkości kątowej wału*. *Postępy w Elektrotechnice Stosowanej*, Kościelisko, 23-27.06.2003 r.
11. R. Ottersten: *On control of Back to Back Converters and sensorless Induction Machine Drives*, PhD Thesis, Chalmers University of Technology, Goteborg Sweden 2003.

STABILITY ANALYSIS OF SPEED-SENSORLESS CONTROL OF INDUCTION MOTOR BASIS ON SECOND METHOD LAPUNOW

The preliminary results of stability analysis of speed-sensorless control of induction motor in support about second method of Lapunow are presented. Basis on the mathematical model of induction motor with observer the Lapunow function was presented as well as one proved conditions of her correctness. Local analysis for small speeds and partial global analysis considered arrangement was taken place. Results were confirmed on computer simulations.