

XIV Seminarium
ZASTOSOWANIE KOMPUTERÓW W NAUCE I TECHNICIE' 2004
Oddział Gdański PTETiS

**ALGORYTM DLA LOKALIZACJI
PUNKTÓW SKUPIENIA CIĄGÓW**

Andrzej SZATKOWSKI¹, Jacek CICHOSZ²

1. Pomorska Akademia Pedagogiczna
tel: (058) 5522445, e-mail: Andrzej-Szat@wp.pl
2. Politechnika Gdańska
tel: (058) 3472140, e-mail: jcichosz@eti.pg.gda.pl

Przedstawiono sformułowanie algorytmu numerycznego dla lokalizacji punktów skupienia ciągów w przestrzeni \mathbf{R}^n . Proponowany algorytm należy do grupy algorytmów wykorzystujących identyfikację przedziałową (komórkową) oraz sortowanie. W proponowanym algorytmie zastosowano procedurę tworzenia ciągu elementarnych przedziałów selekcji – identyfikacji przyporządkowywanych punktom trajektorii numerycznej – w przypadku, gdy elementy analizowanego ciągu dane są przepisem realizowanym obliczeniowo lub - punktom trajektorii otrzymywanej na podstawie eksperymentu związanego z pomiarami. Rozważane są trajektorie z czasem dyskretnym lub po dyskretyzacji zmiennej niezależnej. Przyporządkowywanie ciągu elementarnych przedziałów selekcji – identyfikacji może być realizowane po utworzeniu lub po zarejestrowaniu ciągu będącego w przypadku ogólnym skończonym podciągami początkowym analizowanego ciągu.

1. WSTĘP

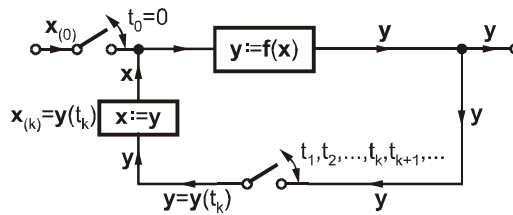
Algorytmy dla lokalizacji punktów skupienia ciągów posiadających być może więcej niż jeden punkt skupienia, a więc ciągów, które w ogólnym przypadku mogą nie posiadać granicy, są niezbędne zarówno ze względu na potrzeby występujące w ogólnej analizie numerycznej, jak i w związku z analizą modeli i zachowań różnego typu systemów fizycznych. Dla przykładu wymienić tu można: numeryczne wyznaczanie podzbiorów niezmienniczych odwzorowań ciągłych z zastosowaniem algorytmów iteracyjnych, analizę sygnałów o złożonym wykresie i sygnałów określanych jako chaotyczne [1,6], wyznaczanie zbiorów granicznych rozważanych w związku z generacją i przetwarzaniem obrazów realizowanych w systemach z czasem dyskretnym, czy na przykład analizę stanów ustalonych w systemach cyfrowego przetwarzania i generacji sygnałów, w tym też analizę tych stanów w systemach z kluczowaniem obejmującą przypadki jedno i wielopunktowych zbiorów granicznych.

Rozważa się ciągi nieskończone punktów w danej n -wymiarowej przestrzeni \mathbf{R}^n . Niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ oznacza punkt w \mathbf{R}^n . Ciąg nieskończony $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ punktów w \mathbf{R}^n jest zapisywany w postaci $(\mathbf{x}_j)_{j \in \mathbf{N}}$, gdzie \mathbf{N} oznacza zbiór $\{0, 1, 2, \dots\}$. W przestrzeni \mathbf{R}^n , rozważanej jako przestrzeń wektorowa, wprowadza się metrykę $d(\cdot)$ odpowiadającą tzw. normie pierwszej $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ w \mathbf{R}^n [3,4]. Punkt $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ jest punktem skupienia danego ciągu $(\mathbf{x}_j)_{j \in \mathbf{N}}$, jeżeli w każdym otoczeniu otwartym punktu \mathbf{a} , przy naturalnej topologii przestrzeni \mathbf{R}^n zadanej przez jej metrykę, leży nieskończenie wiele elementów ciągu [4]. Punkt \mathbf{a} jest punktem skupienia ciągu $(\mathbf{x}_j)_{j \in \mathbf{N}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą pewnego podciągu wybranego z danego ciągu $(\mathbf{x}_j)_{j \in \mathbf{N}}$.

Zbiór punktów skupienia danego ciągu $(\mathbf{x}_j)_{j \in \mathbf{N}}$ jest oznaczany przez $\mathbf{S}((\mathbf{x}_j)_{j \in \mathbf{N}})$.

Rozważane są ciągi punktów w \mathbf{R}^n , które są ciągami ograniczonymi oraz posiadają skończony zbiór punktów skupienia.

Dla zilustrowania rozważań analizowany jest układ z kluczowaniem z Rys. 1.



Rys. 1. Schemat układu z kluczowaniem dla generacji przebiegów przedziałami stałych realizowanej w wyniku iteracji prostych zadanych przez odwzorowanie $\mathbf{f}(\cdot)$.

Układ generuje ciąg otrzymywany w wyniku iteracji prostych zadanych przez odwzorowanie $\mathbf{f}(\cdot) : \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$. Iteracje opisane są formułą rekurencyjną:

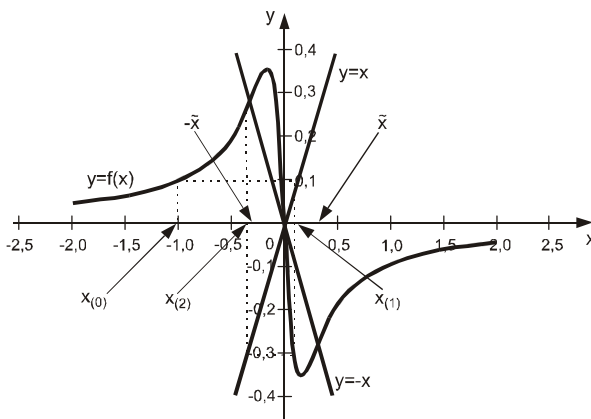
$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{(0)} &= \mathbf{x}(t_0), t_0 = 0, \mathbf{x}(t_0) \in \mathbf{R}^n, \\ \mathbf{x}_{(k+1)} &= \mathbf{x}(t_{k+1}), \mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_k)), k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

gdzie $\mathbf{x}_{(0)}$ jest punktem początkowym dla iteracji. Z punktu widzenia ogólnej teorii systemów [5], układ z Rys.1 jest systemem ze zmienną niezależną $k \in \mathbf{N}$ i zmienną zależną \mathbf{x} , który realizuje odwzorowanie $\mathbf{F}(\cdot) : \mathbf{N} \times \mathbf{R}^n \ni (k, \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{f}^k(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$, gdzie $\mathbf{f}^k(\cdot)$ oznacza k krotne złożenie odwzorowania $\mathbf{f}(\cdot)$. Gdy $\mathbf{f}(\cdot)$ jest odwzorowaniem ciągłym, układ z Rys.1 realizuje trajektorie systemu dynamicznego $D_{it} = (\mathbf{R}^n, \mathbf{N}, \mathbf{F})$, ze zmienną niezależną $k \in \mathbf{N}$. Trajektorie systemu D_{it} są określone jednoznacznie przez podanie punktu $\mathbf{x}_{(0)} = \mathbf{x}(k=0)$. Podanie stanu systemu dla $k=0$ jest tu równoznaczne z zadaniem zmiennej

niezależnej x (inaczej, zmiennej dynamicznej lub stanu) wartości $x(t=0) = x_{(0)}$, gdzie zmienna t przyjmuje wartości w zbiorze $\mathbf{R}^+ = [0, \infty)$, zawierającym \mathbf{N} jako podzbiór.

Niech odwzorowanie $f(\cdot)$ będzie dane przepisem $f(\cdot) : \mathbf{R} \ni x \rightarrow f(x) = \frac{-5x}{1+50x^2}$.

Na Rys.2 zaznaczono przykładową trajektorię odpowiedniego systemu dynamicznego $D_{it} = (\mathbf{R}, \mathbf{N}, F)$. Trajektorię wyznaczono jako trajektorię numeryczną, otrzymaną zgodnie z formułą (1) algorytmu iteracji prostych przy zadanym punkcie początkowym $x_{(0)} = -1$.



Rys. 2. Wykres funkcji $f(\cdot)$ wraz z zaznaczoną trajektorią systemu D_{it} , dla $x_{(0)} = x(0) = -1$.

Podzbiorem niezmienniczymi dla odwzorowania $f(\cdot)$ w tym przykładzie są: punkt 0 będący jedynym punktem stałym odwzorowania $f(\cdot)$, podzbiór $\{-\tilde{x}, \tilde{x}\}$, gdzie $\tilde{x} = 0,2 \cdot \sqrt{2}$ jest dodatnim rozwiązaniem równania $x = -f(x)$, oraz podzbiór $\{-\tilde{x}, 0, \tilde{x}\}$ będący sumą mnogościową wymienionych podzbiorów. Podzbiór $\{-\tilde{x}, \tilde{x}\}$ jest podzbiorem granicznym każdej trajektorii systemu dynamicznego $D_{it} = (\mathbf{R}, \mathbf{N}, F)$, dla której $x_{(0)} \neq 0$. Punkt stały $x=0$ jest punktem odpychającym dla iteracji. Dla $x_{(0)} \in \{-\tilde{x}, \tilde{x}\}$ trajektoria systemu $D_{it} = (\mathbf{R}, \mathbf{N}, F)$ (odpowiednia trajektoria numeryczna dana formułą algorytmu iteracji prostych) opisana jest wzorem $x_{(k)} = (-1)^k \cdot x_{(0)}$, gdzie $k \in \mathbf{N}$. Przykładem układu fizycznego posiadającego trajektorię graniczną opisaną tym wzorem jest rozważany w dziedzinie cyfrowej generacji sygnałów układ przerzutnika astabilnego – przy przyjęciu modelu przerzutnika w postaci układu z kluczkowaniem [2].

2. OPIS ALGORYTMU DLA LOKALIZACJI PUNKTÓW SKUPIENIA CIĄGÓW

Dany jest ciąg $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$ w \mathbf{R}^n , odnośnie do którego zakłada się, że jest ciągiem ograniczonym o skończonej liczbie punktów skupienia. W formułowanym algorytmie lokalizacji punktów skupienia wykorzystuje się normę pierwszą $\|\cdot\|_1$ [3, 4] i odpowiadającą tej normie metrykę $d(\cdot)$ w przestrzeni wektorowej \mathbf{R}^n .

Zadane zostają liczby dodatnie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ określające długości krawędzi poszukiwanych przedziałów w \mathbf{R}^n , w których przy zastosowaniu algorytmu zlokalizowane zostaną punkty uznane jako punkty skupienia analizowanego ciągu. Liczby $\varepsilon_1/2, \varepsilon_2/2, \dots, \varepsilon_n/2$ określają zatem wymaganą dokładność lokalizacji punktów skupienia ze względu na odpowiednią współrzędną x_1, x_2, \dots, x_n punktu w \mathbf{R}^n .

Ustalona zostaje liczba $m + 1$ określająca liczbę elementów tworzących początkowy podciąg skończony $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ analizowanego ciągu $(\mathbf{x}_j)_{j \in \mathbf{N}}$. Ciąg ten reprezentuje pełny ciąg $(\mathbf{x}_j)_{j \in \mathbf{N}}$ w trakcie realizacji działań. Zakłada się, że liczba $m + 1$ może przyjąć wartość ustaloną i dowolnie dużą. Podciąg skończony analizowanego przez algorytm ciągu $(\mathbf{x}_j)_{j \in \mathbf{N}}$ zostaje zapisany w postaci następującej tablicy liczb \mathbf{T} ,

$$\mathbf{T} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline j & x_{j,1} & x_{j,2} & \dots & x_{j,n} \\ \hline 0 & x_{0,1} & x_{0,2} & \dots & x_{0,n} \\ \hline 1 & x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline m & x_{m,1} & x_{m,2} & \dots & x_{m,n} \\ \hline \end{array}$$

Niech $E(\cdot)$ oznacza odwzorowanie, które przypisuje liczbie rzeczywistej jej część całkowitą. W **pierwszym etapie** realizacji algorytmu (w etapie identyfikacji przedziałowej) podciąg $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ zostaje odwzorowany na ciąg $\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \dots, \hat{\mathbf{x}}_m$. Element $\hat{\mathbf{x}}_j$, $j \in \{0, 1, \dots, m\}$, jest punktem o współrzędnych w \mathbf{R}^n zadanych formułą

$$\hat{\mathbf{x}}_j = (\hat{x}_{j,1}, \hat{x}_{j,2}, \dots, \hat{x}_{j,n}) = (E(x_{j,1}/\varepsilon_1), E(x_{j,2}/\varepsilon_2), \dots, E(x_{j,m}/\varepsilon_n)). \quad (2)$$

Ciąg $(\hat{\mathbf{x}}_j)_{j=0,1,\dots,m}$, przypisany ciągowi $(\mathbf{x}_j)_{j=0,1,\dots,m}$, jest całkowitoliczbową reprezentacją ciągu $(\mathbf{x}_j)_{j=0,1,\dots,m}$ przy jednoczesnej zmianie jednostek dla osi współrzędnych w \mathbf{R}^n z równych 1 na równe odpowiednio $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, dla kolejnych osi współrzędnych x_1, x_2, \dots, x_n . Wprowadza się oznaczenie $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Przestrzeń \mathbf{R}^n przy zmianie jednostek dla osi współrzędnych jest oznaczana przez \mathbf{R}_ε^n .

Po utworzeniu ciągu $(\hat{\mathbf{x}}_j)_{j=0,1,\dots,m}$ przypisanego ciągowi $(\mathbf{x}_j)_{j=0,1,\dots,m}$, każdemu kolejnemu elementowi $\hat{\mathbf{x}}_j$, $j = 0, 1, \dots, m$, przyporządkowany zostaje odpowiedni prze-

dział $\mathbf{P}(\hat{\mathbf{x}}_j) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n [E(x_{j,i}/\varepsilon_i), (E(x_{j,i}/\varepsilon_i) + 1)]$ ¹⁾ w przestrzeni \mathbf{R}_ε^n o jednostkach podstawowych przypisanych osiom współrzędnych równym odpowiednio $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ i ε_n .

Niech $\hat{\xi}_j = \hat{\mathbf{x}}_j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T$ będzie punktem w \mathbf{R}^n przypisanym punktowi $\hat{\mathbf{x}}_j$,

$j = 0, 1, \dots, m$, i niech $\mathbf{P}_\varepsilon(\hat{\xi}_j) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n [E(x_{j,i}/\varepsilon_i) \cdot \varepsilon_i, (E(x_{j,i}/\varepsilon_i) + 1) \cdot \varepsilon_i]$ będzie przedziałem

przyporządkowanym punktowi $\hat{\xi}_j$, $j = 0, 1, \dots, m$, w przestrzeni \mathbf{R}^n . Odwzorowania analizowanego z zastosowaniem algorytmu ciągu oraz przypisanie elementom ciągów odpowiednich przedziałów przedstawiono na poniższym diagramie:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \Rightarrow & \bullet \\ \mathbf{x}_j & \Rightarrow & \hat{\mathbf{x}}_j \\ (\mathbf{x}_j \in \mathbf{R}^n) & & (\hat{\mathbf{x}}_j \in \mathbf{R}_\varepsilon^n) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} \bullet & \Rightarrow & \bullet \\ \hat{\xi}_j & \Rightarrow & \mathbf{P}_\varepsilon(\hat{\xi}_j) \\ (\hat{\xi}_j \in \mathbf{R}^n) & & (\mathbf{P}_\varepsilon(\hat{\xi}_j) \in \mathbf{R}_\varepsilon^n) \end{array}, \quad (j \in \{0, 1, \dots, m\}).$$

Utworzony ciąg $(\hat{\mathbf{x}}_j)_{j=0,1,\dots,m}$ jest zapisywany w postaci tablicy liczb $\hat{\mathbf{T}}$,

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline j & \hat{x}_{j,1} & \hat{x}_{j,2} & \dots & \hat{x}_{j,n} \\ \hline 0 & E(x_{0,1}/\varepsilon_1) & E(x_{0,2}/\varepsilon_2) & \dots & E(x_{0,n}/\varepsilon_n) \\ \hline 1 & E(x_{1,1}/\varepsilon_1) & E(x_{1,2}/\varepsilon_2) & \dots & E(x_{1,n}/\varepsilon_n) \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline m & E(x_{m,1}/\varepsilon_1) & E(x_{m,2}/\varepsilon_2) & \dots & E(x_{m,n}/\varepsilon_n) \\ \hline \end{array}$$

Symbol $\hat{x}_{j,i}$ oznacza współrzędną o numerze $i = 1, 2, \dots, n$ elementu $\hat{\mathbf{x}}_j$ ciągu $(\hat{\mathbf{x}}_j)_{j=0,1,\dots,m}$.

W **drugim etapie** realizacji algorytmu (w etapie sortowania) dokonuje się zmiany kolejności zapisu wierszy w tablicy $\hat{\mathbf{T}}$ lub równoważnie – dokonuje się przenieumerowania wierszy tablicy $\hat{\mathbf{T}}$. Drugi etap realizowany jest w następujących kolejnych krokach.

Krok 1. Wiersze tablicy $\hat{\mathbf{T}}$ są przestawiane miejscami tak, aby elementy o tej samej wartościach w kolumnie $\hat{x}_{j,1}$ były elementami kolejnymi w kolumnie $\hat{x}_{j,1}$ tablicy po dokonaniu przestawień. Tablicę otrzymaną po dokonaniu przestawień wierszy w tablicy $\hat{\mathbf{T}}$ oznacza się przez $\hat{\mathbf{T}}_{(1)}$. Dla realizacji działań w następnym kroku zaznaczone zostają te spośród wydzielonych części tablicy $\hat{\mathbf{T}}_{(1)}$, które zawierają w kolumnie $\hat{x}_{j,1}$ więcej niż s elementów o tej samej wartości. Wiersze zawierające w kolumnie $\hat{x}_{j,1}$ elementy o tych samych wartościach należą przy tym do tej samej spośród otrzymanych (wydzielonych) części tablicy $\hat{\mathbf{T}}_{(1)}$. Liczba s jest podawana jako jeden z parametrów realizacji algorytmu

¹⁾ \prod jest symbolem iloczynu kartezjańskiego

lub jest ustalana w trakcie obliczeń. Przyjęcie określonej wartości s przy założonych wartościach $m+1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ i przy danym ciągu $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ma zasadniczy wpływ na wynik realizacji algorytmu. Przedstawienie formuły, na podstawie której ustalana jest w obliczeniach wartość parametru s jest zagadnieniem wymagającym osobnych rozważań.

Niech q_1 będzie wskaźnikiem, który przyjmuje wartość liczbową równą liczbie wydzielonych i zaznaczonych części tablicy $\hat{T}_{(1)}$. Początkową wartością wskaźnika q_1 przyjmującego dopuszczalne wartości w zbiorze $\{0, 1, \dots, m+1\}$ jest liczba zero. Jeżeli po zrealizowaniu przestawień otrzymuje się w wyniku nie zmienioną wartość q_1 , równą przyjętej wartości początkowej równej zero, to algorytm zostaje zakończony bez zlokalizowania punktów skupienia analizowanego ciągu lub też algorytm zostaje powtórzony dla analizowanego ciągu po przyjęciu nowych wartości dla $m+1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ i s . Jeżeli natomiast otrzymuje się $q_1 \neq 0$, to algorytm jest kontynuowany w kroku 2.

Przez l_1 oznacza się wskaźnik numerujący kolejno wydzielone części tablicy $\hat{T}_{(1)}$. Ponumerowanie wykonuje się według kolejności przyjętej w opisie algorytmu. Wartością początkową l_1 jest zero. Jeżeli w wyniku zrealizowanych przestawień otrzymano $q_1 \neq 0$, to wydzielone części tablicy $\hat{T}_{(1)}$ oznacza się przez $\hat{T}_{(1)}(l_1)$, gdzie $l_1 \in \{1, 2, \dots, q_1\}$.

Krok 2. W drugim kroku realizacji drugiego etapu algorytmu działania przedstawione w opisie algorytmu dla kroku 1 są wykonywane na wierszach tablicy $\hat{T}_{(1)}$. Przeszawianie (przenumerowywanie) wierszy jest wykonywane w odniesieniu do wydzielonych części $\hat{T}_{(1)}(1), \hat{T}_{(1)}(2), \dots, \hat{T}_{(1)}(q_1)$ tablicy $\hat{T}_{(1)}$. W podtablicy grupowane są jako kolejne te wszystkie wiersze, które zawierają w kolumnie $\hat{x}_{j,2}$ elementy o tych samych wartościach. Przez $\hat{T}_{(2)}$ oznacza się tablicę otrzymaną po dokonaniu przestawień wierszy tablicy $\hat{T}_{(1)}$. Dla realizacji działań grupowania i wydzielania w następnym kroku zostają zaznaczone te części tablicy $\hat{T}_{(2)}$, spośród otrzymanych w kroku 2, które zawierają w kolumnie $\hat{x}_{j,2}$ więcej niż s elementów o tej samej wartości. Wiersze zawierające w kolumnie $\hat{x}_{j,2}$ elementy o tych samych wartościach należą do tej samej spośród otrzymanych (wydzielonych) części tablicy $\hat{T}_{(2)}$. Niech $q_{2;l_1}$ będzie wskaźnikiem, który przyjmuje wartość liczbową równą liczbie tablic, które zostały wydzielone i zaznaczone w kroku 2 w wyniku działań wykonywanych na wierszach tablicy $\hat{T}_{(1)}(l_1)$. Zbiorem dopuszczalnych wartości $q_{2;l_1}$, $l_1 \in \{1, 2, \dots, q_1\}$, jest odpowiedni zbiór $\{0, 1, \dots, w_{l_1}\}$, gdzie w_{l_1} jest liczbą wierszy tablicy $\hat{T}_{(1)}(l_1)$. Początkowymi wartościami wskaźników $q_{2;l_1}$, $l_1 = 1, 2, \dots, q_1$, są liczby zero. Jeżeli po zrealizowaniu przestawień otrzymuje się nie zmienione wartości $q_{2;l_1}$, $l_1 \in \{1, 2, \dots, q_1\}$, równe przyjętym wartościom początkowym, które są równe zero, to algorytm zostaje zakończony bez zlokalizowania punktów skupienia analizowanego ciągu lub też algorytm zostaje powtórzony dla analizowanego ciągu po przyjęciu nowych wartości dla parametrów $m+1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ i s . Jeżeli natomiast otrzymuje się $q_{2;l_1} \neq 0$ dla co

najmniej jednego ze wskaźników $l_1 \in \{1, 2, \dots, q_1\}$, to algorytm jest kontynuowany w kroku 3.

Przez l_2 oznacza się wskaźnik numerujący wydzielone części tablic $\hat{T}_{(1)}(l_1)$, $l_1 = 1, 2, \dots, q_1$. Wskaźnik l_2 numerujący wydzielone części tablicy $\hat{T}_{(1)}(l_1)$ o numerze l_1 występuje w opisie algorytmu jako drugi element pary (l_1, l_2) . Ponumerowanie wykonuje się według przyjętej kolejności. Wartością początkową l_2 jest zero, dla każdego $l_1 \in \{1, 2, \dots, q_1\}$. Jeżeli w wyniku przestawień otrzymano $q_{2;l_1} \neq 0$, dla danego $l_1 \in \{1, 2, \dots, q_1\}$, oznacza to, że wydzielona została przynajmniej jedna część w tablicy $\hat{T}_{(1)}(l_1)$. Wydzielone części $\hat{T}_{(1)}(l_1)$ oznacza się przez $\hat{T}_{(2)}(l_1, l_2)$, $l_2 = 1, 2, \dots, q_{2;l_1}$.

Krok n . W kroku n realizacji drugiego etapu algorytmu działania przedstawione w opisie działań dla kroku $n-1$ są wykonywane na wierszach tablicy $\hat{T}_{(n-1)}$, którą otrzymano w kroku $(n-1)$. Przystawianie wierszy jest wykonywane w odniesieniu do wydzielonych części $\hat{T}_{(n-1)}(l_1, l_2, \dots, l_{n-1})$, $l_1 = 1, 2, \dots, q_1$, $l_2 = 1, 2, \dots, q_{2;l_1}, \dots$, $l_{n-1} = 1, 2, \dots, q_{n-1;l_1, l_2, \dots, l_{n-2}}$, tablicy $\hat{T}_{(n-1)}$. Grupowane są jako kolejne te wszystkie wiersze, które zawierają w kolumnie $\hat{x}_{j,n}$ elementy o tych samych wartościach. Przez $\hat{T}_{(n)}$ oznacza się tablicę otrzymaną po dokonaniu przestawień wierszy tablicy $\hat{T}_{(n-1)}$.

Zaznaczone zostają te części tablicy $\hat{T}_{(n)}$, spośród otrzymanych w kroku n w wyniku grupowania wierszy, które zawierają w kolumnie $\hat{x}_{j,n}$ więcej niż s elementów o tej samej wartości. Wiersze zawierające w kolumnie $\hat{x}_{j,n}$ elementy o tych samych wartościach należą do tej samej spośród zaznaczonych części tablicy $\hat{T}_{(n)}$. Niech $q_{n-1;l_1, l_2, \dots, l_{n-1}}$ będzie wskaźnikiem, który przyjmuje wartość liczbową równą liczbie tablic, które zostały wydzielone i zaznaczone w kroku n w wyniku działań wykonanych na wierszach tablicy $\hat{T}_{(n-1)}(l_1, l_2, \dots, l_{n-1})$. Zbiorem dopuszczalnych wartości $q_{n-1;l_1, l_2, \dots, l_{n-1}}$, $l_1 \in \{1, 2, \dots, q_1\}$, $l_2 \in \{1, 2, \dots, q_{2;l_1}\}, \dots$, $l_{n-1} \in \{1, 2, \dots, q_{n-1;l_1, l_2, \dots, l_{n-2}}\}$, jest odpowiedni zbiór $\{0, 1, \dots, w_{l_1, l_2, \dots, l_{n-1}}\}$, gdzie $w_{l_1, l_2, \dots, l_{n-1}}$ jest liczbą wierszy tablicy $\hat{T}_{(n-1)}(l_1, l_2, \dots, l_{n-1})$. Początkowymi wartościami wskaźników $q_{n-1;l_1, l_2, \dots, l_{n-1}}$, $l_1 = 1, 2, \dots, q_1, \dots$, $l_{n-1} = 1, 2, \dots, q_{n-1;l_1, l_2, \dots, l_{n-2}}$, są liczby zero. Jeżeli po zrealizowaniu przestawień otrzymuje się w wyniku nie zmienione wartości wskaźników $q_{n-1;l_1, l_2, \dots, l_{n-1}}$, $l_1 \in \{1, 2, \dots, q_1\}, \dots$, $l_{n-1} \in \{1, 2, \dots, q_{n-1;l_1, l_2, \dots, l_{n-2}}\}$, równe przyjętym wartościom początkowym, które są równe zero, to algorytm zostaje zakończony bez zlokalizowania punktów skupienia analizowanego ciągu lub też algorytm zostaje powtórzony dla analizowanego ciągu po przyjęciu nowych wartości dla parametrów $m+1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ i s . Jeżeli natomiast otrzymuje się $q_{n-1;l_1, l_2, \dots, l_{n-1}} \neq 0$ dla pewnego ciągu wskaźników $(l_1, l_2, \dots, l_{n-1})$, gdzie $l_1 \in \{1, 2, \dots, q_1\}, \dots$, $l_{n-1} \in \{1, 2, \dots, q_{n-1;l_1, l_2, \dots, l_{n-2}}\}$, to każdy z $q_{n-1;l_1, l_2, \dots, l_{n-1}}$ punktów w przestrzeni \mathbf{R}_ε^n o współrzędnych równych wartościom odpowiednich elementów dowolnego z tożsamościowo sobie równych wierszy każdej z wydzie-

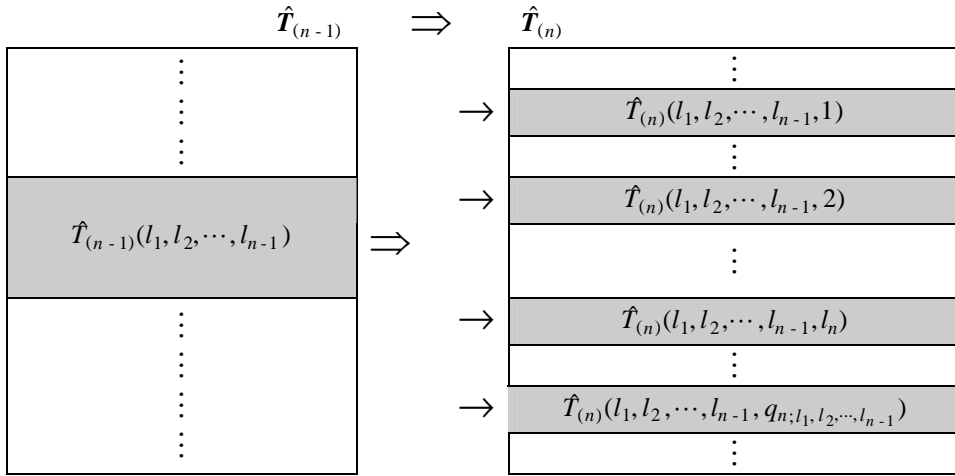
lonych $q_{n-1;l_1,l_2,\dots,l_{n-1}}$ podtablic $\hat{T}_{(n)}(l_1,l_2,\dots,l_n)$, gdzie $l_n = 1, 2, \dots, q_{n-1;l_1,l_2,\dots,l_{n-1}}$, zawartych w tablicy $\hat{T}_{(n)}$ jest przyjmowany w wyniku zastosowania algorytmu jako przybliżona lokalizacja jednego z punktów skupienia ciągu $(\hat{x}_j)_{j \in \mathbf{N}}$, który reprezentuje analizowany ciąg $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$ w przestrzeni \mathbf{R}_ε^n .

Niech $\mathbf{x}^\#$ będzie jednym z punktów otrzymanych przy zastosowaniu algorytmu i przyjętych jako przybliżona lokalizacja pewnego punktu skupienia ciągu $(\hat{x}_j)_{j \in \mathbf{N}}$. Punkt

$$\tilde{\zeta} = \mathbf{x}^\# \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

jest przyjmowany jako lokalizacja, z dokładnością określoną przedziałem $\mathbf{P}_\varepsilon(\mathbf{x}^\# \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T)$, pewnego punktu skupienia $\tilde{\mathbf{x}}$ analizowanego ciągu $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$.

Procedurę wydzielenia części tablicy $\hat{T}_{(n-1)}$ zilustrowano poniżej na diagramie.



Poprawność sformułowania przedstawionego algorytmu uzasadnia następujące stwierdzenie będące bezpośrednim wnioskiem z definicji punktu skupienia ciągu i definicji granicy ciągu zbieżnego.

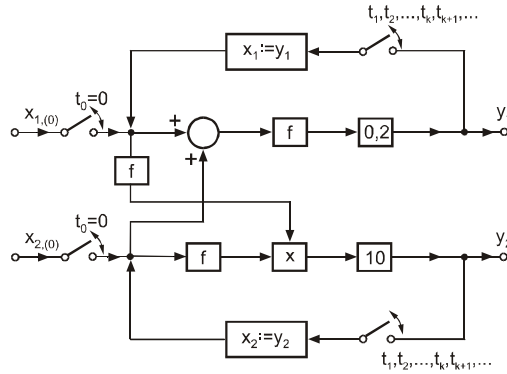
Stwierdzenie. Niech $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$ będzie ciągiem ograniczonym (tu rozważane są ciągi w \mathbf{R}^n) i posiadającym skończoną liczbę punktów skupienia. Istnieje liczba dodatnia ρ taka, że: dla każdego ciągu $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ liczb dodatnich określających długości krawędzi przedziałów selekcji – identyfikacji, dla którego spełniona jest nierówność $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_1 < \rho$ istnieje liczba $K \in \mathbf{N}$ taka, że wszystkie wyrazy dla $j > K$ ciągu $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$ zawierają się w pewnych rozłącznych przedziałach selekcji – identyfikacji o długościach krawędzi danych

kolejnymi liczbami $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ i ε_n , przy czym każdy zawiera dokładnie jeden punkt skupienia ciągu $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$ (liczba przedziałów jest równa liczbie punktów skupienia). Liczba elementów podciągu $(x_j)_{j=0,1,\dots,m}$ zawartych w każdym z przedziałów selekcji – identyfikacji, zawierających punkt skupienia ciągu, zmierza do nieskończoności dla $m \rightarrow \infty$.

Przykład. Wykorzystując zaproponowany algorytm dla lokalizacji punktów skupienia ciągów poddano analizie ciąg $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$ dany formułą rekurencyjną

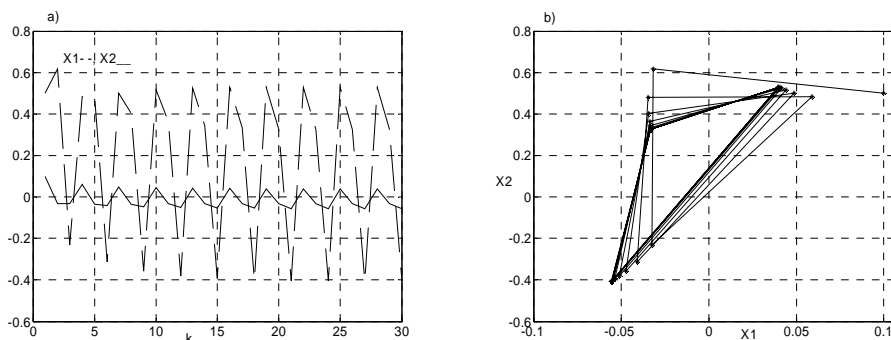
$$\left. \begin{aligned} x_{1,(0)} &= 0.1, \quad x_{2,(0)} = 0.5, \\ x_{1,(k+1)} &= 0.2f(x_{1,(k)} + x_{2,(k)}), \quad x_{2,(k+1)} = 10f(x_{1,(k)})f(x_{2,(k)}), \quad k \in \mathbf{N}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

dla punktu początkowego $x_{(0)} = (0.1, 0.5)$. Ciąg $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$ występujący w opisie algorytmu jest w tym przykładzie ciągiem $(x_{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$.



Rys. 3. Schemat układu z kluczkowaniem realizujący przebiegi zgodnie z formułą (4).

Dla analizowanego ciągu $(x_{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ otrzymuje się trzejelementowy zbiór $S((x_{(k)})_{k \in \mathbf{N}}) = \{ \tilde{x}', \tilde{x}'', \tilde{x}''' \}$ punktów skupienia. W celu zlokalizowania punktów skupienia ciągu przyjęto $m+1 = 250$ i $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 10^{-5}$. Przy tych danych otrzymano wartość parametru s równą 62. Otrzymano punkty $\tilde{\zeta}' = (0.039435, 0.526455)$, $\tilde{\zeta}'' = (-0.033265, 0.324085)$ i $\tilde{\zeta}''' = (-0.055615, -0.408515)$ jako wynik lokalizacji punktów skupienia ciągu $(x_{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$. Punkty $\tilde{\zeta}'$, $\tilde{\zeta}''$ i $\tilde{\zeta}'''$ przyjęto jako przybliżoną lokalizację odpowiednich punktów skupienia \tilde{x}' , \tilde{x}'' i \tilde{x}''' .



Rys. 4. Otrzymany numerycznie podciąg początkowy $(x_{1,(k)}, x_{2,(k)})$, $k = 0, 1, \dots, 30$ oraz odpowiadająca temu ciągowi trajektoria numeryczna w \mathbf{R}^2 .

Błędy względne (przy metryce $\|\cdot\|_1$ w \mathbf{R}^2) z jakimi zlokalizowano z zastosowaniem algorytmu punkty skupienia analizowanego ciągu nie przekraczają, w przybliżeniu liniowym oceny błędu, wartości $3 \cdot 10^{-6}$.

3. BIBLIOGRAFIA

1. Arnold W. I.: Teoria równań różniczkowych. Warszawa, PWN 1983.
2. Baranowski J., Czajkowski G.: Układy elektroniczne, część 2. Układy analogowe nieliniowe i impulsowe. Warszawa, WNT 1998.
3. Dryja M., Jankowski J. M.: Przegląd metod i algorytmów numerycznych, część 2. Warszawa, WNT 1988.
4. Maurin K.: Analiza, część 1. Warszawa, PWN 1976.
5. Pelczar A.: Wstęp do teorii równań różniczkowych, część 2. Warszawa, PWN 1989.
6. Schuster H. G.: Chaos deterministyczny. Warszawa, PWN 1995.
7. Szatkowski A., Cichosz J.: Metody numeryczne. Podstawy teoretyczne. Gdańsk, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej 2002.

ALGORITHM FOR IDENTIFICATION OF LIMIT POINTS OF SEQUENCES

An algorithm for identification of the limit points of sequences in an Euclidean space is proposed. The sets of limit points of the analysed sequences are not necessary the one element sets. The example concerning the switched system has been enclosed.