Maciej Major, Izabela Major, Tomasz Kwiatkowski

JEDNOOSIOWY STAN NAPRĘŻEŃ W HIPERSPRĘŻYSTYM MATERIALE ZAHORSKIEGO ORAZ MOONEYA-RIVLINA I NEO-HOOKEANA - PORÓWNANIE

Wprowadzenie

Zarówno materiały gumopodobne, jak i sama guma są ośrodkami, w których mogą powstawać duże deformacje sprężyste. Szukanie związków konstytutywnych dla opisu sprężystego zachowania gumy trwa od początku lat 40. XIX wieku, tzn. od momentu publikacji [1] i [2], aż do dziś. Opublikowane w ostatnich latach monografie oraz artykuły, jak np. [3-6], omawiają modele i związki konstytutywne, a także charakteryzujący zakres ich stosowalności dla materiałów gumopodobnych. Zgodnie z wyprowadzoną przez Mooneya i Rivlina teorią, materiały gumopodobne modelowane są jak materiały nieściśliwe, dla których funkcja energii odkształcenia zależy od stałych materiałowych oraz pierwszych dwóch niezmienników tensora deformacji. Szczególnym przypadkiem jest materiał neo-Hookeana. Nieliniową zależność od niezmienników tensora deformacji dla funkcji energii odkształcenia opisującą materiał nieściśliwy wprowadził Zahorski [7]. Tak określona zależność umożliwia opis sprężystego zachowania materiałów gumopodobnych w zakresie dużych deformacji. Kolejnymi etapami na drodze tworzenia związków konstytutywnych dla gumopodobnego materiału i zarazem nową jakością było określenie przez Blatza i Ko [8] oraz Levinsona i Burgessa [9] zależności konstytutywnych dla materiałów ściśliwych, które w przejściach granicznych redukują się do klasycznych materiałów nieściśliwych. Opublikowanie przez Ogdena [10] pracy na temat ściśliwego modelu gumopodobnego jest kolejnym krokiem na drodze znalezienia związku konstytutywnego z małą ilością stałych, który będzie możliwie dobrze modelował materiały gumopodobne w pełnym zakresie deformacji.

1. Podstawowe zależności

Rozważamy deformacje:

$$x^1 = \lambda_1 X^1; \quad x^2 = \lambda_2 X^2; \quad x^3 = \lambda_3 X^3 \tag{1}$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ są stałymi współczynnikami, które odpowiadają wydłużeniom.

Przyjmujemy, że $\{x^i\}$ oraz $\{X^\alpha\}$ są pokrywającymi się kartezjańskimi układami współrzędnych. Dla deformacji (1) gradient odkształcenia odpowiednio wynosi:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Ponieważ warunek nieściśliwości narzuca ograniczenie, że $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$, zatem lewy tensor odkształcenia dla jednorodnego stanu odkształcenia materiału nieściśliwego jest równy:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

a jego niezmienniki odpowiednio wynoszą:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 \quad I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \tag{4}$$

Przyjmujemy do dalszych obliczeń, że:

$$\lambda_1 = \lambda \text{ oraz } \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \tag{5}$$

Wówczas mamy odpowiednio:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \tag{6}$$

oraz niezmienniki

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad I_2 = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \quad I_3 = 1 \tag{7}$$

Dla nieściśliwego hipersprężystego materiału Zahorskiego potencjał sprężysty opisany jest zależnością:

$$W = C_1\left(I_1 - 3\right) + C_2\left(I_2 - 3\right) + C_3\left(I_1^2 - 9\right) \tag{8}$$

gdzie C_1, C_2, C_3 są stałymi.

Gdy $C_3 = 0$, zależność (8) przyjmuje postać:

$$W = C_1\left(I_1 - 3\right) + C_2\left(I_2 - 3\right) \tag{9}$$

która przedstawia potencjał sprężysty Mooneya-Rivlina; natomiast gdy stała $C_2 = 0$, wówczas otrzymujemy potencjał sprężysty neo-Hookeana:

$$W = C_1\left(I_1 - 3\right) \tag{10}$$

Naprężenia Cauchy'ego na kierunkach osi głównych nieściśliwego hipersprężystego materiału możemy opisać następującymi równaniami:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \sigma_{33} &= \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} \\ \sigma_{22} - \sigma_{33} &= \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} \end{aligned} \tag{11}$$

Dla jednoosiowego wydłużenia w hipersprężystym materiale Zahorskiego w dalszych rozważaniach uwzględniamy warunek $(11)_1$, gdzie:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} &= 2C_1\lambda_1^2 + 2C_2\left(\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2\right) + 4C_3\lambda_1^2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^3\right) \\ \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} &= 2C_1\lambda_3^2 + 2C_2\left(\lambda_3^2\lambda_1^2 + \lambda_3^2\lambda_2^2\right) + 4C_3\lambda_3^2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^3\right) \end{aligned} \tag{12}$$

uwzględniając ponadto zależność (5) i podstawiając do $(11)_1$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \sigma_{33} &= 2C_1\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) - 2C_2\left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda\right) + \\ &+ 4C_3\left(-\frac{1}{\lambda^2} + \lambda^4 + \lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) = \\ &= 2C_1\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) - 2C_2\left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda\right) + 4C_3\left(\lambda^4 + \lambda - \frac{2}{\lambda^2}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

gdy $\sigma_{33} = 0$, mamy ostatecznie:

$$\sigma_{11} = \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(2C_1 + \frac{2C_2}{\lambda} + \frac{4C_3}{\lambda}\left(\lambda^3 + 2\right)\right) \tag{14}$$

2. Analiza numeryczna

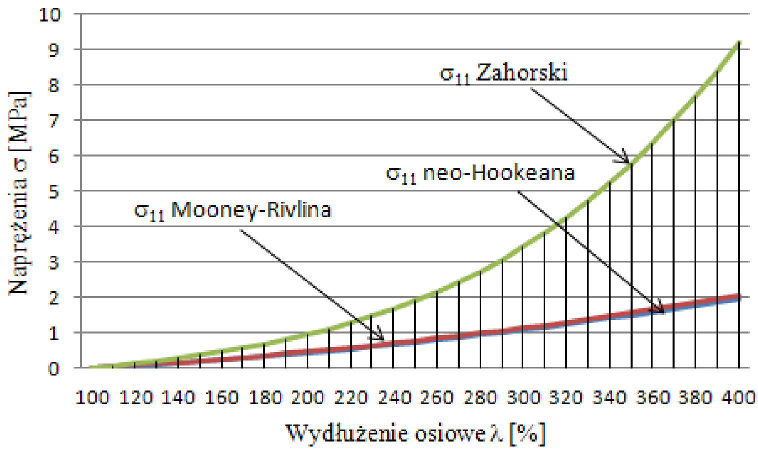
Stałe przyjęto zgodnie z [11], na podstawie [12]:

$$C_1 = 6{,}278 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$C_2 = 8{,}829 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$C_3 = 6{,}867 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Dla rozważań uzyskanych w poprzednim rozdziale zamodelowano rozkład funkcji σ_{11} (patrz (14)) dla nieliniowego materiału neo-Hookeana, Mooneya-Rivlina oraz Zahorskiego (rys. 1).



Rys. 1. Porównanie wyników rozkładu funkcji naprężeń σ_{11} dla materiału neo-Hookeana, Mooneya-Rivlina i Zahorskiego

Wnioski

Przeprowadzona analiza numeryczna wykazała, że wraz ze zmianą przyjętego do badań materiału hipersprężystego następuje widoczna zmiana rozkładu funkcji w analizowanym jednoosiowym stanie naprężeń. Widoczne ilościowe różnice dotyczą materiału Zahorskiego, w którym wartość naprężeń na poziomie ~ 2 MPa uzyskuje dla $\lambda \cong 250\%$, co odpowiada wydłużeniu w neo-Hookeanie i materiale Mooneya-Rivlina na poziomie $\lambda \cong 400\%$.

Dokładne obliczenia są dla $\lambda = 400\%$, naprężenia σ_{11} odpowiednio wynoszą:

- w materiale neo-Hookeana σ_{11} = 1,978 MPa,
- w materiale Mooneya-Rivlina σ_{11} = 2,047 MPa,
- w materiale Zahorskiego σ_{11} = 9,185 MPa.

Z powyższego wynika, że w jednoosiowym stanie naprężeń nie ma istotnej różnicy w wartościach σ_{11} w materiale Mooneya-Rivlina i neo-Hookeana. Widoczna różnica dotyczy materiału Zahorskiego, dla którego naprężenia σ_{11} są ponad 4 razy większe (dla $\lambda \cong 400\%$) w stosunku do powszechnie stosowanych materiałów neo-Hookeana i Mooneya-Rivlina.

Literatura

[1] Mooney M., A theory of large elastic deformations, J. Appl. Phys. 1940, 11. 582-592,

[2] Rivlin R.S., Large elastic deformations of isotropic materials, I Fundamental concepts. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A 1948, 240, 459-490.

[3] Ogden R.W., Elasticity and inelasticity of rubber. Mechanics and thermomechanics of rubberlike solids. CISM Couses and Lectures-No. 452, Springer 135-185, 2004.

[4] Saccomandi G., Universal Results in Finite Elasticity. Nonlinear Elasticity, London Mathematical Society, Lecture Note Series 283, Cambridge University Press 2001, 97-131.

[5] Jemioło S., Studium hipersprężystych własności materiałów izotropowych. Modelowanie i implementacja numeryczna, Prace naukowe, Seria Budownictwo 140, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2002.

[6] Kosiński S., Fale sprężyste w gumopodobnych kompozytach warstwowych, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2007.

[7] Zahorski S., A form of elastic potential for rubber-like materials, Archives of Mechanics 1959, 5, 613-617.

[8] Blatz P.J., Ko W.L., Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials, Trans. Soc. Rheol. 1962, 6, 223-251.

[9] Levinson M., Burgess I.W., A comparison of some simple constitutive relations for slightly compressinle rubber-like materials, Int. J. Mech. Sci. 1971, 13, 563-572.

[10] Ogden R.W., Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids, Proc. Roy. Soc. Lond. A 1972, 326, 565-584.

[11] Major M., Velocity of acceleration wave propagating in hyperelastic Zahorski and Mooney--Rivlin materials, Journal of Theoretical and Applied Mechanics 2005, 43, 4, 777-787.

[12] Zahorski S., Doświadczalne badania niektórych własności mechanicznych gumy, Rozprawy Inżynierskie 1962, 10, 1, 193-207.

Streszczenie

W pracy przeprowadzono obliczenia dla jednoosiowego rozciągania w hipersprężystym materiale Zahorskiego. Uzyskane wyniki porównano graficznie z wartościami dla powszechnie stosowanych materiałów Mooneya-Rivlina oraz neo-Hookeana.

Uniaxial stress state in hyperelastic Zahorski, Mooney-Rivlin and neo-Hooken material - a comparasion

Abstract

In this paper there are calculations for the uniaxial stretch in the hyperelastic Zahorski material. Graphically the results obtained were compared with values for commonly used materials Mooney--Rivlin and neo-Hookean.