

Ryszard Hulboj

ALGORYTM OBLICZANIA JEDNORODNEGO PODŁOŻA GRUNTOWEGO O KSZTAŁCIE WYPUKŁYM

Wprowadzenie

W celu zmniejszenia przekrojowych wartości sił wewnętrznych ławy fundamentowej należy zapewnić takie rozwiązanie, aby nacisk na grunt pod krawędziami ławy był minimalny lub równy zeru. W celu rozwiązania tego zagadnienia rozkład ciśnienia na grunt powinno wyznaczyć się według wzoru [1]:

$$q_x = \frac{n+1}{n} q_{sr} \left[1 - \left(\frac{|x|}{a} \right)^n \right] \quad (1)$$

gdzie:

q_{sr} - średnia wartość nacisku na grunt, równa $N/2 a$,

a - połowa szerokości płyty,

$n = 0 \div \infty$.

Przy rozkładzie nacisku na grunt wg równania (1), pod środkiem fundamentu, wystąpi wartość maksymalna, która uzależniona jest od stopnia potęgi n wyznaczonej ze wzoru:

$$q_o = q_{max} = \frac{n+1}{n} q_{sr}$$

Jak wynika z prowadzonych obliczeń [1], występujący rozkład naprężeń na poziomie posadowienia wg wzoru (1) spowoduje, że siły wewnętrzne w ławie fundamentowej będą znacznie mniejsze (ok. 30÷40% aniżeli w przypadku równomiernego rozkładu naprężeń). Daje to możliwość zmniejszenia zużycia zastosowanych materiałów przy realizacji fundamentów. Wytwarzanie ław o podstawie krzywoliniowej jest zagadnieniem bardzo skomplikowanym. Problem ten można rozwiązać, stosując budowę fundamentów ławowych na podłożu gruntowym o kształcie krzywoliniowym.

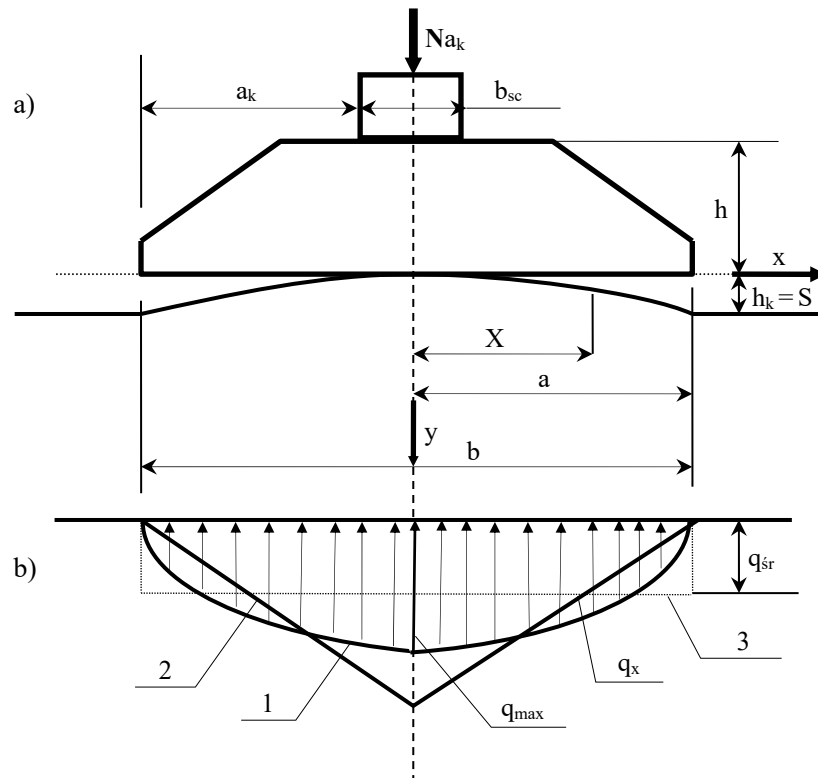
Do wyznaczenia kształtu podłoża gruntowego, który odpowiadałby rozkładowi naprężeń wg wzoru (1), należy zastosować następujące warunki (rys. 1):

- a) jeśli $n = 1$, wtedy ciśnienie na grunt będzie miało kształt trójkąta i $q_{\max} = 2q_{\text{sr}}$,
- b) przy $n = 2$ ciśnienie na grunt będzie miało kształt paraboli i $q_{\max} = 1,5q_{\text{sr}}$ (rys. 1b).

W zależności od potęgi n siły wewnętrzne w przekroju płyty można wyznaczyć wg wzorów podanych w monografii [1]:

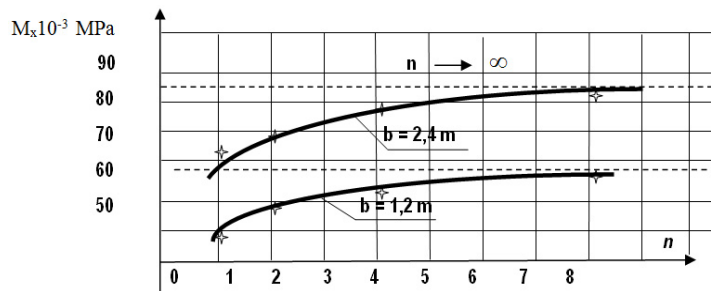
$$M_x = -q_{\text{sr}} \left[\frac{x^{n+2}}{a^n n(n+2)} - \frac{n+1}{2n} x^2 + ax + a^2 \left(\frac{n(n+1)+4}{2n(n+2)} - 1 \right) \right] \quad (2)$$

$$Q_x = -q_{\text{sr}} \left(\frac{x^{n+1}}{na^n} - \frac{n+1}{n} x + a \right)$$



Rys. 1. Schemat ławy fundamentowej o podstawie krzywoliniowej: a) przekrój poprzeczny, b) wykresy oporu podłoża w zależności od potęgi n przy $x = 0$: $n = 1$, $q_x = q_{\max} = 2q_{\text{sr}}$ (linia 1); $n = 2$, $q_x = q_{\max} = 1,5 q_{\text{sr}}$ (linia 2); $n = \infty$, $q_x = q_{\text{sr}}$ (linia 3)

Na rysunku 2 pokazano wykres momentu M_x obliczonego wg wzoru (2) w zależności od potęgi n .

Rys. 2. Wykres M_x w zależności od potęgi n

Analiza układu równań (2) pozwala na wyznaczenie M_x oraz Q_x o minimalnych wartościach w zależności od wielkości potęgi n . Jednak trzeba zauważyć, że przy $n = 1$ w środku płyty fundamentowej występuje ciśnienie q_{\max} , które może być większe od nośności granicznej gruntu. W takim przypadku w tej strefie pojawiają się odkształcenia plastyczne, które mogą mieć znaczny wpływ na nośność gruntu. Aby takie zjawisko nie miało miejsca, przy badaniach nośności gruntu przyjęto rozkład nacisku wg równania (1) przy wartości wykładnika potęgi $n \geq 2$.

1. Algorytm obliczania fundamentu ławowego na podłożu gruntowym o kształcie wypukłym

1.1. Wyznaczenie przemieszczeń

Do wyznaczenia naprężeń i odkształceń w podłożu gruntowym o kształcie wypukłym wykorzystamy równania teorii sprężystości. Jak wynika z wyżej przedstawionych rozwiązań, rozkład naprężeń w poziomie posadowienia wg wzoru (1) daje wartości sił wewnętrznych znacznie mniejsze niż w przypadku rozkładu równomiernego. Należy więc określić kształt podłoża gruntowego, który będzie odpowiadał rozkładowi naprężeń wg wzoru (1). Do rozwiązania tego zagadnienia zastosowano następujące równania teorii sprężystości (w warunkach rozwiązania płaskiego):

1) równania fizyczne (prawo Hooke'a dla gruntu jednorodnego):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E_0}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E_0}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E_0}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}\end{aligned}\quad (3)$$

2) równanie odkształcenia:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\quad (4)$$

3) równanie różniczkowe równowagi w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

γ - ciężar objętościowy;

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ - składowe naprężenia;

E_0 - moduł odkształcenia;

μ - współczynnik Poissona;

u i v - przemieszczenia w kierunkach osi x i y .

Ostatecznie otrzymano układ ośmiu równań o ośmiu niewiadomych. Oznacza to, że można matematycznie wyznaczać naprężenia w układzie płaskim (dwuwymiarowym). Rozwiązując układ ośmiu równań, można otrzymać układ równań różniczkowych z dwiema niewiadomymi u i v . Podstawiając równania (4) do równań (3), a następnie do równań (5), otrzymujemy następujące dwa równania różniczkowe:

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu E_0}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{E_0}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) &= 0 \\ \frac{E_0}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\mu E_0}{1-\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{E_0}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Przy badaniach naprężeń i odkształceń podłoża można zastosować metodę różnic skończonych [2]. Podłoże gruntowe zamienia się w jednorodną warstwę o skończonej grubości z zerowymi przemieszczeniami na granicy podłoża. Podłoże gruntowe może być naturalnie uwarstwione. W układzie (6) dla określenia u i v pochodne cząstkowe zastępuje się różnicami skończonymi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})/2\Delta x; & \frac{\partial v}{\partial y} &= (v_{i,j+1} - v_{i,j-1})/2\Delta y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{\Delta x^2}; & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 2v_{i,j}}{\Delta y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}}{4\Delta x \Delta y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{v_{i+1,j+1} + v_{i-1,j-1} - v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j+1}}{4\Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (7)$$

dla punktu (i, j) siatki, aproksymującej strefę gruntową (rys. 3), uzyskujemy wzory:

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= A_{11}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + A_{12}(v_{i-1,j-1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i+1,j+1}) + A_{13}(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \\ v_{i,j} &= A_{21}(v_{i+1,j} + v_{i-1,j}) + A_{22}(u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) + A_{23}(v_{i,j+1} + v_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$A_{11}, A_{12}, \dots, A_{23}$ - współczynniki zależne od μ i rozmiarów siatki $\Delta x \Delta y$:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{\Delta y^2}{2\Delta y^2 + (1-\mu)\Delta x^2}; & A_{12} &= \frac{0,125(1+\mu)\Delta x\Delta y}{2\Delta y^2 + (1-\mu)\Delta x^2} \\ A_{13} &= \frac{0,5(1-\mu)\Delta x^2}{2\Delta y^2 + (1-\mu)\Delta x^2}; & A_{21} &= \frac{\Delta x^2}{2\Delta x^2 + (1-\mu)\Delta y^2} \\ A_{22} &= \frac{0,125(1+\mu)\Delta x\Delta y}{2\Delta x^2 + (1-\mu)\Delta y^2}; & A_{23} &= \frac{0,5(1-\mu)\Delta y^2}{2\Delta x^2 + (1-\mu)\Delta y^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Z równań (8) wyznacza się przemieszczenia u i v dla punktów wewnętrznych, a dla punktów krańcowych z warunków granicznych.

1.2. Warunki graniczne

Z warunków granicznych wyznacza się przemieszczenia punktów na krawędzi siatki (rys. 3):

1. Pod podstawą fundamentu

$$\sigma_y = q_x - \gamma D \quad (10)$$

gdzie:

D - głębokość posadowienia fundamentu;

γD - obciążenie od ciężaru gruntu na głębokości D .

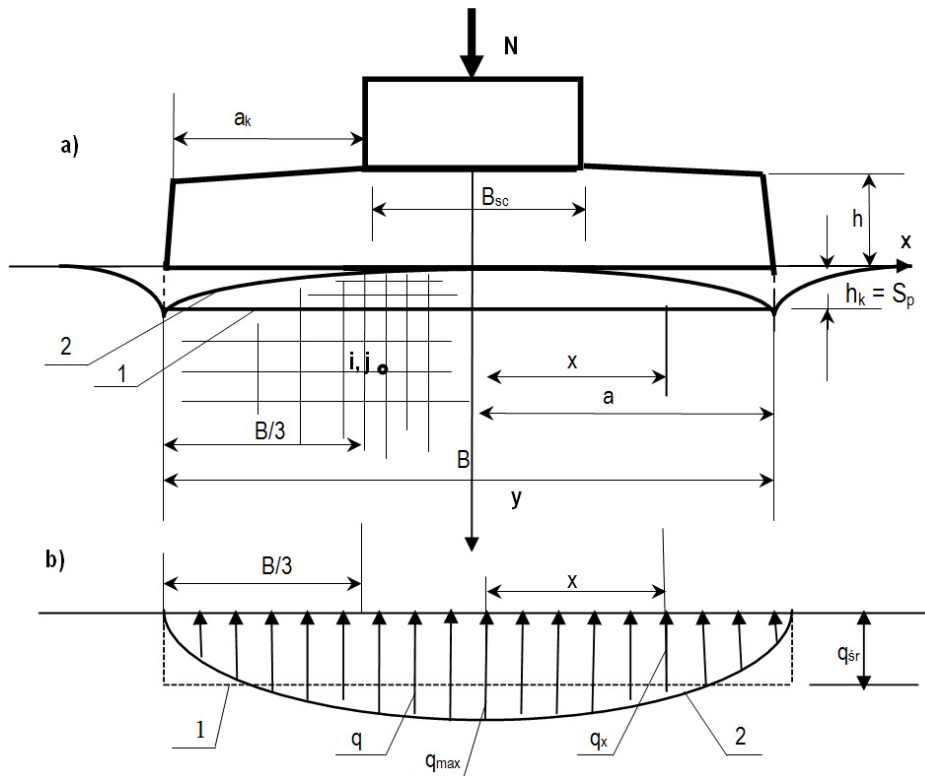
Ze wzoru (10), wyrażonego w różnicach skończonych, przy $D = 0$ otrzymano przemieszczenie pionowe punktów siatki na poziomie posadowienia fundamentu, tj.:

$$\sigma_y = \frac{\mu E_0}{2(1-\mu^2)\Delta x}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \frac{E_0}{2(1-\mu^2)\Delta y}(v_{i,j+1} - v_{i,j}) = -q_x$$

skąd:

$$v_{i,j} = \frac{\mu\Delta y}{\Delta x}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + v_{i,j+1} + \frac{2q_x(1-\mu^2)\Delta y}{E_0} \quad (11)$$

Przemieszczenie poziome $U_{i,j} = 0$.



Rys. 3. Ławy fundamentowe na podłożu o powierzchni: 1 - płaskiej, 2 - krzywoliniowej;
a) przekrój poprzeczny, b) naprężenia pod podstawą fundamentu

2. Dla nieobciążonej części powierzchni $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$,
wtedy:

$$U_{i,j} = \frac{\Delta x}{2\Delta y} (V_{i+1,j} - V_{i-1,j}) + U_{i,j+1} \quad (12)$$

$$V_{i,j} = \frac{\mu\Delta y}{\Delta x} (U_{i+1,j} - U_{i-1,j}) + V_{i,j+1}$$

3. Po krawędzi płaszczyzny przyjmujemy:

$$U_{i,j} = V_{i,j} = 0 \quad (13)$$

1.3. Równania do wyznaczenia naprężeń

Po wyznaczeniu przemieszczeń w podłożu gruntowym, wykorzystując prawo Hooke'a, można wyznaczyć naprężenia.

1. Dla wewnętrznych punktów siatki:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E_0}{2(1-\mu^2)\Delta x}(U_{i+1,j}-U_{i-1,j}) + \frac{\mu_0 E_0}{2(1-\mu_0^2)\Delta y}(V_{i,j+1}-V_{i,j-1}) \\
\sigma_y &= \frac{\mu_0 E_0}{2(1-\mu_0^2)\Delta x}(u_{i+1,j}-u_{i-1,j}) + \frac{E_0}{2(1-\mu^2)\Delta y}(v_{i,j+1}-v_{i,j-1}) \\
\tau_{xy} &= \frac{\mu_0 E}{4\Delta y}(U_{i,j+1}-U_{i,j-1}) + \frac{\mu_0 E}{4\Delta x}(V_{i+1,j}-V_{i-1,j})
\end{aligned} \quad (14)$$

2. Na obciążonej powierzchni (pod podstawą ławy fundamentowej):

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E_0}{2(1-\mu^2)\Delta x}(U_{i+1,j}-U_{i-1,j}) + \frac{\mu_0 E_0}{2(1-\mu_0^2)\Delta y}(V_{i,j+1}-V_{i,j}) \\
\sigma_y &= \frac{\mu_0 E_0}{2(1-\mu_0^2)\Delta x}(u_{i+1,j}-u_{i-1,j}) + \frac{E_0}{2(1-\mu_0^2)\Delta y}(v_{i,j+1}-v_{i,j}) = q_x \\
\tau_{xy} &= \frac{\mu_0 E}{4\Delta y}(U_{i,j+1}-U_{i,j-1}) + \frac{\mu_0 E}{4\Delta x}(V_{i+1,j}-V_{i,j})
\end{aligned} \quad (15)$$

3. Dla ław o podstawie płaskiej warunki graniczne dla powierzchni obciążonej przyjmujemy w przemieszczeniach:

$$U_{ij} = 0; V_{ij} = V_0$$

gdzie V_0 - osiadanie fundamentu, które wyznacza się z warunków równowagi.

$$N - \int_{-a}^a \sigma_y dx = 0$$

lub

$$q_x B - \int_{-a}^a \frac{E_0}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

skąd

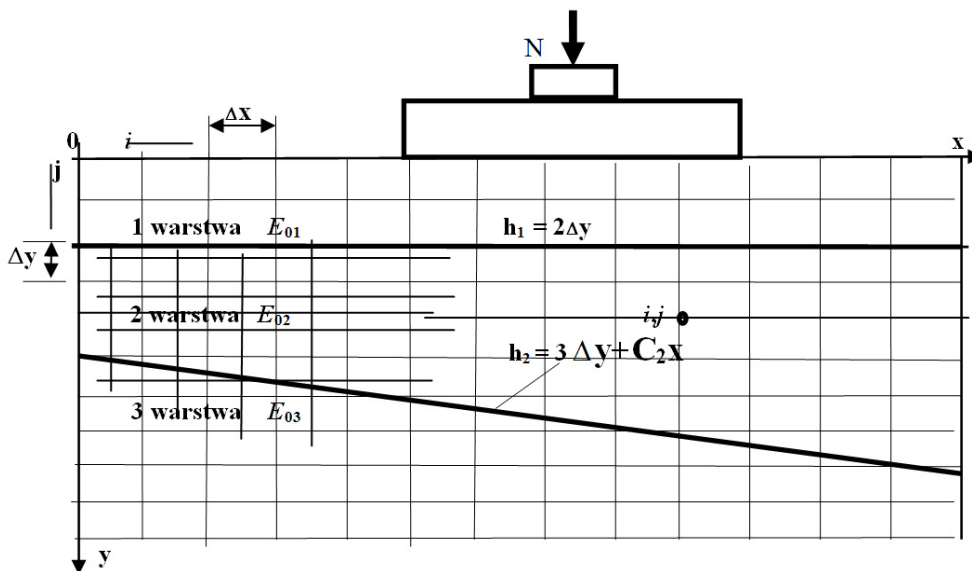
$$v_0 = \frac{\mu \Delta y}{\Delta x}(u_{i+1,j}-u_{i-1,j}) + v_{i,j+1} + \frac{2q_x(1-\mu^2)\Delta y}{E_0} \quad (16)$$

1.4. Wyznaczenie naprężeń i odkształceń w podłożu uwarstwionym

Jeżeli podłoże gruntowe składa się z warstw, różniących się znacznie między sobą właściwościami, to takie podłoże nazywamy podłożem niejednorodnym (uwarstwionym) i dla rozwiązania równania oraz wyznaczenia naprężeń i odkształ-

ceń w takim podłożu niezbędne jest określenie dodatkowych warunków (tzn. na granicy warstw przyjmujemy równość naprężeń (rys. 4)):

$$\sigma'_y = \sigma''_y; \quad \tau'_{xy} = \tau''_{xy} \quad (17)$$



Rys. 4. Schemat aproksymacji uwarstwionego podłoża

Stosując (14), można wyznaczyć naprężenia na granicy dwóch warstw:

1. Dla górnej warstwy:

$$\begin{aligned} \sigma'_y &= \frac{\mu_{01} E_{01}}{2(1-\mu_{01}^2)\Delta x} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \frac{E_{01}}{2(1-\mu_{01}^2)\Delta y} (v_{i,j} - v_{i,j-1}) \\ \tau'_{xy} &= \frac{\mu_{01} E_{01}}{4\Delta y} (U_{i,j} - U_{i,j-1}) + \frac{\mu_{01} E_{01}}{4\Delta x} (V_{i+1,j} - V_{i-1,j}) \end{aligned} \quad (18)$$

2. Dla dolnej warstwy:

$$\begin{aligned} \sigma''_y &= \frac{\mu_{02} E_{02}}{2(1-\mu_{02}^2)\Delta x} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \frac{E_{02}}{2(1-\mu_{02}^2)\Delta y} (v_{i,j+1} - v_{i,j}) \\ \tau''_{xy} &= \frac{\mu_{02} E_{02}}{4\Delta y} (U_{i,j+1} - U_{i,j}) + \frac{\mu_{02} E_{02}}{4\Delta x} (V_{i+1,j} - V_{i-1,j}) \end{aligned} \quad (19)$$

Wykorzystując warunki (17), wyznaczamy przemieszczenia punktów siatki na granicy dwóch warstw:

$$\begin{aligned}
 v_{i,j} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\mu_{02} A_2 - \mu_{01} A_1}{A_1 + A_2} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \frac{A_2}{A_1 + A_2} v_{i,j+1} + \frac{A_1}{A_1 + A_2} v_{i,j-1} \\
 u_{i,j} &= \frac{\mu_{02} E_{02}}{\mu_{01} E_{01} + \mu_{02} A_{02}} u_{i,j+1} - \frac{\mu_{01} E_{01}}{\mu_{01} E_{01} + \mu_{02} E_{02}} u_{i,j-1} - \frac{\Delta y}{\Delta x} (v_{i+1,j} - v_{i-1,j})
 \end{aligned} \tag{20}$$

gdzie:

A_1, A_2 - współczynniki, które wyznacza się wg wzorów:

$$A_1 = \frac{E_{01}}{2(1-\mu_{01}^2)}; \quad A_2 = \frac{E_{02}}{2(1-\mu_{02}^2)} \tag{21}$$

gdzie: E_{01}, E_{02} - moduły odkształceń pierwszej i drugiej warstwy podłoża; μ_{01}, μ_{02} - współczynniki poprzecznego odkształcenia pierwszej i drugiej warstwy podłoża.

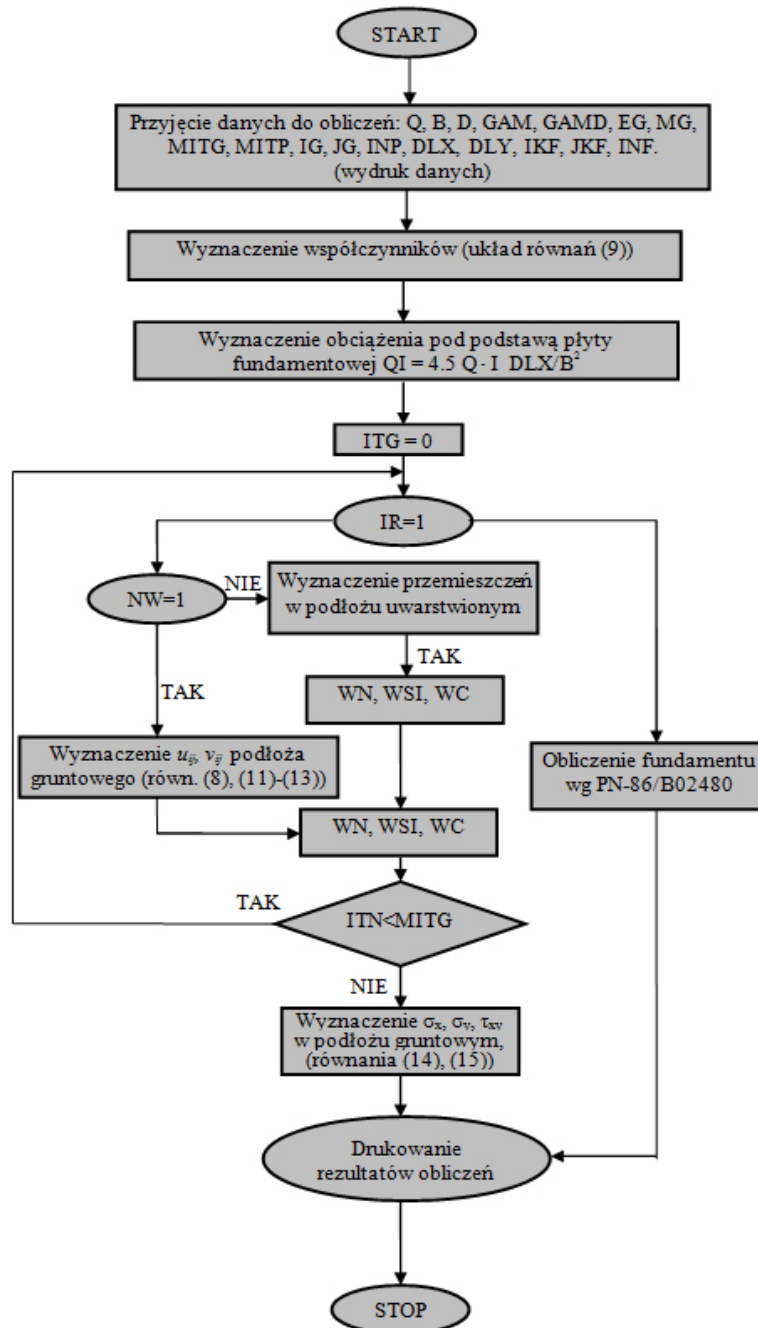
2. Algorytm obliczeń

Do obliczenia odkształceń i naprężeń w podłożu gruntowym o kształcie wypukłym pod fundamenty ławowe można wykorzystać istniejące metody programowania.

W programie do obliczania naprężeń i przemieszczeń w podłożu gruntowym fundamentu ławowego zastosowano następujące oznaczenia:

- Q - obciążenie na fundament, kN/m;
- B - szerokość ławy fundamentowej, m;
- D - głębokość posadowienia fundamentu, m;
- GAM - ciężar gruntu powyżej głębokości posadowienia, kN/m³;
- GAMD - ciężar gruntu poniżej głębokości posadowienia, kN/m³;
- EG - moduł edometryczny podłoża gruntowego, kPa;
- MG - współczynnik Poissona dla podłoża gruntowego;
- MITG - maksymalna ilość iteracji do podłoża gruntowego;
- IG - ilość punktów siatki w kierunku osi x;
- JG - ilość punktów siatki w kierunku osi y;
- INP - numer pierwszego punktu pod podstawą płyty fundamentowej;
- DLX - odległość między punktami siatki po osi x, m;
- DLY - odległość między punktami siatki po osi y, m;
- ISF - numer pierwszego więzła pod podstawą płyty fundamentowej;
- IR - współczynnik regulowania obliczeń podłoża: IR = 1 - wg PN,
- IR = 0 - o kształcie trapezowym;
- NW - ilość warstw w podłożu gruntowym;
- WH1 - grubość 1 warstwy;
- WCI - współczynnik nachylenia i-tej warstwy; jeśli WCI = 0, to warstwy zalegają równolegle.

Na rysunku 5 przedstawiono schemat blokowy programu komputerowego do obliczania naprężeń i przemieszczeń w podłożu gruntowym o kształcie wypukłym.



Rys. 5. Schemat blokowy programu komputerowego do obliczania naprężeń w podłożu gruntowym o kształcie wypukłym

Podsumowanie

Pod podstawą fundamentu ławowego wystąpi ciśnienie o rozkładzie parabolicznym z maksymalną wartością w środku ławy oraz wartościami zerowymi na krawędziach. Wskutek tego siły wewnętrzne w przekroju obliczeniowym spowodują obniżenie rozkładu ciśnienia, co w konsekwencji daje możliwość zaprojektowania bardziej ekonomicznych konstrukcji fundamentów ławowych.

Literatura

- [1] Hrytsuk M., Racjonalne konstrukcje fundamentów płytowych, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2010.
- [2] Винокуров Е.Ф., Итерационный метод расчета оснований и фундаментов с помощью ЭВМ, Наука и Техника, Минск 1973.

Streszczenie

W artykule podano algorytm obliczeń jednorodnego podłoża gruntowego o kształcie wypukłym. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń stwierdzono, że siły wewnętrzne w ławie fundamentowej uzyskują mniejsze wartości w porównaniu do równomiernego rozkładu naprężeń. Daje to możliwości ekonomicznego projektowania fundamentów.

Algorithmus zur Berechnung der Form eine homogene Masse Land Base

Zusammenfassung

Der Artikel gibt einen Algorithmus zur Berechnung der Spannungen und Verformungen in das Substrat Boden in der Form einer Parabel. Auf der Grundlage des Ergebnisses des Stiftungsrates Lava Druck auftritt, die einer parabolischen Kurve der maximale Wert in der Mitte der Platte und Null-Werte an den Rändern wird. Innere Kräfte, die im Querschnitt Berechnung auftreten verringert den Rechenaufwand Platte Druckverteilung, was wiederum macht es möglich, kostengünstige Bau der Fundamente.