

Witold Paleczek

## **ZWIĘKSZENIE ADEKWATNOŚCI APROKSYMACJI PROFILU NIECKI OBNIŻENIOWEJ NA PRZYKŁADZIE METODY OKREŚLANIA SZTYWNOŚCI GÓROTWORU W UJĘCIU EMPIRYCZNYM**

### **Wprowadzenie**

Problematyka budownictwa na terenach górniczych dotyczy głównie rozpatrywania zagadnień związanych z deformacjami górotworu (budowle podziemne) i deformacjami powierzchni terenu (budowle naziemne). Ugięcie warstw od oddziaływania nadkładu nad krawędzią eksploatowanego pokładu można udowodnić, między innymi wykorzystując zagadnienia mechaniki ciała stałego przy przyjęciu dla skał górotworu założeń teorii sprężystości i wytrzymałości materiałów, a więc jednorodności, izotropowości, sprężystości oraz zastosowań prawa Hooke'a. Istnieją tereny górnicze, gdzie prowadzono i zakończono eksploatację podziemną, mimo upływu długiego okresu czasu od zakończenia eksploatacji nie uzyskano na powierzchni terenu spodziewanych wartości maksymalnych obniżen wynikających z adekwatnych prognoz. Ma to miejsce szczególnie w takim górotworze, w którym występują warstwy sztywne o kilkudziesięciometrowej (i większej) grubości, np. sztywne warstwy piaskowca. Można przypuszczać, że wskutek zaciśnięcia pustki poeksploatacyjnej górotwór, poniżej spągu sztywnej warstwy, uległ znacznemu spękaniu, rozluźnieniu i obniżeniu, których wartość sumarycznych przemieszczeń pionowych po komprymacji górotworu mogłaby odpowiadać w przybliżeniu wartościom prognozowanym. Z powyższego może wynikać, że na powierzchni terenu mierzone są jedynie ugięcia warstw sztywnych. Pomiar geodezyjne wykazują, że są one znacznie mniejsze od spodziewanych wartości maksymalnych [5]. Może to oznaczać, że deformacje powierzchni terenu zostały w górotworze „zakumulowane” na pewien okres czasu. Poprzez analogię do zjawisk opisywanych w mechanice mogą zaistnieć w górotworze warunki prowadzące do przekroczenia „nośności” takiej warstwy sztywnej, wskutek czego jej materiał skalny, ulegając dyslokacji, może prowadzić do:

- nagłego zaciśnięcia pustek poeksploatacyjnych,
- wytworzenia się na powierzchni terenu (w stosunkowo krótkim czasie) deformacji nieciągłych (zapadliska, progi, uskoki powierzchniowe) lub niecki pełnej - w zależności od grubości nadkładu i rodzaju skał w nadkładzie,
- zainicjowania w danym rejonie sejsmiki indukowanej o znacznych wartościach.

Przemieszczenia pionowe powierzchni terenu powstałe wskutek podziemnej eksploatacji górniczej były rozpatrywane jako model ugięcia belki na sprężystym, jednoparametrycznym, jednokierunkowym podłożu według hipotezy E. Winklera w pracach [2-4]. Bazując na rzeczywistych danych przemieszczeń pionowych przekrojów niecki obniżeniowej, rozpatrywany model obliczeniowy może stanowić podstawę do określenia sztywności górotworu  $EJ$  i współczynnika jego sprężystości  $k$ . Z analiz wynika, że zagadnienie to można rozwiązać poprzez wprowadzenie w odpowiednich równaniach wielkości określającej początkowe przemieszczenie pionowe.

### 1. Równania linii osiadania jako ugięcia belki na podłożu sprężystym

Przekrój niecki obniżeniowej, jako analogia do zagadnienia ugięcia belki na podłożu sprężystym, rozważana była między innymi w pracach [2-5]. Ze wzorów przedstawionych w teorii A. Sałustowicza [4] równania linii przemieszczeń pionowych  $w$  zostały określone dla dwóch przedziałów:

- dla relacji  $x \leq 0$  (nad calizną):

$$w = 0,5 \cdot w_{\max} \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\alpha x) \quad (1)$$

- dla relacji  $x \geq 0$  (nad zrobami):

$$w = w_{\max} - 0,5 \cdot w_{\max} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\alpha x) \quad (2)$$

przy oznaczeniach:

$w_{\max}$  - obniżenie maksymalne,

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}},$$

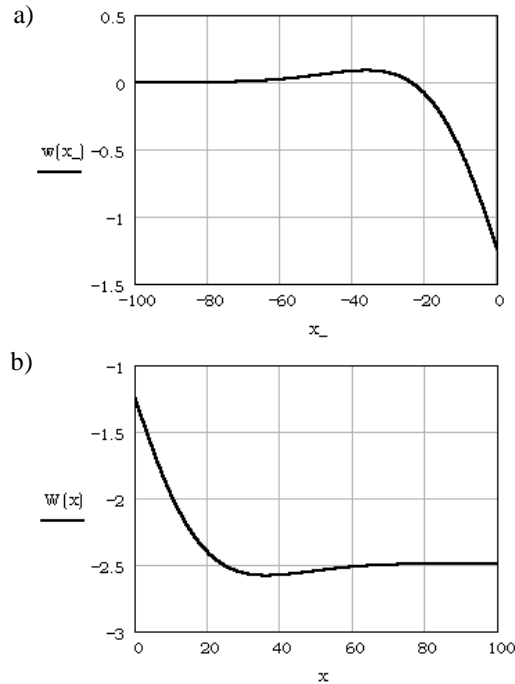
$k$  - współczynnik sprężystości warstw stropowych,

$J$  - moment bezwładności przekroju nadkładu; przyjmując jednostkową szerokość nadkładu oraz oznaczając przez  $w$  grubość belki moment bezwładności przekroju określono wzorem [2-4]:

$$J = \frac{w^3}{12}$$

$E$  - współczynnik określony wzorem [2-4]:  $E = \frac{E'}{1-\nu^2}$ , przy czym  $E', \nu$  - odpowiednio moduł Younga oraz liczba Poissona warstw stropowych.

Wizualizację wzorów (1) oraz (2) przedstawiono na wykresach (rys. 1).



Rys. 1. Wykresy linii przemieszczeń pionowych: a) nad calizną, według wzoru (1); b) nad zrobami, według wzoru (2)

## 2. Zagadnienie zwiększenia adekwatności aproksymacji danych z uwzględnieniem początkowego przemieszczenia pionowego

Można przyjąć tezę, że uwzględnienie parametru określającego początkowe przemieszczenie pionowe zwiększa adekwatność aproksymacji linii przemieszczeń pionowych przekroju niecki obniżeniowej, przy czym przez adekwatność rozumiana jest tu zgodność opisu procesu badanego (określonego rozwiązaniem modelem matematycznym) z jego rzeczywistym przebiegiem. Próbując sprostac temu założeniu, możemy przedstawic następujace rozumowanie: zakładamy, że określony zbiór wartości  $(x_i, w_i)$  aproksymowany jest funkcją [6]

$$w = F(x) \quad (3)$$

W celu zmniejszenia sumy kwadratów funkcji  $\sigma$  określonej równaniem

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (w_i - F(x_i))^2 \quad (4)$$

w której  $\Delta_i = w_i - F(x_i)$  przy  $i = 1, 2, \dots, n$  można założyć, że określony zbiór wartości  $(x_i, w_i)$  będzie aproksymowany inną funkcją

$$W = F(x) + w_w \quad (5)$$

w której  $w_w$  jest pewną wielkością dobraną z zależności wynikającej z równania

$$Q = \sum_{i=1}^n (w_i - F(x_i) - w_w)^2 \quad (6)$$

stąd

$$Q = \sum_{i=1}^n (w_w - \Delta_i)^2 \quad (7)$$

Z warunku koniecznego do tego, aby powyższa funkcja osiągnęła minimum, to jest

$$\frac{\partial Q}{\partial \Delta} = 2 \sum_{i=1}^n (w_w - \Delta_i) = 0 \quad (8)$$

można wyznaczyć w wyniku przekształceń wielkość  $w_w$

$$w_w = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i}{n} \quad (9)$$

Z warunku określonego zależnością

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \Delta^2} = 2n > 0 \quad (10)$$

widać, że funkcja  $Q$  osiąga najmniejszą wartość. Jeżeli zachodzi relacja taka, że  $w_w \neq 0$ , to uwzględnienie tej wielkości w funkcji aproksymującej zbiór danych określonych przez współrzędne  $(x_i, w_i)$  prowadzi do zwiększenia dokładności tej funkcji w sensie sumy kwadratów odchyłeń, gdyż zachodzi relacja  $Q < \sigma$ .

Możemy także założyć, że zbiór danych  $(x_i, w_i)$  aproksymuje inna funkcja określona wzorem

$$W = F(x) + w_w \cdot f(x) \quad (11)$$

w której  $f(x)$  spełnia następującą zależność:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) > 0 \quad (12)$$

Z warunku koniecznego do tego, aby funkcja określona zależnością

$$Q = \sum_{i=1}^n (w_i - F(x_i) - w_w \cdot f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n (w_w \cdot f(x_i) - \Delta_i)^2 \quad (13)$$

osiągnęła minimum, czyli

$$\frac{\partial Q}{\partial w_w} = 2 \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot (w_w \cdot f(x_i) - \Delta_i) = 0 \quad (14)$$

możemy w wyniku przekształceń wyznaczyć wielkość  $w_w$  określoną wzorem

$$w_w = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i \cdot f(x_i)}{\sum_{i=1}^n (f(x_i))^2} \quad (15)$$

Z warunku określonego relacją

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial w_w^2} = 2 \sum_{i=1}^n f^2(x_i) > 0 \quad (16)$$

wynika, że funkcja  $Q$  osiąga najmniejszą wartość - możemy zauważyć, że w szczególności, jeżeli zachodzi relacja  $f(x) = x$ , to wielkość  $w_w$  przez analogię można określić wzorem

$$w_w = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (17)$$

Z rozważań przedstawionych na przykładzie równań (5) oraz (11) wynika, że zastosowanie wielkości  $w_w$  teoretycznie wpływa na zwiększenie adekwatności

aproxymacji danych empirycznych funkcją ciągłą w rozpatrywanych przedziałach. Założono, że przykładową bazą danych empirycznych są przemieszczenia pionowe z przekroju niecki obniżeniowej, natomiast jako funkcję aproxymującą przyjęto równanie ugięcia belki na podłożu sprężystym z uwzględnieniem początkowego przemieszczenia pionowego.

### 3. Równania ugięcia belki sprężystej z uwzględnieniem początkowego przemieszczenia pionowego

W pracy [1] znajdujemy rozwiązanie zadania ugięcia belki na podłożu sprężystym według hipotezy E. Winklera, które odpowiednio dla przedziałów  $-\infty < x \leq 0$  oraz  $0 \leq x < +\infty$  określono następującymi wzorami:

$${}^{(-)}y(x) = \frac{-p}{8EJ\beta^3} \cdot e^{\beta \cdot x} \cdot (\cos(\beta x) - \sin(\beta x))$$

$${}^{(+)}y(x) = \frac{-p}{8EJ\beta^3} \cdot e^{-\beta \cdot x} \cdot (\cos(\beta x) + \sin(\beta x))$$

Przy uwzględnieniu rozważanego w niniejszej pracy początkowego przemieszczenia pionowego  $y_0$  ugięcie belki w przedziale  $0 \leq x < +\infty$  można określić równaniem

$${}^{(+)}y(x) = \frac{-p}{8EJ\beta^3} \cdot e^{-\beta \cdot x} \cdot (\cos(\beta x) + \sin(\beta x)) - y_0 \quad (18)$$

w którym:

- $p$  - natężenie obciążenia belki (tu: obciążenie nadkładem nad polem wyeksploatowanym),
- $EJ$  - iloczyn modułu Younga i momentu bezwładności przekroju belki (tu:  $EJ$  sztywność nadkładu),
- $y_0$  - początkowe przemieszczenie pionowe,

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$$

Przy uwzględnieniu początkowego przemieszczenia pionowego  $y_0$  w przedziale  $-\infty < x \leq 0$  ugięcie belki można określić równaniem

$${}^{(-)}y(x) = \frac{-p}{8EJ\beta^3} \cdot e^{\beta \cdot x} \cdot (\cos(\beta x) - \sin(\beta x)) - y_0 \quad (19)$$

Zakładając, że przemieszczenie pionowe belki w przedziale  $-\infty < x \leq 0$  można określić jako:

$${}^{(-)}w(x) = \frac{a_1}{a_2^3} e^{a_2 x} \cdot (\cos(a_2 x) - \sin(a_2 x)) - a_3 \quad (20)$$

to poszczególne parametry oznaczają:

$$a_1 = \frac{-p}{8EJ} \quad (21)$$

$$a_2 = \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \quad (22)$$

$$a_3 = y_0 \cong w_w \quad (23)$$

Przy założeniu, że zmienna  $p$  (poprzez analogię do obciążenia belki) jest obciążeniem nadkładem nad wyeksploatowanym polem oraz iloczyn  $EJ$  jest sztywnością górotworu, natomiast zmienna  $k$  jest współczynnikiem jego sprężystości, to przy znajomości wartości parametrów  $a_1, a_2, a_3$  obliczonych na podstawie danych empirycznych (przemieszczeń pionowych przekroju niecki) według wzorów (21) i (22) otrzymujemy układ 2 równań, z których można wyznaczyć  $EJ$  oraz  $k$ :

$$a_1 = \frac{-p}{8} \cdot \frac{1}{EJ} \quad (24)$$

$$a_2^4 = \frac{k}{4} \cdot \frac{1}{EJ} \quad (25)$$

to znaczy:

$$EJ = \frac{-p}{8a_1}$$

$$k = \frac{-a_2^4 p}{2a_1}$$

Można założyć, że obliczona wartość parametru  $a_3 \cong w_w$  mogłaby odpowiadać w przybliżeniu średniemu obniżeniu powierzchni terenu wskutek odwadniania górotworu.

#### 4. Zadanie aproksymacji przemieszczeń pionowych przekroju niecki obniżeniowej

W celu obliczenia wartości parametrów  $a_1, a_2, a_3$  we wzorze (20) w oparciu o dane liczbowe przemieszczeń pionowych przekroju niecki obniżeniowej w podziale na dwa przedziały rozwiązano zadanie aproksymacji danych empirycznych, analizując następujący układ równań:

– dla przedziału  $0 \leq x < +\infty$ :

$${}^{(+)}w(x) = \frac{a_1}{a_2^3} e^{-a_2 x} \cdot (\cos(a_2 x) + \sin(a_2 x)) - a_3 \quad (26)$$

$$Q = \sum_{i=1}^n \left( w_i - \left( \frac{a_1}{a_2^3} e^{-a_2 x_i} \cdot (\cos(a_2 x_i) + \sin(a_2 x_i)) - a_3 \right) \right)^2 = \min$$

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^n \left( w_i - \left( \frac{a_1}{a_2^3} e^{-a_2 x_i} \cdot (\cos(a_2 x_i) + \sin(a_2 x_i)) - a_3 \right) \right)^2 = \frac{1}{a_2^6} \cdot \left( na_3^2 a_2^6 - \frac{2na_1 f_1 a_3 a_2^3}{f_3} + \right. \\ &+ \frac{2na_1^2 f_1 f_2}{f_3^2} + \frac{na_1^2}{f_3^2} - \frac{2na_1 a_2^3 a_3 f_2}{f_3} + \sum_{i=1}^n \left( w_i^2 a_2^6 - \frac{2a_1 f_1 w_i a_2^3}{f_3} - \frac{2a_1 a_2^3 w_i f_2}{f_3} + 2a_2^6 a_3 w_i \right) \Bigg) \\ \frac{\partial Q}{\partial a_1} &= \frac{2}{a_2^6} \cdot \left( \frac{2na_1 f_1 f_2}{f_3^2} - \frac{nf_1 a_3 a_2^3}{f_3} + \frac{na_1}{f_3^2} - \frac{nf_2 a_2^3 a_3}{f_3} + \sum_{i=1}^n \left( -\frac{w_i a_2^3 f_1}{f_3} - \frac{w_i a_2^3 f_2}{f_3} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a_2} &= \frac{2a_1}{a_2^7} \cdot \left( \frac{3na_2^3 a_3 f_1}{f_3} - \frac{6na_1 f_1 f_2}{f_3^2} - \frac{3na_1}{f_3^2} + \frac{3na_3 a_2^3 f_2}{f_3} + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^n \left( \frac{3w_i a_2^3 f_1}{f_3} + \frac{2w_i a_2^4 x_i f_2}{f_3} + \frac{3w_i a_2^3 f_2}{f_3} - \frac{2a_1 a_2 f_1 f_2 x_i}{f_3^2} - \frac{2a_1 a_2 x_i}{f_3^2} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{2a_1 a_2 x_i f_1^2}{f_3^2} + \frac{2f_2 x_i a_2^4 a_3}{f_3} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_3} = \frac{2}{a_2^3} \cdot \left( na_3 a_2^3 - \frac{nf_1 f_3 a_1}{f_3} - \frac{na_1 f_2}{f_3} + \sum_{i=1}^n (w_i a_2^3) \right) = 0$$

przy oznaczeniach:

$$f_1 = \cos(a_2 x_i), \quad f_2 = \sin(a_2 x_i), \quad f_3 = \exp(a_2 x_i)$$

– dla przedziału określonego relacją  $-\infty < x \leq 0$ :

$${}^{(-)}w(x) = \frac{a_1}{a_2^3} e^{a_2 x} \cdot (\cos(a_2 x) - \sin(a_2 x)) - a_3 \quad (27)$$



$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{i=1}^n \left( w_i - \left( \left( \frac{a_1}{a_2^3} \cdot e^{a_2 \cdot x_i} \cdot (\cos(a_2 x_i) - \sin(a_2 x_i)) \right) - a_3 \right) \right)^2 = \min \\
Q &= \frac{1}{a_2^6} \left( na_2^6 a_3^2 - 2na_1^2 f_1 f_2 f_3^2 - 2na_1 a_2^3 a_3 f_1 f_3 + na_1^2 f_3^2 + \right. \\
&+ 2na_1 a_2^3 a_3 f_2 f_3 - \sum_{i=1}^n \left( 2a_1 a_2^3 f_1 f_3 w_i - a_2^6 w_i^2 - 2a_1 a_2^3 f_2 f_3 w_i - 2a_3 w_i a_2^6 \right) \Big) \\
\frac{\partial Q}{\partial a_1} &= \frac{-2}{a_2^6} \left( 2na_1 f_1 f_2 f_3^2 - na_1 f_3^2 - na_2^3 a_3 f_2 f_3 + \right. \\
&+ na_2^3 a_3 f_1 f_3 + \sum_{i=1}^n \left( a_2^3 w_i f_1 f_3 - a_2^3 w_i f_2 f_3 \right) \Big) = 0 \\
\frac{\partial Q}{\partial a_2} &= \frac{-2a_1}{a_2^7} \left( 3na_1 f_3^2 - 6na_1 f_1 f_2 f_3^2 - 3na_2^3 a_3 f_1 f_3 + 3nf_2 f_3 a_2^3 a_3 + \right. \\
&+ \sum_{i=1}^n \left( 3f_2 f_3 w_i a_2^3 - 3f_1 f_3 w_i a_2^3 - 2f_2 f_3 x_i w_i a_2^4 - 2a_1 a_2 f_3^2 x_i + \right. \\
&+ 2a_1 a_2 f_1 f_2 f_3^2 x_i - 2a_1 a_2 x_i f_3^2 + 2a_1 a_2 x_i f_1^2 f_3^2 - 2a_2^4 a_3 x_i f_2 f_3 \Big) \Big) = 0 \\
\frac{\partial Q}{\partial a_3} &= \frac{2}{a_2^3} \left( na_2^3 a_3 - na_1 f_1 f_3 + na_1 f_2 f_3 + \sum_{i=1}^n \left( w_i a_2^3 \right) \right) = 0
\end{aligned}$$

przy oznaczeniach:

$$f_1 = \cos(a_2 x_i), \quad f_2 = \sin(a_2 x_i), \quad f_3 = \exp(a_2 x_i)$$

W wyniku analizy układu równań (26) określonych dla przedziału  $0 \leq x < +\infty$  (dla danych liczbowych przemieszczeń pionowych z przekroju niecki obniżeniowej przedstawionej na rysunku 2) otrzymano następujące wartości parametrów:

$$a_1 = -7,0524596 \times 10^{-8}$$

$$a_2 = 0,003450646$$

$$a_3 = 0,264626336$$

Wartości te umożliwiły utworzenie wzoru empirycznego aproksymującego analizowany zbiór danych

$$^{(+)} w(x) = \frac{-7,05246 \cdot 10^{-8}}{0,00345^3} e^{-0,00345x} \cdot (\cos(0,00345 \cdot x) + \sin(0,00345 \cdot x)) - 0,265 \quad (28)$$

Wizualizację przebiegu funkcji według wzoru (28) przedstawiono na wykresie (rys. 2).

Dla przedziału określonego relacją  $-\infty < x \leq 0$  na podstawie analizy równań (27) otrzymano wartości parametrów:

$$a_1 = -1,45167 \times 10^{-7}$$

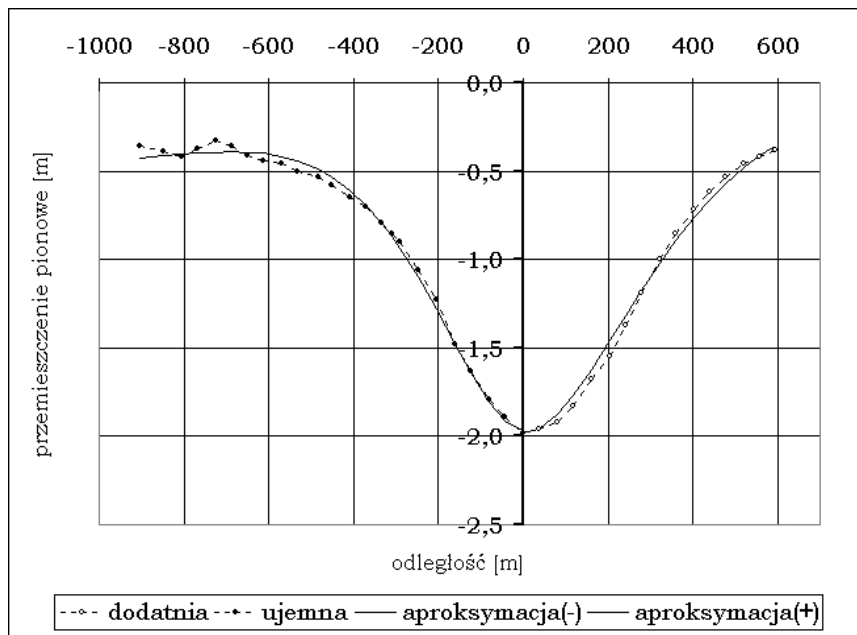
$$a_2 = 0,0045797$$

$$a_3 = 0,4562287$$

które pozwoliły utworzyć wzór empiryczny aproksymujący analizowany zbiór danych:

$${}^{(-)}w(x) = \frac{-1,4517 \cdot 10^{-7}}{0,00458^3} e^{0,00458 \cdot x} \cdot (\cos(0,00458 \cdot x) - \sin(0,00458 \cdot x)) - 0,456 \quad (29)$$

Prezentację otrzymanych wzorów empirycznych oraz danych przemieszczeń pionowych niecki obniżeniowej w poszczególnych przedziałach przedstawiono na wykresie (rys. 2).



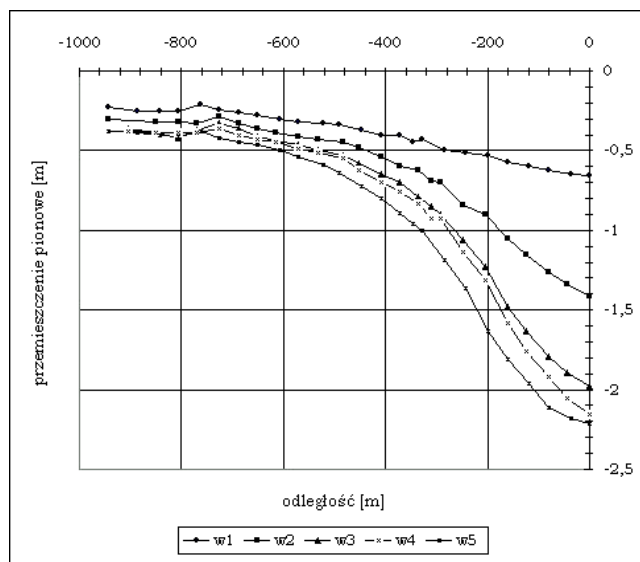
Rys. 2. Aproksymacja przemieszczeń pionowych niecki obniżeniowej funkcją ugięcia belki na podłożu sprężystym (według wzorów (28) oraz (29))

Na rysunku 3 przedstawiono dane przemieszczeń pionowych tej samej niecki obniżeniowej w różnych interwałach czasowych. Interwały te przyjęto dla kolejnych faz niecki według oznaczeń zamieszczonych w tabeli 1.

TABELA 1

**Zestawienie przedziałów czasowych dla poszczególnych faz niecki obniżeniowej**

Oznaczenie fazy niecki (rys. 3)	Przedział czasowy [doba]
w1	0
w2	457
w3	670
w4	823
w5	1188



Rys. 3. Przemieszczenia pionowe powierzchni terenu w określonych interwałach czasowych (opis w tekście)

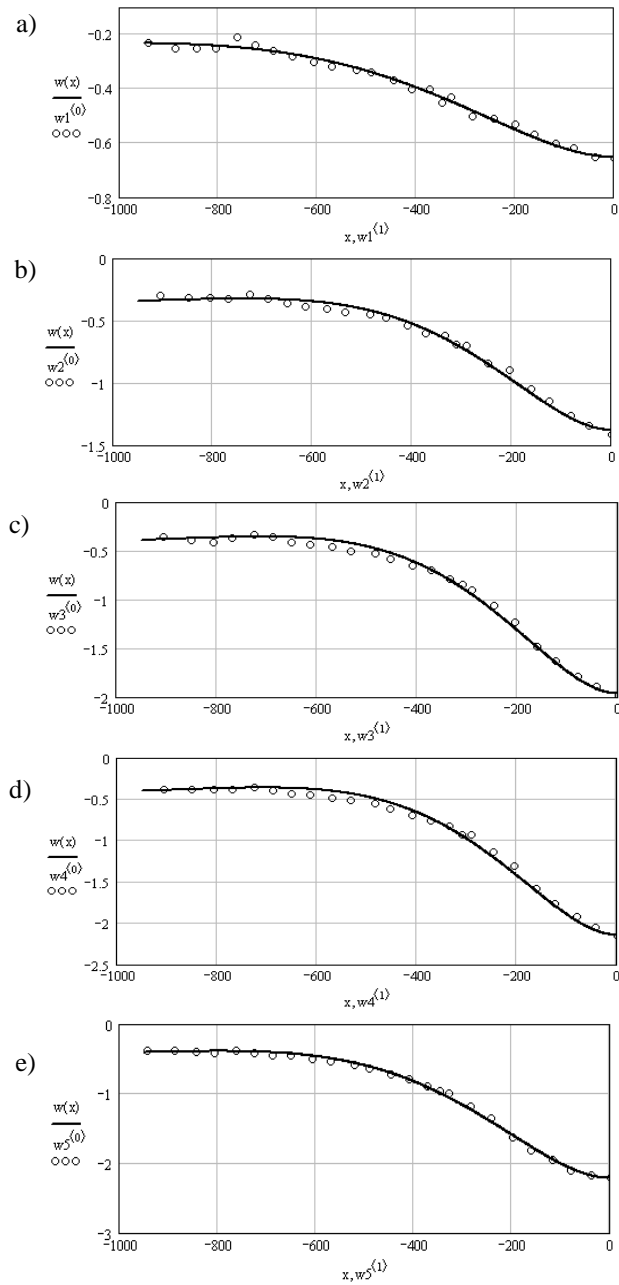
W wyniku obliczeń otrzymano wartości parametrów  $a_1, a_2, a_3$  dla kolejnych faz niecki obniżeniowej przedstawionych na rysunku 3 dla relacji  $-\infty < x \leq 0$ . Wartości obliczone zestawiono w tabeli 2.

TABELA 2

**Zestawienie obliczonych wartości parametrów modelu funkcji aproksymującej dane dla poszczególnych faz niecki obniżeniowej (według danych przemieszczeń pionowych przedstawionych na rysunku 3)**

Oznaczenie	Czas [doba]	$ a_1 $	$a_2$	$a_3$
w1	0	$0,01225412 \times 10^{-6}$	0,00312157	0,24976693
w2	457	$0,07815579 \times 10^{-6}$	0,00426194	0,36919301
w3	670	$0,13342971 \times 10^{-6}$	0,00442262	0,42275267
w4	823	$0,14957110 \times 10^{-6}$	0,00444160	0,43651070
w5	1188	$0,10669835 \times 10^{-6}$	0,00393696	0,46718146

Na rysunku 4 przedstawiono wizualizację wyników aproksymacji danych funkcją określoną wzorem (27).

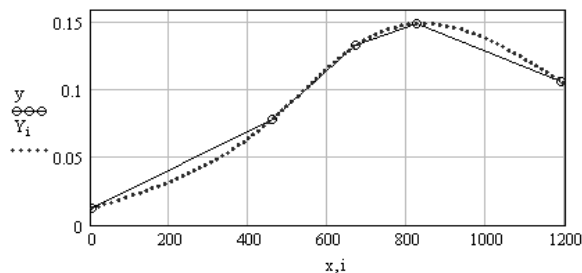


Rys. 4. Wizualizacja wyników aproksymacji danych przemieszczeń pionowych

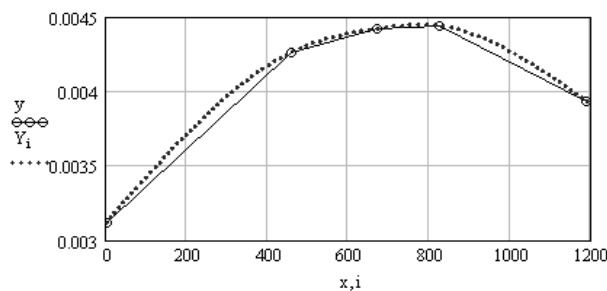
W celu określenia zmian  $EJ$  oraz  $k$  w czasie wykonano analizę, która obejmowała:

- zestawienie jako punktów węzłowych wartości parametrów  $a_1, a_2, a_3$  w funkcji czasu  $t$  (patrz tab. 2),
- interpolację punktów węzłowych splinami sześciennymi,
- aproksymację obliczonych wartości funkcją określoną wzorem

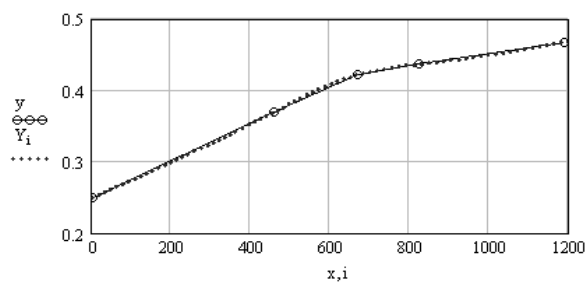
$$a_i(t) = A_{0(*)} + A_{1(*)} \sin(b_{1(*)}t) + A_{2(*)} \sin(b_{2(*)}t) + A_{3(*)} \cos(b_{1(*)}t) + A_{4(*)} \cos(b_{2(*)}t) \quad (30)$$



Rys. 5. Zestawienie wartości parametru  $a_1$  w funkcji czasu (oznaczenie kółeczkami); interpolacja splinami sześciennymi punktów węzłowych (oznaczenie linią kropkowaną)



Rys. 6. Zestawienie wartości parametru  $a_2$  w funkcji czasu (oznaczenie kółeczkami); interpolacja splinami sześciennymi punktów węzłowych (oznaczenie linią kropkowaną)



Rys. 7. Zestawienie wartości parametru  $a_3$  w funkcji czasu (oznaczenie kółeczkami); interpolacja splinami sześciennymi punktów węzłowych (oznaczenie linią kropkowaną)

Zestawienie obliczonych wartości poszczególnych parametrów modelu funkcji określonej wzorem (30) w analizowanym przedziale danych (rys. rys. 5-7) przedstawiono w formie następujących wzorów empirycznych (31)-(33):

$$a_1(t) = \frac{\left( \frac{-500}{2697} + \frac{224}{845} \sin\left(\frac{t}{10^3}\right) - \frac{258 \sin\left(\frac{7 \cdot t}{10^3}\right)}{19615} + \frac{486 \cos\left(\frac{t}{10^3}\right)}{2707} + \frac{151 \cos\left(\frac{7 \cdot t}{2^3 \cdot 5^3}\right)}{10189} \right)}{10^6} \quad (31)$$

$$a_2(t) = \frac{33}{16486} + \frac{94 \sin\left(\frac{3 \cdot t}{2^4 \cdot 5^3}\right)}{42893} + \frac{\sin\left(\frac{3 \cdot t}{400}\right)}{93458} + \frac{54 \cos\left(\frac{3 \cdot t}{2^4 \cdot 5^3}\right)}{48583} - \frac{3 \cos\left(\frac{3 \cdot t}{400}\right)}{447761} \quad (32)$$

$$a_3(t) = \frac{255}{1537} + \frac{1103}{3762} \sin\left(\frac{t}{10^3}\right) - \frac{43 \sin\left(\frac{t}{125}\right)}{5898} + \frac{2379}{28618} \cos\left(\frac{t}{10^3}\right) + \frac{26 \cos\left(\frac{t}{125}\right)}{9505} \quad (33)$$

Otrzymane wzory umożliwiły określenie przemieszczeń pionowych w funkcji czasu. Pomogły także określić - przez analogię do krzywej ugięcia belki na podłożu sprężystym - zmiany sztywności  $EJ$  oraz współczynnika sprężystości  $k$  górotworu w funkcji czasu, co wyrażono wzorem

$$w(x, t) = \frac{-a_1(t)}{(a_2(t))^3} \cdot e^{x \cdot a_2(t)} \cdot (\cos(xa_2(t)) - \sin(xa_2(t))) - a_3(t) \quad (34)$$

Kontynuując założenie, że zachodzi relacja  $a_3 \cong w_w$ , to uzasadnione może być przyjęcie tezy, iż otrzymano wzór empiryczny (bazując na danych z analizowanego przykładu), który określa zmiany obniżen powierzchni terenu wskutek odwadniania górotworu w funkcji czasu

$$a_3(t) \cong w_w(t)$$

gdzie:  $t$  - czas w dobach (dla analizowanego tu przedziału  $t \in \langle 0; 1188 \rangle$ ).

Przyjęto, że obniżenia określone wzorem (33) odpowiadają przebiegowi funkcji

$$|a_3(t)| = \frac{b_1}{1 + b_2 \cdot \exp(-b_3 \cdot t)} \quad (35)$$

W celu obliczenia wartości parametrów  $b_1, b_2, b_3$  występujących w równaniu określonym wzorem (35) przeanalizowano następujący układ równań:

$$Q = \sum_{i=1}^n \left( a_{3_i} - \left( \frac{b_1}{1 + b_2 \exp(-b_3 t_i)} \right) \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(b_1 f - a_{3_i} b_2 - a_{3_i} f)^2}{(f + b_2)^2} \quad (35a)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_1} = 2 \sum_{i=1}^n f \frac{b_1 f - a_{3_i} f - a_{3_i} b_2}{(f + b_2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_2} = -2b_1 \sum_{i=1}^n f \frac{b_1 f - a_{3_i} b_2 - f a_{3_i}}{(f + b_2)^3} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_3} = 2b_1 b_2 \sum_{i=1}^n t_i f \frac{b_1 f - a_{3_i} b_2 - f a_{3_i}}{(f + b_2)^3} = 0$$

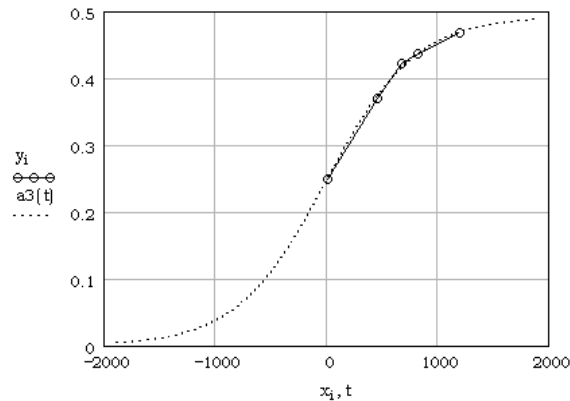
przy oznaczeniu:

$$f = \exp(b_3 t_i)$$

W wyniku obliczeń, na podstawie wartości zawartych w tabeli 2 uzyskano wartości parametrów  $b_1, b_2, b_3$ , umożliwiające utworzenie następującego wzoru empirycznego:

$$|w_w(t)| = \frac{0,492244}{1 + 0,979436 \cdot e^{-0,002495t}} \quad (36)$$

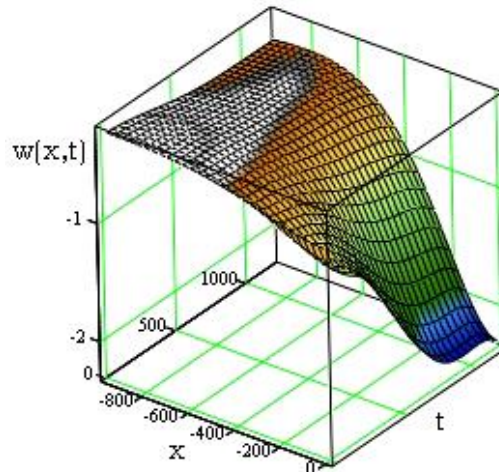
Wizualizację przebiegu funkcji (36) oraz punktów empirycznych przedstawiono na rysunku 8.



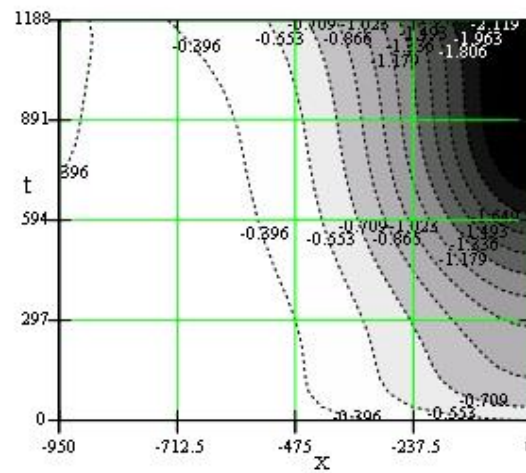
Rys. 8. Wizualizacja funkcji (36) oraz dane empiryczne

Na podstawie otrzymanych wzorów empirycznych przedstawiono poglądowo wizualizację zmian przemieszczeń pionowych w czasie, którą przedstawiono na rysunku 9.

a)



b)



Rys. 9. Wykresy obrazujące funkcję określoną wzorem (34): powierzchnia (a) i jej mapa izolinii obniżeń (b)

Kontrolę przeprowadzonej analizy wykonano, obliczając obniżenie maksymalne  $w_{\max}$  dla kolejnych faz obniżeń niecki, wykorzystując do tego wartości parametrów zawartych w tabeli 2 - według wzorów:

$$w_{\max} = \frac{p}{8EJ \left( \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \right)^3} + w_w \quad (37)$$



$$|w_{\max}| = \frac{|a_1|}{a_2^3} + a_3 \quad (38)$$

Obliczenia kontrolne przedstawiono w tabeli 3 (porównaj otrzymane wartości  $w_{\max}$  z przemieszczeniami pionowymi maksymalnymi, które zaprezentowano na rysunku 3).

TABELA 3

Obliczenie  $w_{\max}$  dla kolejnych faz niecki obniżeniowej według wzoru (38)

Ozn.	$t$ [doba]	$ a_1 $	$a_2$	$a_3$	$w_{\max}$ (wg wzoru (38))
w1	0	$0,01225412 \times 10^{-6}$	0,00312157	0,24976693	$0,403 + 0,250 = 0,653$
w2	457	$0,07815579 \times 10^{-6}$	0,00426194	0,36919301	$1,010 + 0,369 = 1,379$
w3	670	$0,13342971 \times 10^{-6}$	0,00442262	0,42275267	$1,542 + 0,423 = 1,965$
w4	823	$0,14957110 \times 10^{-6}$	0,00444160	0,43651070	$1,707 + 0,437 = 2,144$
w5	1188	$0,10669835 \times 10^{-6}$	0,00393696	0,46718146	$1,749 + 0,467 = 2,216$

### 5. Algorytm obliczania wartości estymatorów parametrów równań aproksymujących dane empiryczne

W algorytmie obliczenia wartości parametrów modeli funkcji aproksymującej dane empiryczne przedstawionych w niniejszej pracy wykorzystano podprogramy omówione szczegółowo w pracach [5-7]. W celu wyznaczenia wartości początkowych estymatorów parametrów zastosowano metodę rozwiązywania układów równań nieliniowych omówioną w pracy [6, s. 254-262].

W prezentowanym autorskim algorytmie założono, że wartości początkowe poszczególnych parametrów  $a_1, a_2, \dots, a_n$  funkcji  $F(w_i, t_i, a_1, a_2, \dots, a_n)$  aproksymującej dane empiryczne (określone parą współrzędnych  $w_i, t_i$ ) wynoszą odpowiednio  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Dokładne wartości (przy założonych kryteriach zbieżności) w kolejnych iteracjach możemy uzyskać z proponowanego algorytmu określonego następującymi formułami:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + \Delta_1 \\ A_2 + \Delta_2 \\ \dots \\ A_n + \Delta_n \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_n \end{pmatrix} = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \quad (40)$$

przy oznaczeniach:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial a_1} & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial a_n} \\ \frac{\partial F^{(2)}}{\partial a_1} & \frac{\partial F^{(2)}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial F^{(2)}}{\partial a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^{(n)}}{\partial a_1} & \frac{\partial F^{(n)}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial F^{(n)}}{\partial a_n} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} [\bar{w}(t_i) - F(t_i)]^{(1)} \\ [\bar{w}(t_i) - F(t_i)]^{(2)} \\ \dots \\ [\bar{w}(t_i) - F(t_i)]^{(n)} \end{pmatrix}$$

Za pomocą przedstawionego algorytmu przeprowadzono obliczenia wartości estymatorów parametrów modeli funkcji aproksymujących dane empiryczne analizowane w niniejszej pracy.

### Wnioski

Rozpatrywane w niniejszej pracy modele funkcji aproksymujących analizowane dane uwzględniają początkowe przemieszczenie pionowe  $y_0$  ujęte w równaniach (18) i (19). Wprowadzenie wielkości  $y_0$  do analizowanych równań może być ich uogólnieniem. Jej wprowadzenie umożliwiło uzyskanie rozwiązania zadania aproksymacji profilu niecki obniżeniowej funkcją wynikającą z linii ugięcia płyty na podłożu sprężystym na podstawie danych rzeczywistych przemieszczeń pionowych przekroju niecki osiadania. Zakładając, że sztywność warstw górotworu jest określona iloczynem  $EJ$  oraz współczynnikiem sprężystości  $k$  - według równań określonych wzorami (24) i (25) - to wartości liczbowe tych wielkości, uzyskiwane z rozwiązań zadań analogicznych, mogą być wykorzystywane między innymi do określania obniżeń maksymalnych niecki obniżeniowej. Przedstawiona metoda analizy przemieszczeń pionowych w przekrojach pionowych niecki obniżeniowej z uwzględnieniem określonych przedziałów czasowych umożliwia także oszaco-

wanie wartości obniżeń powierzchni terenu wskutek odwadniania górotworu. Należy nadmienić, że przy rozpatrywaniu analizowanych zagadnień przyjęto założenia wyrażające się analogiami matematycznymi pomiędzy funkcją obniżenia chwilowego a rozwiązaniem wynikającym z równania różniczkowego ugięcia belki na podłożu sprężystym - nie uwzględniono tutaj istoty zjawiska.

### Literatura

- [1] Bielajew N.M., Wytrzymałość materiałów, MON, Warszawa 1954.
- [2] Borecki M., Chudek M., Mechanika górotworu, Wydawnictwo Śląsk, Katowice 1972.
- [3] Ochrona powierzchni przed szkodami górniczymi, praca zbiorowa pod redakcją M. Boreckiego, Wydawnictwo Śląsk, Katowice 1980.
- [4] Sałustowicz A., Mechanika górotworu, Górnictwo, t. III, Wydawnictwo Górnico-Hutnicze, Katowice 1955.
- [5] Paleczek W., Metoda określania wielkości i zasięgu deformacji powierzchni terenu powodowanych podziemną eksploatacją złóż z uwzględnieniem własności geomechanicznych skał górotworu, Polska Akademia Nauk, Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej, Instytut Podstawowych Problemów Techniki, Studia z Zakresu Inżynierii nr 58, Warszawa 2007.
- [6] Paleczek W., Metody analizy danych, Wydawnictwa Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2004.
- [7] Paleczek W., Mathcad w algorytmach, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2005.

### Streszczenie

Przedstawiono zagadnienie związane z deformacjami górotworu i powierzchni terenu jako problematyki dotyczącej budownictwa na terenach górniczych. Omówiono zagadnienie dotyczące zwiększenia adekwatności aproksymacji przemieszczeń pionowych niecki obniżeniowej funkcją zadanego modelu na przykładzie proponowanej metody określania sztywności górotworu w ujęciu empirycznym. Wykorzystano analizę danych przemieszczeń pionowych w przekroju niecki obniżeniowej z uwzględnieniem analogii do rozwiązania zagadnienia ugięcia belki sprężystej na podłożu sprężystym według hipotezy E. Winklera. Wykazano, że uwzględnienie zaproponowanego przemieszczenia w rozważanych równaniach może być ich uogólnieniem.

### Zusammenfassung

Dargestellt wurde das Problem der Deformation des oberliegenden Gestein und Oberfläche des Terrains als die Bauwesensfragen auf den bergmännischen Gebieten. Dargestellt wurde ein Problem betreff der Vergrößerung der Übereinstimmung der Approximation von vertikalen Verlagern der Senkungsmulde auf dem Beispiel der Methode der Bestimmung von Steifheit oberliegenden Gesteins in empirischen Fassung. Es wurde eine Datenanalyse der vertikalen Verlagern in dem Querschnitt der Senkungsmulde mit der Berücksichtigung von einer Analogie in der Lösung des Problems der Beugung einer elastischen Balken auf elastischem Grund nach der Hypothese von der E. Winkler, gebraucht. Es wurde aufgewiesen, dass die Berücksichtigung vorgeschlagenen Verlagerung in erwo-genen Gleichungen eine Verallgemeinerung sein könnte.