

Halina Kubiak, Maksym Grzywiński

WRAŻLIWOŚĆ POWŁOKI CYLINDRYCZNEJ NA ZMIANĘ GRUBOŚCI

Wstęp

Zadaniem analizy wrażliwości konstrukcji jest opisanie zależności pomiędzy odpowiedzią determinowaną przez rozwiązanie zagadnienia ekstremów funkcjonałów a projektowanymi dostępnymi zmiennymi stosowanymi w fazie wejściowej procesu rozwiązania. Jako miernik odpowiedzi konstrukcji możemy traktować przemieszczenia, naprężenia, siły krytyczne lub np. częstość drgań własnych konstrukcji. Jako zmienne projektowe mamy takie parametry, jak pole przekroju belek i kratownic, grubość płyt i powłok itp.

Zaznaczyć należy, że nawet w przypadku układów liniowo sprężystych, układ równań może być opisany nieliniowymi funkcjami zależnymi od stałych i zmiennych projektowych. Gradient funkcjonału odpowiedzi konstrukcji z uwzględnieniem charakterystyki zmiennych projektowych opisuje odchylenie zmian projektowych. Istnieją dwie metody pozwalające na obliczenie wrażliwości miernika odpowiedzi na zmienne projektowe konstrukcji [1-3]. Są nimi metoda różniczkowania bezpośredniego oraz metoda zmiennej sprzężonej.

1. Metoda różniczkowania bezpośredniego

Jeśli rozpatrywać będziemy układ statyczny liniowo sprężysty konstrukcji o N stopniach swobody, zdefiniowany przez funkcjonał

$$\mathcal{G}(h^d) = G[(q_\alpha(h^d), h^d)] \quad \alpha = 1, 2, \dots, N; \quad d = 1, 2, \dots, D \quad (1)$$

gdzie G jest daną funkcją od powyższych argumentów, h^d jest D -wymiarowym wektorem zmiennej projektowej i q_α jest wektorowym przemieszczeniem węzła - rodzaj parametru.

Wektor przemieszczenia spełnia równanie równowagi

$$K_{\alpha\beta}(h^d)q_\beta(h^d) = Q_\alpha(h^d) \quad (2)$$

gdzie sztywność $K_{\alpha\beta}$ i wektor obciążeń Q_α są funkcjami zmiennej projektowej, wektor przemieszczenia q_β założono jako funkcję uwikłaną od tej zmiennej. Zadaniem SDS (Structural Design Sensitivity) jest określenie zmian w odpowiedzi konstrukcji na zmianę w parametrach projektowych, innymi słowy szukamy gradientu wrażliwości $\partial G / \partial h^d$.

Używając zapisu liniowego

$$\mathcal{G}^d = G^d + G_{,\alpha} \cdot q_\alpha^d \quad (3)$$

gdzie $(\cdot)^d$ i $(\cdot)_\alpha$ oznacza pierwszą pochodną cząstkową po d -tej zmiennej projektowej i odpowiednio α przemieszczeniu.

Zakładając, że $K_{\alpha\beta}(h^d)$ i $Q_\alpha(h^d)$ są gładko różniczkowalne po zmiennych projektowych h^d , zgodnie z teorią funkcji uwikłanej wektor $q_\alpha(h^d)$ jest również gładko różniczkowalny. Różniczka równania (2) po h^d prowadzi do

$$K_{\alpha\beta} \cdot q_\alpha^d = Q_\alpha^d - K_{\alpha\beta}^d q_\beta \quad (4)$$

Macierz sztywności $K_{\alpha\beta}$ założono jako nieosobliwą. Równanie (4) może być rozwiązane dla q_α^d , co po podstawieniu do równania (3) da nam zależność

$$\mathcal{G}^d = G^d + G_{,\alpha} \cdot K_{\alpha\beta}^{-1} (Q_\alpha^d - K_{\alpha\gamma}^d \cdot q_\gamma) \quad (5)$$

Powyższą metodę nazywa się metodą bezpośredniego różniczkowania. Metoda ta jest często stosowana w optymalizacji konstrukcji.

2. Metoda zmiennej sprzężonej

Alternatywną metodą obliczania wrażliwości jest metoda, która może być przedstawiona przez określenie wektora zmiennej sprzężonej λ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$, co daje

$$\lambda_\alpha = G_{,\beta} \cdot K_{\alpha\beta}^{-1} \quad (6)$$

które prowadzi do równania sprzężonego dla wektora λ_α w postaci

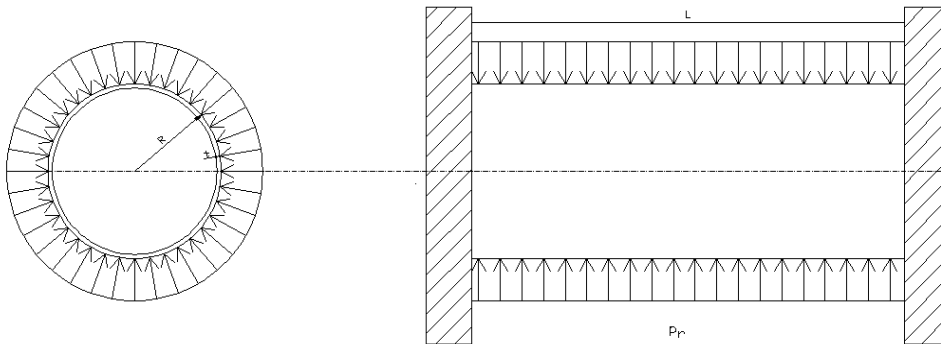
$$K_{\alpha\beta} \cdot \lambda_\beta = G_{,\alpha} \quad (7)$$

Mając rozwiązanie równania (7) dla zmiennej sprzężonej λ_β , współczynnik gradientu wrażliwości może być zapisany jako

$$G^d = G^d + \lambda_\alpha \cdot (Q_\alpha^d - K_{\alpha\beta}^d \cdot q_\beta) \quad (8)$$

3. Przykład

Celem przykładu jest zbadanie wrażliwości przemieszczenia powłoki cylindrycznej (rys. 1) ze względu na zmianę grubości powłoki (zmienna projektowa). Powłoka jest obustronnie utwierdzona na końcach, obciążona parciem równomiernie skierowanym do środka.



Rys. 1. Powłoka cylindryczna utwierdzona na obu końcach

Przemieszczenie w powłoce cylindrycznej składa się z dwóch wpływów - błonowego i zgięciowego:

$$w(t, x) = w_b(t) + w_z(t, x) \quad (9)$$

$w(t, x)$ - przemieszczenie powłoki

$w_b(t)$ - przemieszczenie od wpływu błonowej pracy powłoki

$w_z(t, x)$ - przemieszczenie od wpływu zgięciowej pracy powłoki (od utwierdzenia)

Przyjęto dane:

$$p_r = \frac{1N}{m^2}; \quad a = R = 2 \text{ m}; \quad \nu = 0,3; \quad L = 10 \text{ m}; \quad E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa},$$

dwie grubości $t = 1 \text{ cm}$ oraz 10 cm .

Oznaczenia: p_r - wartość obciążenia, t - grubość powłoki, a - promień powłoki, L - długość powłoki, ν - współczynnik Poissona, E - moduł sprężystości podłużnej (moduł Younga), sztywność powłoki $D(t) = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2}$.

Rozwiązanie na przemieszczenie zaczerpnięto z pracy [4]. Przemieszczenie wywołane **stanem błonowym** powłoki walcowej o przekroju kołowym obciążonej parciem jednorodnym promieniowym można zapisać w postaci

$$w_b(t) = p_r a^2 / D(t)(1 - \nu^2) \quad (10)$$

Przemieszczenie wywołane **stanem zgięciowym** powłoki walcowej o przekroju kołowym obciążonej parciem jednorodnym promieniowym wynosi

$$w_z(t, x) = e^{-\kappa x/a} \cdot \left(A_1 \cdot \cos\left(\frac{\kappa x}{a}\right) + A_2 \cdot \sin\left(\frac{\kappa x}{a}\right) \right) + e^{-\kappa(L-x)/a} \cdot \left(B_1 \cdot \cos\left(\frac{\kappa(L-x)}{a}\right) + B_2 \cdot \sin\left(\frac{\kappa(L-x)}{a}\right) \right) \quad (11)$$

gdzie:

$$\kappa(t) = \sqrt[4]{3 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \sqrt{\frac{a}{t}} \quad (12)$$

Stałe A_1, A_2, B_1 i B_2 można obliczyć, wykorzystując warunki brzegowe:

dla $x = 0 \Rightarrow w(t, 0) = 0$ i $\varphi_z(t, 0) = 0$

dla $x = L \Rightarrow w(t, L) = 0$ i $\varphi_z(t, L) = 0$

gdzie $\varphi_z(t, x)$ jest pochodną przemieszczenia po x (obrót powłoki).

Wykorzystując powyższe warunki brzegowe, obliczono stałe, które wynoszą:

$$\begin{aligned} A_1(t) &= -w_b(t) ; & A_2(t) &= A_1(t) \\ B_1(t) &= -w_b(t) ; & B_2(t) &= B_1(t) \end{aligned} \quad (14)$$

3.1. Metoda analityczna - bezpośredniego różniczkowania

Wykorzystując rozwiązanie analityczne (10) i (11), przeprowadzono obliczenia wrażliwości - metodą bezpośredniego różniczkowania w pakiecie MathCAD [5].

Wrażliwość przemieszczenia ma postać

$$\partial w(t, x) / \partial t = \partial w_b(t) / \partial t + \partial w_z(t, x) / \partial t = \partial w_b(t) / \partial t + A(t, x) + B(t, x) \quad (15)$$

gdzie:

$$\partial w_b(t) / \partial t = -p_r \cdot a^2 / E \cdot t^2 \quad (16)$$

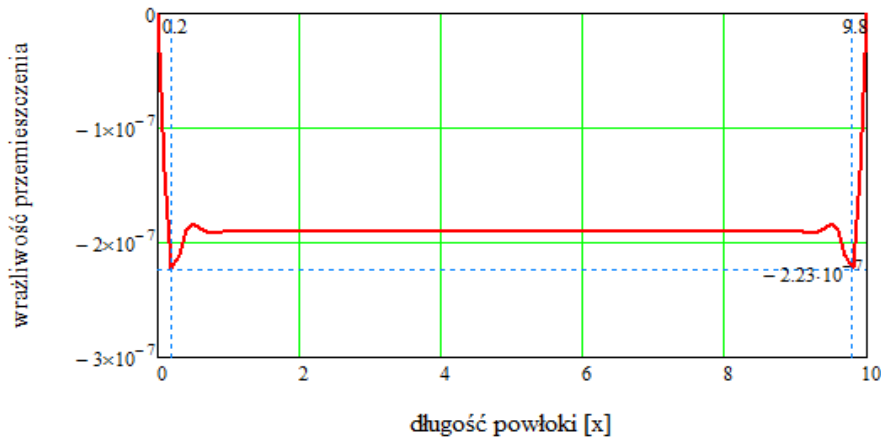
$$\begin{aligned} A(t, x) &= e^{-\kappa(t) \frac{x}{a}} \cdot \left(2 \cdot w_b(t) \cdot \frac{x}{a} \cdot \chi(t) \cdot \sin\left(\kappa(t) \cdot \frac{x}{a}\right) \right) \\ &- \partial w_b(t) / \partial t \cdot e^{-\kappa(t) \frac{x}{a}} \cdot \left(\cos\left(\kappa(t) \cdot \frac{x}{a}\right) + \sin\left(\kappa(t) \cdot \frac{x}{a}\right) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$B(t, x) = e^{-\kappa(t) \frac{(L-x)}{a}} \cdot \left(2 \cdot w_b(t) \cdot \frac{(L-x)}{a} \cdot \chi(t) \cdot \sin\left(\kappa(t) \cdot \frac{(L-x)}{a}\right) \right)$$

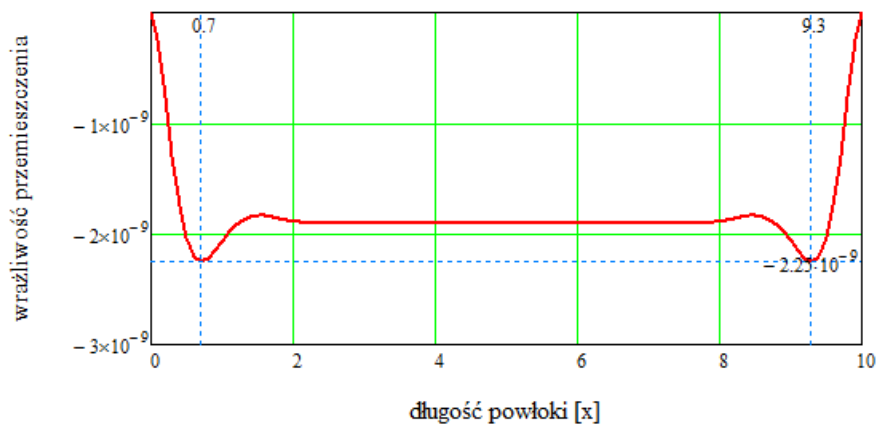
$$-\frac{\partial w_b(t)}{\partial t} \cdot e^{-\kappa(t) \cdot \frac{(L-x)}{a}} \cdot \left(\cos \left(\kappa(t) \cdot \frac{(L-x)}{a} \right) + \sin \left(\kappa(t) \cdot \frac{(L-x)}{a} \right) \right) \quad (18)$$

$$\chi(t) = \frac{-\sqrt[4]{3 \cdot (1-\nu^2)}}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{t^3}} \quad (19)$$

Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono wykresy wrażliwości przemieszczeń dla dwóch różnych grubości powłoki $t = 1$ i 10 cm oraz stałej długości $L = 10$ m.



Rys. 2. Wrażliwość przemieszczenia powłoki o długości $L = 10$ m i $t = 1$ cm



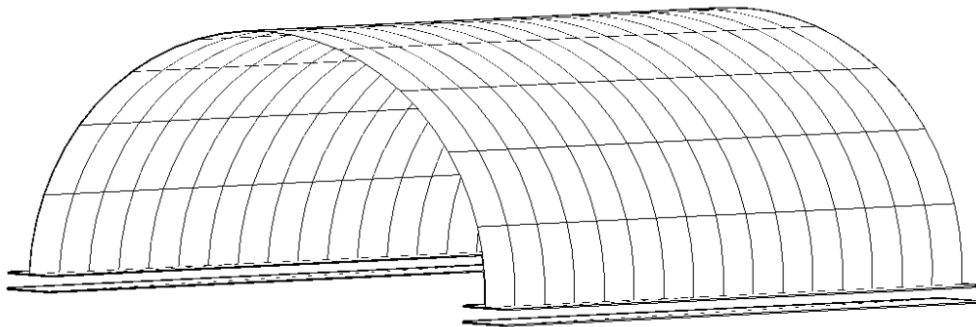
Rys. 3. Wrażliwość przemieszczenia powłoki o długości $L = 10$ m i $t = 10$ cm

Dla powłoki o grubości $t = 1$ cm największa wrażliwość na przemieszczenie jest umiejscowiona $0,2$ m od obu brzegów i wynosi $-2,23 \cdot 10^{-7}$, natomiast dla powłoki o $t = 10$ cm znajduje się ona w odległości $0,7$ m i wynosi $-2,25 \cdot 10^{-9}$. Oba

wykresy są symetryczne, inna jest wrażliwość (dla powłoki grubszej różnica dwóch rzędów mniej) oraz inne miejsce występowania ekstremum (dla powłoki grubszej przesunięte bliżej środka powłoki).

3.2. Metoda elementów skończonych - zmiennej sprężonej

W celu sprawdzenia rozwiązania analitycznego rozwiązano zadanie drugi raz z pomocą programu PolSAP [6] lub metodą elementów skończonych [7, 8]. Program umożliwia analizę wrażliwości statyczną, dynamiczną oraz analizy stochastyczne.



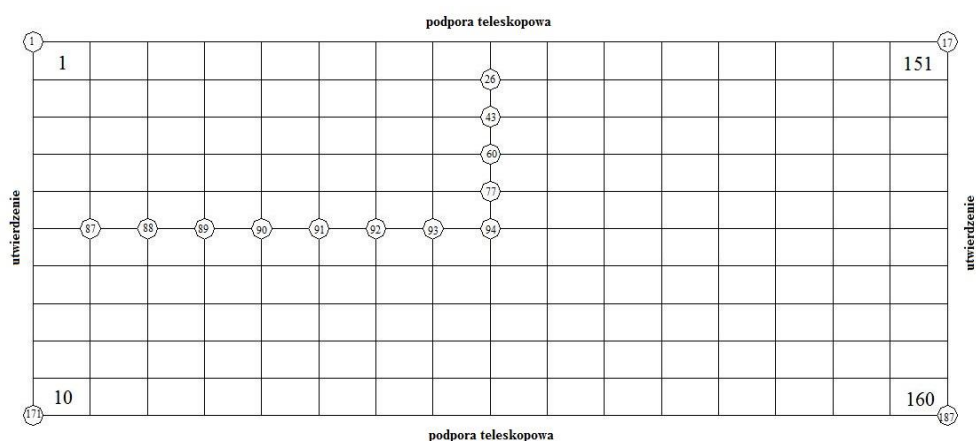
Rys. 4. Model połowy powłoki cylindrycznej

Ze względu na symetrię zbudowano model połowy powłoki (rys. 4). Do zbudowania modelu założono siatkę $16 \times 10 = 160$ elementów oraz 187 węzłów (rys. 5). Analizowano tylko pierwszy przypadek dla grubości powłoki $t = 1$ cm.

Wyniki zestawiono w tabelach 1-5. Jak należy odczytywać wyniki? Pomiędzy pogrubionymi elementami tabeli znajduje się analizowany węzeł powłoki. Wartość dodatnia wskazuje, że zwiększając grubość powłoki zwiększa się przemieszczenie, natomiast wartość ujemna odwrotnie. Intuicyjnie domyślamy się, że zwiększając grubość elementów w bliskim sąsiedztwie węzła, uzyskujemy zmniejszenie przemieszczenia - co się potwierdza.

W tabelach 1-3 zaprezentowano wyniki wrażliwości przemieszczenia wzdłuż osi symetrii obwodowej dla węzłów 26, 60 i 94. Nasuwają się uwagi:

- dla węzła 26, to jest węzła znajdującego się blisko brzegu, uzyskano największą wrażliwość (co potwierdza wynik z metody wcześniejszej),
- dla węzła 94, to jest węzła na podwójnej osi symetrii, wynik jest symetryczny wokół obu osi symetrii,
- dla pozostałych węzłów występuje symetria rozwiązania.



Rys. 5. Siatka elementów skończonych połowy powłoki

TABELA 1

Wrażliwość przemieszczenia węzła 26 powłoki cylindrycznej pomnożona razy 10^8

el	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111	121	131	141	151
1	1183	136	-214	-607	-918	-1167	-1540	-1747	-1747	-1540	-1167	-918	-607	-214	136	1183
2	809	259	491	365	-597	-2525	-4901	-6230	-6230	-4901	-2525	-597	365	491	259	809
3	465	-16	-76	-99	-153	5	609	1314	1314	609	5	-153	-99	-76	-16	465
4	64	-256	-240	-162	-72	83	276	397	397	276	83	-72	-162	-240	-256	64
5	-82	-262	-187	-91	-37	1	56	109	109	56	1	-37	-91	-187	-262	-82
6	-108	-199	-126	-52	-9	34	90	132	132	90	34	-9	-52	-126	-199	-108
7	-78	-123	-68	-24	-4	14	40	60	60	40	14	-4	-24	-68	-123	-78
8	-43	-63	-26	-5	2	8	15	18	18	15	8	2	-5	-26	-63	-43
9	-23	-25	-7	-2	-3	-9	-21	-30	-30	-21	-9	-3	-2	-7	-25	-23
10	-13	-9	0	7	5	-5	-15	-20	-20	-15	-5	5	7	0	-9	-13

TABELA 2

Wrażliwość przemieszczenia węzła 60 powłoki cylindrycznej pomnożona razy 10^8

el	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111	121	131	141	151
1	494	-569	-880	-730	-69	727	1263	1456	1456	1263	727	-69	-730	-880	-569	494
2	393	-251	-190	-546	-959	-761	163	1067	1067	163	-761	-959	-546	-190	-251	393
3	1092	341	161	-111	-1100	-2762	-4210	-4229	-4229	-4210	-2762	-1100	-111	161	341	1092
4	1107	392	136	-101	-822	-2201	-3764	-4299	-4299	-3764	-2201	-822	-101	136	392	1107
5	519	-155	-336	-391	-404	-120	723	1649	1649	723	-120	-404	-391	-336	-155	519
6	23	-469	-449	-323	-192	14	287	475	475	287	14	-192	-323	-449	-469	23
7	-152	-449	-315	-163	-84	-5	117	222	222	117	-5	-84	-163	-315	-449	-152
8	-159	-321	-172	-79	-45	9	80	126	126	80	9	-45	-79	-172	-321	-159
9	-135	-188	-86	-73	-72	-67	-78	-94	-94	-78	-67	-72	-73	-86	-188	-135
10	-12	-131	-117	-54	19	66	87	94	94	87	66	19	-54	-117	-131	-12

TABELA 3

Wrażliwość przemieszczenia węzła 94 powłoki cylindrycznej pomnożona razy 10^8

el	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111	121	131	41	151
1	81	-403	-438	-258	42	295	442	503	503	442	295	42	-258	-438	-403	81
2	-210	-475	-267	-281	-290	-232	-190	-185	-185	-190	-232	-290	-281	-267	-475	-210
3	15	-551	-432	-333	-291	-87	236	446	446	236	-87	-291	-333	-432	-551	15
4	494	-251	-398	-442	-513	-258	682	1735	1735	682	-258	-513	-442	-398	-251	494
5	1084	312	28	-249	-1016	-2439	-3994	-4503	-4503	-3994	-2439	-1016	-249	28	312	1084
6	1084	312	28	-249	-1016	-2439	-3994	-4503	-4503	-3994	-2439	-1016	-249	28	312	1084
7	494	-251	-398	-442	-513	-258	682	1735	1735	682	-258	-513	-442	-398	-251	494
8	15	-551	-432	-333	-291	-87	236	446	446	236	-87	-291	-333	-432	-551	15
9	-210	-475	-267	-281	-290	-232	-190	-185	-185	-190	-232	-290	-281	-267	-475	-210
10	81	-403	-438	-258	42	295	442	503	503	442	295	42	-258	-438	-403	81

W tabelach 4 i 5 zaprezentowano wyniki wzdłuż osi symetrii po długości powłoki w węzłach 88 i 94.

TABELA 4

Wrażliwość przemieszczenia węzła 88 powłoki cylindrycznej pomnożona razy 10^8

el	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111	121	131	141	151
1	-784	110	320	393	353	260	155	40	-85	-211	-317	-373	-339	-208	-8	777
2	-230	107	-72	-141	-142	-95	-38	10	33	47	79	136	173	123	-19	243
3	-347	10	113	32	111	177	150	0	-138	-165	-96	-18	9	-2	19	172
4	-1026	-806	16	802	678	626	215	-161	-277	-184	-45	30	43	48	85	146
5	-2996	-3985	-4342	-5495	-2601	-1917	-1256	-668	-217	46	136	123	84	75	106	133
6	-2996	-3985	-4342	-5495	-2601	-1917	-1256	-668	-217	46	136	123	84	75	106	133
7	-1026	-806	16	802	678	626	215	-161	-277	-184	-45	30	43	48	85	146
8	-347	10	113	32	111	177	150	0	-138	-165	-96	-18	9	-2	19	172
9	-230	107	-72	-141	-142	-95	-38	10	33	47	79	136	173	123	-19	243
10	-784	110	320	393	353	260	155	40	-85	-211	-317	-373	-339	-208	-8	777

TABELA 5

Wrażliwość przemieszczenia węzła 90 powłoki cylindrycznej pomnożona razy 10^8

el	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111	121	131	141	151
1	-195	59	107	116	93	55	12	-31	-68	-94	-103	-93	-64	-24	18	185
2	-17	81	-9	-23	-14	-4	2	7	15	29	47	61	60	40	7	58
3	108	173	128	51	47	22	-21	-46	-39	-12	11	16	9	1	0	20
4	-30	507	148	221	132	20	-49	-56	-24	8	19	14	5	0	-1	1
5	-4911	-4791	-845	-720	-437	-209	-58	26	58	54	33	14	3	-1	-3	-5
6	-4911	-4791	-845	-720	-437	-209	-58	26	58	54	33	14	3	-1	-3	-5
7	-30	507	148	221	132	20	-49	-56	-24	8	19	14	5	0	-1	1
8	108	173	128	51	47	22	-21	-46	-39	-12	11	16	9	1	0	20
9	-17	81	-9	-23	-14	-4	2	7	15	29	47	61	60	40	7	58
10	-195	59	107	116	93	55	12	-31	-68	-94	-103	-93	-64	-24	18	185

Wnioski

Uzyskane wyniki odznaczają się dużą zgodnością obu metod. Rzadko w praktyce inżynierskiej możemy znaleźć rozwiązanie dokładne, rozwiązania takie można uzyskać tylko dla szczególnych przypadków (jak w analizowanym). Na powyższym przykładzie udowodniliśmy poprawność metody przybliżonej, tj. metody elementów skończonych. Następnie można analizować bardziej skomplikowane zadania (inny kształt powłoki oraz różne obciążenie).

W obecnym zadaniu musieliśmy założyć stałą grubość wszystkich elementów - ograniczenie metody analitycznej. W rozwiązaniu analitycznym dostaliśmy tylko położenie liniowe miejsca najbardziej wrażliwego. W drugiej metodzie można było zmieniać grubość poszczególnych elementów (lecz założono stałą dla wszystkich elementów). W rozwiązaniu dostaliśmy o wiele więcej - nie tylko miejsce najbardziej wrażliwe, ale również odpowiedź, jak zmiana grubości poszczególnych elementów wpływa na przemieszczenie wybranego węzła (jedne powodują wzrost, inne zmniejszenie).

Na przyszłość można próbować badać, jak na przemieszczenie powłoki wpływa losowa grubość poszczególnych elementów powłoki lub jeszcze trudniej, jak losowa grubość elementów wpływa na wrażliwość przemieszczenia powłoki.

Literatura

- [1] Grzywiński M., Hien T.D., Analiza statycznej wrażliwości konstrukcji prętowych, Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej 2006 nr 163, seria Budownictwo 13, 19-28.
- [2] Grzywiński M., Hien T.D., Analiza dynamicznej wrażliwości konstrukcji prętowych, Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej 2008 nr 164, seria Budownictwo 14, 25-29.
- [3] Kubiak H., Kaproń P., Analiza wrażliwości powłoki walcowej dla różnych rodzajów obciążenia, Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej 2008 nr 164, seria Budownictwo 14, 57-63.
- [4] Flügge W., Powłoki obliczania statyczne, Arkady, Warszawa 1972.
- [5] MathCAD 14.0 User's Guide, Parametric Technology Corporation 2007.
- [6] Kleiber M., Hien T.D., The Stochastic Finite Element Method, Wiley 1992.
- [7] Pokorska I., Metoda elementów skończonych w obróbce plastycznej materiałów spiekanych, Rudy i Metale Nieżelazne 2007, 12, 910-914.
- [8] Służalec A., Introduction to Nonlinear Thermomechanics, Theory and Finite Element Solutions, Springer-Verlag 1992.

Streszczenie

W pracy przedstawiono algorytmy analizy wrażliwości układów powłokowych. Oprócz modelowania różniczkowania bezpośredniego, sformułowano sprzężone zagadnienie końcowe bazujące na pierwotnym zagadnieniu początkowym, przydatne w analizie wrażliwości. Opracowano algorytm numeryczny, łatwo implementowany w istniejących pakietach elementów skończonych. Zaprezentowano i przedyskutowano liczbowe wyniki analizy wrażliwości dla powłoki cylindrycznej.

Abstract

A numerical formulation for sensitivity analysis of shell structure is presented in the paper. In addition to modeling the direct differentiation coupled to the find question was formulated based on primary issue of use in the initial sensitivity analysis. An algorithm for numerical easily implemented in existing finite element packages. There were presented and discussed numerical results of sensitivity analysis for shell cylindrical.