

STABILIZACJA WAHADŁA ODWRÓCONEGO Z NAPĘDEM INERCYJNYM PRZY POMOCY REGULATORA LQR

Adam Owczarkowski, Jarosław Gośliński

Politechnika Poznańska, Wydział Elektryczny

Streszczenie. Niniejszy artykuł opisuje metodę stabilizacji obiektu zwanego wahadłem odwróconym z napędem inercyjnym IWP (ang. *Inertia Wheel Pendulum*). Jest to nieliniowy układ mechaniczny w postaci wahadła odwróconego składającego się z masztu i koła zamachowego umieszczonego na szczycie napędzanego silnikiem prądu stałego. Autorzy zaproponowali stabilizację przy pomocy regulacji LQR, która do funkcjonowania wymaga linearyzacji i dyskretyzacji równań matematycznych obiektu. Wykonano działania symulacyjno-eksperymentalne potwierdzające poprawność działania proponowanej metody.

Słowa kluczowe: wahadło odwrócone, regulacja liniowo-kwadratowa LQR, system nieliniowy, sterowanie optymalne, wahadło z napędem inercyjnym IWP

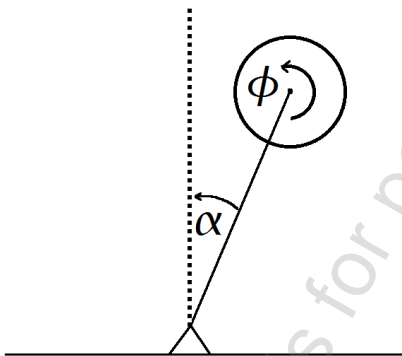
STABILIZATION CONTROL FOR THE INTERIA WHEEL PENDULUM BASED ON LQR CONTROLLER

Abstract. Work is about stabilizing the inverted pendulum object called IWP (*Inertia Wheel Pendulum*). It is a non-linear mechanical system in the form of an inverted pendulum containing a flywheel mounted on top accelerated by DC motor. The authors suggested stabilization by LQR control, which requires the linearization and discretization of the mathematical equations of the object. Simulation and experiment have confirmed proper operation of the proposed method.

Keywords: LQR (Linear Quadratic Regulator), IWP (Inertia Wheel Pendulum), optimal control, underactuated system, non-linear system, inverted pendulum

Wstęp

Na rysunku 1 przedstawiono uproszczony schemat budowy wahadła odwróconego z napędem inercyjnym IWP (ang. *Inertia Wheel Pendulum*). Składa się z masztu przytwierdzonego do podłoża przy pomocy przegubu obrotowego i masy wirującej umieszczonej na szczycie, którą napędza silnik prądu stałego. Posiada dwa stopnie swobody (kąt α i φ) i jedno wymuszenie co sprawia, że układ ten jest niedosterowanym (ang. *Underactuated system*). Celem układu regulacji jest utrzymywanie wahadła w pozycji pionowej poprzez generowanie odpowiedniego momentu rozpędzającego bądź hamującego koło zamachowe. Problemem jest fakt, iż stabilizujące wymuszenie występuje w skończonym horyzoncie czasowym, ponieważ z fizycznego punktu widzenia nie jest możliwe rozpędzanie koła bez końca.



Rys. 1. Rysunek poglądowy przedstawiający wahadło odwrócone

Autorzy zaproponowali sterowanie przy pomocy regulatora liniowo-kwadratowego LQR. Ta metoda umożliwiła wyznaczenie sterowania pozwalającego zminimalizować całkowity wskaźnik jakości. Zaletą jest, że cały wektor stanu stanowi wartość zadaną, a nie tylko jedna wartość jak to jest w przypadku innych regulatorów (np. PID).

Na koniec przedstawiono wyniki działania w obiekcie rzeczywistym stworzonym na potrzeby wykonania badań.

1. Model matematyczny

Autorzy wyznaczyli dokładny model matematyczny, gdyż było to niezbędne do wyznaczania sterowania proponowaną metodą. Ponieważ układ ma dwa stopnie swobody, to do pełnego opisu matematycznego wymagane są poniższe dwa równania:

$$\ddot{\alpha} = \frac{k_s i - b_\alpha \dot{\alpha} - b_\varphi - g l_p m_c \sin(\alpha)}{I_k + I_r} \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{k_s i - b_\varphi \dot{\varphi}}{I_k} \quad (2)$$

gdzie: k_s – stała momentowa silnika, b_α – współczynnik tarcia przegubu, b_φ – współczynnik tarcia koła zamachowego, g – przyspieszenie ziemskie, α – kąt odchylenia masztu od pionu, φ – kąt obrotu koła zamachowego, I_k – moment bezwładności koła zamachowego, I_r – moment bezwładności całego wahadła (względem osi przegubu wahadła), l_p – długość masztu, i – prąd płynący przez silnik, m_c – masa całkowita.

Równanie (1) posiada nieliniowość przez funkcję $\sin(\alpha)$. Nieliniowości zwykle stanowią dużą komplikację w próbach implementacji w obiektach rzeczywistych, ponieważ zwykle mocno zwiększają złożoność obliczeniową. Szczególnie jest to istotne kiedy obliczenia mają być wykonywane on-line.

Przyjęto podstawowy model tarcia zakładający proporcjonalny przyrost wraz ze wzrostem prędkości kątowej obracania się powierzchni trących. Ten sposób mocno upraszcza dalsze obliczenia, chociaż w wielu sytuacjach może być za mało precyzyjny.

2. Linearyzacja

Regulacja LQR wymaga linearyzacji i dyskretyzacji równań stanu. W procesie linearyzacji skorzystano z macierzy Jacobiego – macierzy kolejnych pochodnych cząstkowych. Układ liniowych, ciągłych równań stanu wygląda następująco:

$$\dot{\underline{X}} = A_l \underline{X} + B_l \underline{U} \quad (3)$$

$$\underline{Y} = C_l \underline{X} + D_l \underline{U} \quad (4)$$

gdzie: A_l , B_l , C_l i D_l to macierze liniowych równań stanu.

Wektor stanu i wektor sterowania przyjęto następująco:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Pierwsza pochodna wektora stanu i wektor wyjściowy są odpowiednio równe:

$$\dot{\underline{X}} = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\varphi} \\ X_4 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

gdzie: $f_1, f_2, f_3, f_4, h_1, h_2, h_3, h_4$ - to konieczne funkcje potrzebne w trakcie linearyzacji.

Równania linearyzowano w punkcie chwiejnej równowagi, w miejscu, w którym wektor stanu i wektor sterowania przyjmują zerowe wartości. Kolejne macierze zlinearyzowanego układu wyglądają następująco:

$$A_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \frac{\partial f_1}{\partial X_3} & \frac{\partial f_1}{\partial X_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \frac{\partial f_2}{\partial X_3} & \frac{\partial f_2}{\partial X_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial X_1} & \frac{\partial f_3}{\partial X_2} & \frac{\partial f_3}{\partial X_3} & \frac{\partial f_3}{\partial X_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial X_1} & \frac{\partial f_4}{\partial X_2} & \frac{\partial f_4}{\partial X_3} & \frac{\partial f_4}{\partial X_4} \end{bmatrix}_{\substack{X=0 \\ U=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{gl_p m_c}{I_k + I_r} & -\frac{b_\alpha}{I_k + I_r} & 0 & -\frac{b_\varphi}{I_k + I_r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{b_\varphi}{I_k} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$B_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U_1} & \frac{\partial f_1}{\partial U_2} & \frac{\partial f_1}{\partial U_3} & \frac{\partial f_1}{\partial U_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial U_1} & \frac{\partial f_2}{\partial U_2} & \frac{\partial f_2}{\partial U_3} & \frac{\partial f_2}{\partial U_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial U_1} & \frac{\partial f_3}{\partial U_2} & \frac{\partial f_3}{\partial U_3} & \frac{\partial f_3}{\partial U_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial U_1} & \frac{\partial f_4}{\partial U_2} & \frac{\partial f_4}{\partial U_3} & \frac{\partial f_4}{\partial U_4} \end{bmatrix}_{\substack{X=0 \\ U=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_s}{I_k + I_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_s}{I_k} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$C_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & \frac{\partial h_1}{\partial X_2} & \frac{\partial h_1}{\partial X_3} & \frac{\partial h_1}{\partial X_4} \\ \frac{\partial h_2}{\partial X_1} & \frac{\partial h_2}{\partial X_2} & \frac{\partial h_2}{\partial X_3} & \frac{\partial h_2}{\partial X_4} \\ \frac{\partial h_3}{\partial X_1} & \frac{\partial h_3}{\partial X_2} & \frac{\partial h_3}{\partial X_3} & \frac{\partial h_3}{\partial X_4} \\ \frac{\partial h_4}{\partial X_1} & \frac{\partial h_4}{\partial X_2} & \frac{\partial h_4}{\partial X_3} & \frac{\partial h_4}{\partial X_4} \end{bmatrix}_{\substack{X=0 \\ U=0}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$D_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial U_1} & \frac{\partial h_1}{\partial U_2} & \frac{\partial h_1}{\partial U_3} & \frac{\partial h_1}{\partial U_4} \\ \frac{\partial h_2}{\partial U_1} & \frac{\partial h_2}{\partial U_2} & \frac{\partial h_2}{\partial U_3} & \frac{\partial h_2}{\partial U_4} \\ \frac{\partial h_3}{\partial U_1} & \frac{\partial h_3}{\partial U_2} & \frac{\partial h_3}{\partial U_3} & \frac{\partial h_3}{\partial U_4} \\ \frac{\partial h_4}{\partial U_1} & \frac{\partial h_4}{\partial U_2} & \frac{\partial h_4}{\partial U_3} & \frac{\partial h_4}{\partial U_4} \end{bmatrix}_{\substack{X=0 \\ U=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Założono, że w procesie regulacji nie zachodzi potrzeba analizy zerowej pochodnej kąta obrotu koła zamachowego (zmienną φ), zatem wyeliminowano ją z wektora stanu. Nowy wektor stanu wygląda następująco:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Jak widać zmienne x, u i y są od tej pory oznaczane małymi literami. Równania stanu, które wykorzystywane są w trakcie regulacji wyglądają następująco:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{gl_p m_c}{I_k + I_r} & -\frac{b_\alpha}{I_k + I_r} & -\frac{b_\varphi}{I_k + I_r} \\ 0 & 0 & -\frac{b_\varphi}{I_k} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_s}{I_k + I_r} \\ \frac{k_s}{I_k} \end{bmatrix} i, \quad (14)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}. \quad (15)$$

3. Dyskretyzacja równań

Równania stanu w postaci dyskretnej wyglądają następująco:

$$\underline{x}_{k+1} = A_d \underline{x}_k + B_d \underline{u}_k, \quad (16)$$

$$\underline{y}_k = C_d \underline{x}_k + D_d \underline{u}_k \quad (17)$$

gdzie: k - oznacza numer próbki, A_l, B_l, C_l i D_l to macierze dyskretne równania stanu.

Taka postać równań upraszcza implementację ich w systemie mikroprocesorowym. Zastosowano metodę przybliżoną [4] korzystającą z poniższych wzorów:

$$A_d \approx I + A \left(IT_p + \frac{AT_p^2}{2!} + \frac{A^2 T_p^3}{3!} + \dots + \frac{A^{m-1} T_p^m}{m!} \right), \quad (18)$$

$$B_d \approx \left(IT_p + \frac{AT_p^2}{2!} + \frac{A^2 T_p^3}{3!} + \dots + \frac{A^{m-1} T_p^m}{m!} \right) B \quad (19)$$

$$C_d = C, \quad (20)$$

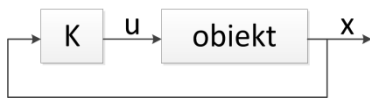
$$D_d = D, \quad (21)$$

gdzie: T_p – to okres próbkowania dyskretnych równań, m – liczba iteracji algorytmu.

Zgodnie z teorią im większa liczba m , tym dokładniejsze przybliżenie. W praktyce stwierdzono, iż dla $m=5$, wyniki były zadowalające, czyli zbliżone do wyników, kiedy macierze te wyznaczano metodą dokładną. Metoda dokładna jest bardziej złożona od przybliżonej i wymaga wyznaczenia odwrotności macierzy A i transformaty odwrotnej Laplace'a.

4. Regulator LQR

Na rysunku 2 przedstawiono schemat blokowy układu regulacji z regulatorem LQR [1, 7, 8].



Rys. 2. Schemat blokowy układu regulacji z regulatorem LQR

Jak widać tego typu regulator jako sprzężenie zwrotne wykorzystuje cały wektor stanu x . Celem regulatora jest doprowadzenie wszystkich trzech wartości stanowiących stan układu do zera. Innymi słowy dąży się do ustabilizowania masztu w położeniu pionowym i zatrzymania koła zamachowego.

Zadaniem dyskretnego regulatora LQR jest zminimalizowanie wskaźnika jakości:

$$J_d = \sum_{i=0}^n [x_i^T Q x_i + u_i^2 R], \quad (22)$$

gdzie: n - horyzont sterowania, Q - macierz wag stanu, R - waga sygnału sterującego.

Wynikiem końcowym jest uzyskanie wektora wzmocnień:

$$\underline{K} = (R + B_d^T P B_d)^{-1} B_d^T P A_d, \quad (23)$$

który pozwala wyznaczyć wielkość sterującą:

$$u = -\underline{K} x \quad (24)$$

Najtrudniejszym zagadnieniem przy regulacji LQR jest obliczanie optymalnego sterowania przy pomocy dyskretnego równania Riccatiego [6]:

$$P_{j-1} = Q + A_d^T (P_j - P_j B_d (R + B_d^T P_j B_d)^{-1} B_d^T P_j) A_d \quad (25)$$

Macierz P_{j-1} , zgodnie z powyższym wzorem, jest obliczana iteracyjnie w tył. Jako początkową wartość przyjmuje się $P_j = Q$.

Istotnym elementem w trakcie strojenia regulatora LQR są wielkości Q i R . Skorzystano z opracowanego w literaturze algorytmu doboru tych wartości [5, 9]. Jako macierz Q przyjmuje się iloczyn transponowanej macierzy wyjść i jej wersji nietransponowanej:

$$Q = C^T C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

We wspomnianej literaturze jako R przyjęto stałą wartość:

$$R = 100. \quad (27)$$

Działanie regulacji LQR przedstawiono poniżej dokonując symulacji i sprawdzając działanie realnego obiektu.

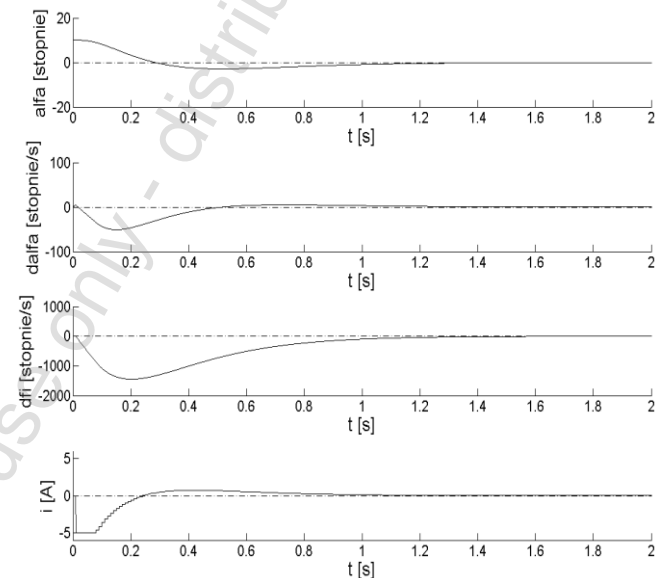
5. Wyniki symulacji

Badania symulacyjne dokonano w środowisku Matlab. Pozwoliły one wyznaczyć wektor wzmocnień K , który jest równy:

$$\underline{K} = [43.04 \quad 6.20 \quad -0.13]. \quad (28)$$

Te wartości można wyznaczyć znając parametry obiektu i wielkości Q i R .

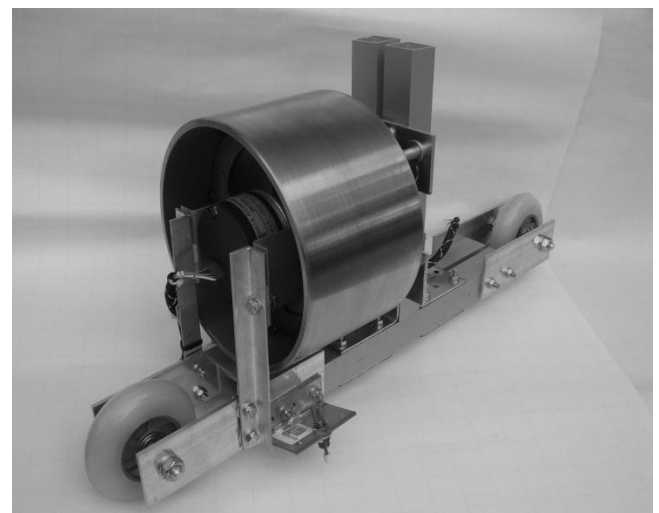
Na rysunku 3 przedstawiono wyniki symulacji IWP z regulatorem LQR. Wektor wzmocnień K przyjął wartości jak w równaniu 28. Symulację rozpoczęto dla wychylenia masztu o 10 stopni od pionu i dotyczyła dwóch sekund działania obiektu. Na wykresie widać, że wszystkie trzy wartości wektora stanu dążą do zerowej wartości. Również sterowanie (prąd płynący przez silnik) łagodnie spada do zera. Tutaj również można dostrzec odporność tego regulatora na pracę w nasyceniu, czyli dla maksymalnych wartości sterowania. Przykładowo w takiej sytuacji do poprawnego działania regulator PID wymagałby kompensacji systemem *anti-windup*.



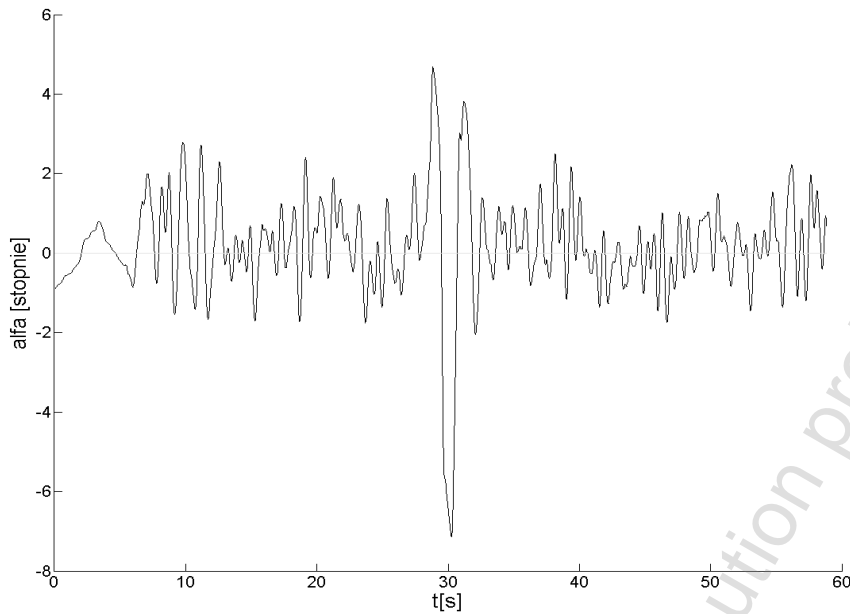
Rys. 3. Przebieg trzech zmiennych stanu oraz sterowania w trakcie 2 sekund

6. Wyniki eksperymentalne

Na potrzeby badań został sporządzony realny obiekt IWP, który przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4. Widok obiektu zrealizowanego fizycznie



Rys. 5. Przebieg zmian kąta alfa w trakcie działania urządzenia

Jednostką wykonawczą był niskoobrotowy silnik prądu stałego. Koło zamachowe wykonano ze zwykłej stali, a większość pozostałych elementów z aluminium. Do pomiaru położenia kąтового koła użyto enkoder inkrementalny o dużej dokładności - 1800 impulsów na obrót. Zastosowano jednostkę IMU (ang. *Inertial Measurement Unit*) ADIS16355 firmy Analog Devices do pomiaru odchylenia wahała od pionu. Zawiera ona trzyosiowy akcelerometr i trzyosiowy żyroskop. Na koniec estymowano stan z pomocą rozszerzonego filtru Kalmana. Do zbierania danych z czujników wykorzystano mikroprocesor ARM. Następnie dane te kierowano do komputera klasy PC, w którym dokonywano wszystkich obliczeń.

Cały zrealizowany system automatycznej regulacji był w stanie stabilizować wahało w nieskończonym horyzoncie czasowym. Na rysunku 5 zamieszczono wykres ukazujący przebieg zmian kąta alfa w trakcie działania urządzenia. Widać, że w trakcie 60 sekund kąt ten głównie zmienia się od -2 do 2 stopni. Było możliwe zakłócenie układu, a tym samym wychylenie go do ± 15 stopni.

7. Wnioski

Poprawność rozważań teoretyczno-symulacyjnych została udowodniona pozytywnym wynikiem eksperymentu. Analitycznie wyznaczony wektor wzmocnień K , okazał się być docelowym. Regulator LQR dobrze nadaje się do stabilizacji obiektów z natury nieliniowych. Jest możliwe poprawne funkcjonowanie układu wokół punktu linearyzacji, zwanej często ILQR (ang. *Iterative Linear Quadratic Regulator*) [2, 3].

Wejście w stan nasycenia nie powoduje komplikacji w procesie sterowania. Nie są wymagane dodatkowe kompensacje uruchamiane w tego typu momentach.

Regulacja LQR pozwala zapanować nad całym stanem układu, co ułatwia proces projektowania regulatora.

W przyszłości chcąc polepszyć parametry regulacji, możnaby wykonywać linearyzację regularnie, np. co każde wykonywanie obliczeń sterowania w pętli sprzężenia zwrotnego procesu regulacji. W powyższej pracy takie obliczenia zostały wykonane tylko jednokrotnie. Proponowane podejście jest słuszne dla obiektów nieliniowych. Wadą tego rozwiązania może być potrzeba wykonywania dużej ilości obliczeń w krótkim czasie przez system mikroprocesorowy. Możliwe, że wymagałoby to równoleglenia obliczeń przy pomocy matrycy programowalnej FPGA (ang. *Field Programmable Gate Array*).

Literatura

- [1] Horla D., *Sterowanie adaptacyjne – ćwiczenia laboratoryjne*, Wyd. III, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2010.
- [2] In-Won P., Bum-Joo L., Ye-Hoon K., Ji-Hyeong H., Jong-Hwan K., *Multi-objective Quantum-inspired Evolutionary Algorithm-based Optimal Control of Two-link Inverted Pendulum*, WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence, July, 18-23, 2010 –CCIB, Barcelona, Spain.
- [3] Li W., Todorov E., *Iterative linear quadratic regulator design for nonlinear biological movement systems*, Proc. of Int. Conf. on Informatics in Control, Automation and Robotics, Setubal, Portugal, Aug. 2004, pp. 1–8.
- [4] Sauer P., *Sterowanie procesami ciągłymi i dyskretnymi – liniowe dyskretne równania stanu*, wykłady, Politechnika Poznańska.
- [5] Wang H., Dong H., He L., Shi Y., Zhang Y., *Design and Simulation of LQR Controller with the Linear Inverted Pendulum*, International Conference on Electrical and Control Engineering, China, 2010.
- [6] Yishao Z., *Convergence of the Discrete-Time Riccati Equation to Its Maximal Solution*, Department of Mathematics Stockholm University, Sweden, December 1996.
- [7] Zhang W., Hu J., *On the Value Functions of the Optimal Quadratic Regulation Problem for Discrete-Time Switched Linear Systems*, 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, Dec. 9-11, 2008.
- [8] Zhang W., Hu J., Abate A., *On the Value Functions of the Discrete-Time Switched LQR Problem*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54, no. 11, November 2009.
- [9] Zhang B., Wang J. G., *The Analysis and Simulation of First-Order Inverted Pendulum Control System Based on LQR*, Third International Symposium on Information Processing, China, 2010.

Mgr inż. Adam Owczarkowski

e-mail:

adam.j.owczarkowski@doctorate.put.poznan.pl

W 2011 roku ukończył studia o kierunku Automatyka i Robotyka na Wydziale Elektrycznym Politechniki Poznańskiej. Od tego czasu, jest studentem studiów doktoranckich na tej samej uczelni. Jego praca głównie skupia się na sensoryce opartej o technologię MEMS, algorytmach sterowania robotów i implementacji ich w systemach wbudowanych z układami FPGA.



Mgr inż. Jarosław Gośliński

e-mail: jaroslaw.a.goslinski@doctorate.put.poznan.pl

Ukończył studia z tytułem magister inżynier na Politechnice Poznańskiej (2011). Od tego czasu, jest studentem studiów doktoranckich na tej samej uczelni. Zajmuje się głównie sterowaniem robotów latających (UAV), identyfikacją parametrów modelu oraz obserwatorami stanu. Jego zainteresowania skupiają się również w obszarze algorytmu roju, formowania grup jednostek latających oraz układów cybernetyczno – fizycznych.

