

METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH ORAZ METODA ZBIORÓW POZIOMICOWYCH W TOMOGRAFII DYFUZYJNEJ

Bartosz Waleska¹, Jan Sikora^{1,2}

¹Institut Elektrotechniki w Warszawie, ² Wydział Elektrotechniki i Informatyki, Politechnika Lubelska

Streszczenie. W artykule zaprezentowano połączenie metody elementów brzegowych i metody zbiorów poziomicowych w poszukiwaniu nieznanego kształtu w elektrycznej tomografii impedancyjnej. Pokazano, jak wyznaczyć prędkość na symulowanym brzegu, jak ją rozszerzyć i wykorzystać do przesunięcia brzegu, jak również w jaki sposób reinicjować funkcję poziomicową, ostatecznie przedstawiono przykład identyfikujący trzy obszary niejednorodności przy wykorzystaniu zbioru poziomicowego zawierającego wiele poziomic zerowych.

Słowa kluczowe: metoda elementów brzegowych, MEB, metoda zbiorów poziomicowych, elektryczna tomografia impedancyjna, analiza pola

BOUNDARY ELEMENT METHOD AND SET LEVEL METHOD IN ELECTRICAL DIFFUSE TOMOGRAPHY

Abstract. In this paper was presented coupling Boundary Element Method and Set Level methods for identification of unknown shape of interface in electrical impedance tomography (EIT). It's shown how determinate velocity, how extend it, how use it to move interface and finally how to reset level function. Finally the example showing identification of three areas of heterogeneous sample, using multi zero levels function is presented.

Keywords: Boundary Element Method, BEM, Set Level Methods, electrical impedance tomography, field analysis

Wstęp

Badanie pola podzielić można zasadniczo na dwa zagadnienia. Pierwsze obejmuje analizę i występuje wtedy, gdy poszukiwana jest informacja o rozkładzie pola w danym obszarze. W tym przypadku uwzględnia się takie informacje jak kształt obszaru (obszarów), warunki graniczne, własności materiałowe, ewentualne źródła pola. Jest to tak zwane zadanie proste (ang. forward problem) [8]. Drugie związane jest z zagadnieniem zadania odwrotnego (ang. inverse problem) [7]. Polega ono na wyznaczeniu np. kształtu obiektu przy znanym współczynniku materiałowym. W zasadzie powyższe stanowi etap wstępny do rozwiązywania zagadnień tomografii. Zgodnie z definicją, tomografia jest to otrzymywanie obrazu wnętrza obiektu na podstawie pomiarów z zewnątrz (na brzegu). Równanie dyfuzji dane wzorem:

$$\nabla^2 \Phi - k^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -f \quad (1)$$

W szczególnym przypadku redukuje się do równania Laplace'a:

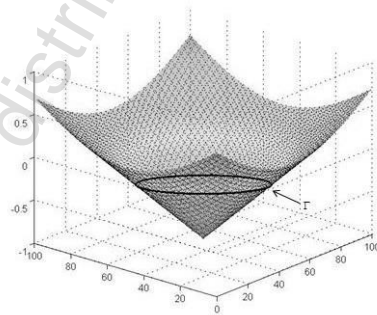
$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2)$$

W tej pracy równanie Laplace'a zostanie wykorzystane do opisu badanego obiektu, w którym na brzegu (powierzchni) zostają umieszczone elektrody. Poprzez polaryzację pary z nich, wymusza się przepływ prądu przez obiekt, na pozostałych elektrodach rejestruje się wartości rozkładu potencjału. Na podstawie uzyskanych wyników pomiarów za pomocą algorytmów dokonuje się rekonstrukcji obrazu struktury wewnętrznej. Ze względu na polaryzację z wykorzystaniem napięcia stałego jest to przykład tomografii rezystancyjnej. Zarówno dla tomografii dyfuzyjnej jak i rezystancyjnej mogą być stosowane identyczne algorytmy rekonstrukcyjne.

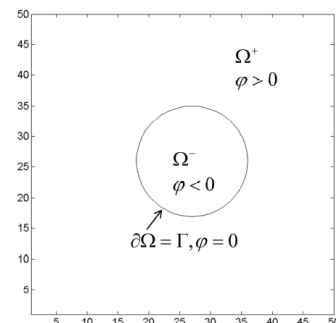
1. Metoda Zbiorów Poziomicowych

Metoda zbiorów poziomicowych (ang. LSM – Level Set Method) jest numeryczną metodą przeznaczoną do śledzenia przesuwającego się brzegu w kartezjańskim układzie współrzędnych bez konieczności jego parametryzowania. Autorzy – Stanley Osher i James Sethian przedstawili ją w latach osiemdziesiątych XX. Zastosowanie metody pozwala na łatwe śledzenie topologii brzegu, który dynamicznie się zmienia, włączając w to dzielenie i łączenie się obiektów, które reprezentuje [3].

a)



b)



Rys. 1. a) wygląd zbioru poziomicowego φ , b) wygląd poziomic zerowej zbioru wraz z podaniem własności

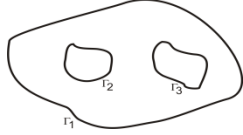
Własności zbioru poziomicowego są następujące:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) > 0, P(x, y) \in \Omega^+ \\ \varphi(x, y) < 0, P(x, y) \in \Omega^- \\ \varphi(x, y) = 0, P(x, y) \in \partial\Omega = \Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

2. Złożone niejednorodności strefowe

Pomiary badanego obiektu mogą zostać wykonane tylko na brzegu zewnętrznym, podobnie jak polaryzacja, która może dotyczyć jedynie elementów (elektrod) na brzegu zewnętrznym. Niejednorodność strefowa oznacza sytuację, w której wewnątrz struktury znajduje się nieznaną obiekt wewnątrz - jeden obszar jest otoczony przez drugi, a granica obszarów jest określona przez różne wartości współczynników materiałowych. Jeżeli w całej strukturze nie można wyodrębnić obszarów jednorodnych, wówczas niejednorodność ma charakter ciągły. Zagadnienia opisane przez niejednorodność strefową są związane z tomografią impedancyjną.

Realizację rekonstrukcji pola badanego obiektu wykonano w oparciu o numeryczną Metodę Elementów Brzegowych (MEB, ang. Boundary Element Method – BEM). Główną zaletą MEB jest dyskretyzacja jedynie brzegu obszaru, co oznacza skrócenie czasu obliczeń, kluczowego w przypadku rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Po wyznaczeniu wartości brzegowych można wyznaczyć wartości pola lub pochodnej pola w dowolnym punkcie bez konieczności analizy całego obszaru. Przykład złożonej niejednorodności strefowej został pokazany na rys. 2.



Rys. 2. Przykład struktury niejednorodnej złożonej, wewnątrz obszaru Ω_1 ograniczonej brzegiem Γ_1 znajdują się dwa obiekty wewnętrzne: Ω_2 ograniczony brzegiem Γ_2 oraz Ω_3 ograniczony brzegiem Γ_3

Definiując warunki brzegowe - pierwszego rodzaju (Dirichleta) występujący, gdy na brzegu (lub jego fragmencie) określona jest wartość pola $\Phi(\Gamma)=g$, oraz warunek drugiego rodzaju (Neumanna) oznaczający zadanie na brzegu (lub jego fragmencie) pochodnej normalnej pola (czyli pochodnej w kierunku prostopadłym do brzegu Γ) $\frac{\partial\Phi(\Gamma)}{\partial n}=g$.

Przypadek przedstawiony na rysunku 2 można opisać układem równań różniczkowych wykorzystując funkcję Greena G [4, 6]:

$$\begin{aligned} c\Phi^{(1)} + \int_{\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_2^{(1)} + \Gamma_3^{(1)}} \frac{\partial G^{(1)}}{\partial n} \Phi^{(1)} d\Gamma &= \int_{\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_2^{(1)} + \Gamma_3^{(1)}} G^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n} d\Gamma \\ c\Phi^{(2)} + \int_{\Gamma^{(2)}} \frac{\partial G^{(2)}}{\partial n} \Phi^{(2)} d\Gamma &= \int_{\Gamma^{(2)}} G^{(2)} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial n} d\Gamma \\ c\Phi^{(3)} + \int_{\Gamma^{(3)}} \frac{\partial G^{(3)}}{\partial n} \Phi^{(3)} d\Gamma &= \int_{\Gamma^{(3)}} G^{(3)} \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

Przy czym wartość współczynnika c :

$$c = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli punkt leży wewnątrz obszaru} \\ 0.5, & \text{jeżeli punkt leży na brzegu obszaru} \\ 0, & \text{jeżeli punkt leży na zewnątrz obszaru} \end{cases} \quad (5)$$

Całki krzywoliniowe oznaczono nowymi zmiennymi:

$$A_{ij} = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \quad (6)$$

$$B_{ij} = \int_{\Gamma} G d\Gamma \quad (7)$$

Stosując nowe oznaczenie:

$$A_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq j \\ A_{ij} + c_i, & i = j \end{cases} \quad (8)$$

Badanie nieznanego pola realizowane jest przez polaryzację wybranych elektrod i pomiary potencjału w pozostałych elektrodach. Jeżeli brzeg Γ_1 podzielony zostanie na n elementów można wykonać p niezależnych liniowo projekcji:

$$p = \frac{n}{2} \quad (9)$$

Podczas symulacji na brzegu Γ_1 zadane są mieszane warunki Dirichleta i Neumana, na brzegach Γ_2 i Γ_3 pole musi spełniać warunki ciągłości, z których wynika, że wartość pola nie może zmienić się skokowo:

$$\Phi_1(\Gamma_2) = \Phi_2(\Gamma_2)$$

Wartość pochodnej normalnej pola na brzegu uzależniona jest od współczynnika materiałowego τ . Jeżeli przez τ_1 oznaczono współczynnik materiałowy obszaru pierwszego, zaś τ_2 obszaru drugiego), wówczas:

$$\tau = \frac{\tau_1}{\tau_2} \quad (10)$$

Wartość pochodnej normalnej przy uwzględnieniu współczynników materiałowych wyrażona zostanie zależnością:

$$\tau_1 \frac{\partial \Phi_1(\Gamma_2)}{\partial n} = -\tau_2 \frac{\partial \Phi_2(\Gamma_2)}{\partial n} \quad (12)$$

Minus we wzorze oznacza przeciwny kierunek pochodnej normalnej na brzegu obszaru 1 i 2.

Układ równań (4) można zapisać w postaci macierzowej [4]:

$$\begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & -B_2^1 & A_3^1 & -B_3^1 \\ 0 & A_2^2 & -\tau B_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3^3 & -\tau B_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^1 \\ \Phi_2^1 \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_2 \\ \Phi_3^1 \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Równanie stanu wyrażone jest przez równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (14)$$

Równanie sprzężone do równania stanu wyrażone jest przez równanie Poissona w postaci [1]:

$$-\Delta \Lambda = \Phi - u_0 \quad (15)$$

Przyjmując warunki brzegowe:

$$\Lambda(\Gamma) = 0, \Gamma \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3) \quad (16)$$

Zapis macierzowy równania sprzężonego jest następujący:

$$\begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & -B_2^1 & A_3^1 & -B_3^1 \\ 0 & A_2^2 & -\tau B_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3^3 & -\tau B_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1^1 \\ \Lambda_2^1 \\ \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial n}\right)_2 \\ \Lambda_3^1 \\ \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial n}\right)_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial f}\right)^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Przy czym wartość $\frac{\partial \Phi}{\partial f}$ wyznaczono jako różnicę potencjałów w poszczególnych elektrodach w układzie symulowanym i pomiarowym:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f} = \begin{cases} \Phi_{ij} - u_{ij}, & \text{dla elektrod napięciowych} \\ 0, & \text{dla elektrod prądowych} \end{cases} \quad (18)$$

Przy czym Φ_{ij} oznacza potencjał wyliczony w trybie symulacji w j -tej projekcji w i -tej elektrodzie, analogicznie u_{ij} oznacza potencjał zmierzony w układzie rzeczywistym w j -tej projekcji w i -tej elektrodzie.

Ostatecznie prędkość w kierunku normalnym w poszczególnych węzłach na ruchomym brzegu Γ_2 i Γ_3 wyznaczono [2]:

$$\overline{V}_i^n = \frac{\sum_j^p \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{2,i,j}^1 \right\} \left\{ \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial n} \right)_{2,i,j}^1 \right\}}{p} \quad (19)$$

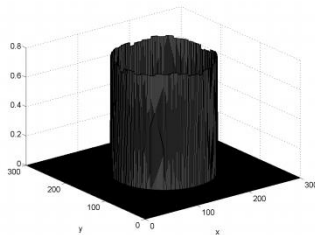
3. Rozszerzenie prędkości na brzeg, równanie poziomicowe

W poprzednim punkcie pokazano sposób na wyznaczenie prędkości w węzłach, a ściślej w dyskretyzowanych elementach. Wykorzystanie tej prędkości bezpośrednio do rozwiązania równania poziomicowego może doprowadzić do szybkiej deformacji zbioru. Uniknięcie tego jest możliwe dzięki rozszerzeniu prędkości. Rozszerzenie prędkości w kierunku normalnym wymaga rozwiązania równania Hamiltona-Jacobiego w postaci:

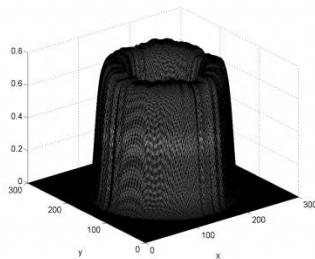
$$V_i + S(\varphi) \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \nabla V = 0 \quad (20)$$

Szczegóły dotyczące rozszerzenia prędkości można znaleźć m.in. w [3, 5, 9].

Prędkość na brzegu przeznaczona do rozszerzenia w przestrzeni trójwymiarowej została pokazana na rysunku 3. Na rysunku 4 zaprezentowano prędkość rozszerzoną w 60 krokach, rozdzielczość zbioru poziomicowego wynosi 300x300 punktów.



Rys. 3. Prędkość na brzegu przeznaczona do rozszerzenia



Rys. 4. Prędkość rozszerzona

Rozwiązanie zadania dotyczącego identyfikacji poszukiwanego kształtu wymaga iteracyjnego rozwiązania równania poziomicowego w postaci:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n - \Delta t (V_{ext}^x \nabla \varphi^x + V_{ext}^y \nabla \varphi^y) \quad (21)$$

Przy czym, jak zostało to zasygnalizowane, zastosowana rozszerzona prędkość V_{ext} musi zostać rozłożona na składowe w kierunku osi X i Y . Stabilność rozwiązania uzyskuje się przez właściwy dobór kroku czasowego Δt , w oparciu o warunek CFL (ang. Courant-Friedrichs-Lewy condition). Szczegółowy schemat rozwiązania równania 21 można znaleźć m.in. [9].

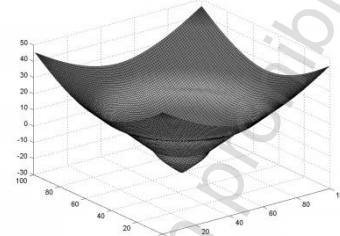
4. Deformacja zbioru poziomicowego, reinicjacja

Iteracyjnie rozwiązywanie równania Hamiltona-Jacobiego powoduje deformację zbioru poziomicowego. Objawia się to spłaszczeniem lub nagłym, stromym wzrostem wartości zbioru w pobliżu brzegu Γ . Reinicjacja zmienia zbiór poziomicowy w inny zbiór, jednakże posiadający tę samą poziomice zerową. Uzyskanie

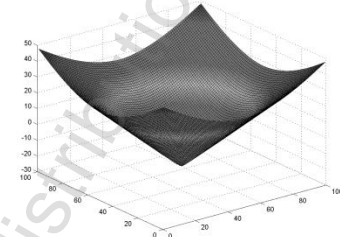
nowego zbioru poziomicowego jest realizowane przez iteracyjne rozwiązanie równania reinicjacji w postaci:

$$V_i + S(\varphi)(|\nabla \varphi| - 1) = 0 \quad (22)$$

Szczegółowy opis procedury reinicjacji można znaleźć w literaturze np. [3, 5, 9]. Na rysunku 5 przedstawiono przykład zdeformowanego zbioru oraz na rysunku 6 po reinicjacji.



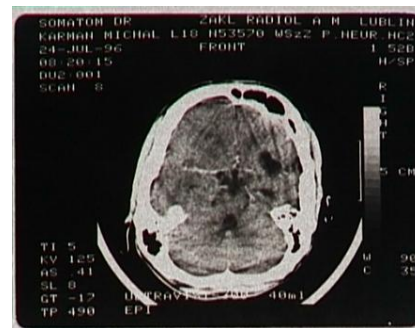
Rys. 5. Zdeformowany zbiór poziomicowy przed reinicjacją



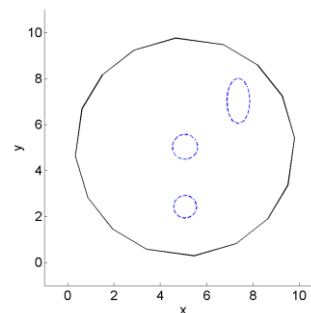
Rys. 6. Zbiór poziomicowy po reinicjacji

5. Przykład numeryczny

Na rysunku 7 przedstawiono zdjęcie rentgenowskie obrazujące trzy obszary niejednorodne objęte krwotokiem oraz na rysunku 8 odniesienie tych obszarów jako struktury przeznaczonej do symulacji numerycznych.

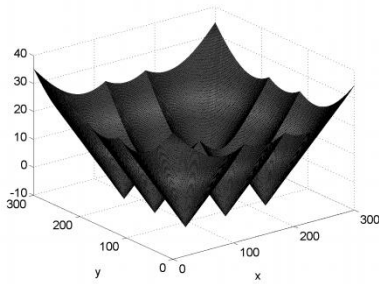


Rys. 7. Zdjęcie rentgenowskie obrazujące trzy obszary niejednorodne objęte krwotokiem

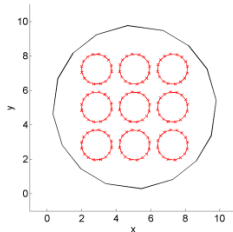


Rys. 8. Odniesienie jako struktura przeznaczona do symulacji numerycznych

Do identyfikacji zaznaczonych niejednorodności strefowych wykorzystano zbiór poziomicowy posiadający dziewięć obiektów ograniczonych poziomice zerowymi (rysunki 9 i 10). Podczas badania przyjęto dyskretyzację 16 elementową, powierzchnię obiektu do wyłączenia ze zbioru poziomicowego określono na 0,5.

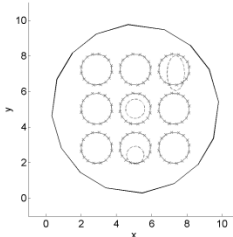


Rys. 9. Wygląd zbioru poziomowego z 9 poziomiami zerowymi

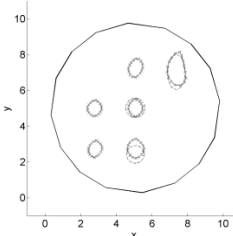


Rys. 10. Poziomice zerowe

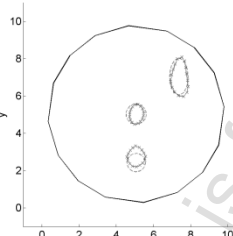
Dla poszczególnych kroków iteracji na rysunkach 11, 12, 13 przedstawiono wygląd obiektów wyodrębnionych przez poziomice zerowe. Na rysunku 14 przedstawiono przebieg funkcji celu dla badanego przypadku – przyjęto dyskretyzację 16 elementową na brzeg.



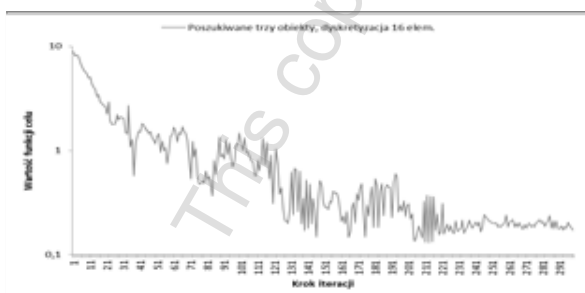
Rys. 11. Krok 1



Rys. 12. Krok 78 - trzy obszary osiągnęły zbyt małą powierzchnię i zostały wyłączone ze zbioru poziomowego



Rys. 13. Krok 300 - koniec symulacji



Rys. 14. Wykres funkcji celu w 300 krokach

6. Podsumowanie

Podsumowując, w zaprezentowanym przykładzie wykazano, że proponowany algorytm jest zbieżny, pokazano przebieg wartości funkcji celu. Podczas ustalania parametrów symulacji należy zwracać uwagę, by przyjęta dyskretyzacja była odpowiednio liczna. Pozwala to uniknąć formowania ostrych krawędzi symulowanych struktur. Należy równocześnie zwrócić uwagę na osiągnięte rozdzielczości zbioru poziomowego, są one silnie powiązane z ilością obiektów wyodrębnionych przez poziomice zerową. Im więcej obiektów, tym rozdzielczość zbioru musi być większa, tak by zapewnić odpowiednią długość każdego elementu brzegowego. W porównaniu do [9] pokazano w jaki sposób tworzyć układ równań dla wielu początkowych poziomicy zerowych, zdefiniowano również kryterium wyłączenia danego obszaru z dalszych symulacji, ze względu na zbyt małą powierzchnię, dołączono również przykład numeryczny. Wyznaczenie prędkości na brzegu, jej rozszerzenie i wykorzystanie w równaniu poziomowym, jak również cykliczne reinicjowanie zbioru poziomowego pozostają, co do zasady, identyczne niezależnie od ilości poziomicy zerowych.

Literatura

- [1] Berowski P., Stasiak M., Sikora J.: *Optymalne projektowanie kształtu metodą zbiorów poziomowych*. Prace Instytutu Elektrotechniki, 233/2007, pp. 22–30.
- [2] Chen W., Cheng J., Lin J., Wang L.: *A level set method to reconstruct the discontinuity of the conductivity in EIT*. Science in China Series A: Mathematics, vol. 52, no. 1/2009, pp. 29–44.
- [3] Fedkiw R., Osher S.: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer-Verlag, Nowy Jork, 2003.
- [4] Jabłoński P.: *Metoda elementów brzegowych w analizie pola elektromagnetycznego*. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa, 2003.
- [5] Ito K., Kunisch K., Li Z.: *Level-set function approach to an inverse interface problem*. INVERSE PROBLEMS 17, pp. 1225–1242
- [6] Sikora J.: *Numeryczne metody rozwiązywania zagadnień brzegowych: Podstawy metody elementów skończonych i metody elementów brzegowych*. Politechnika Lubelska, Lublin, 2011.
- [7] Sikora J.: *Algorytmy numeryczne w tomografii impedancyjnej i wiroprowodowej*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2000.
- [8] Waleska B.: *Analiza pola w strukturze niejednorodnej metodą elementów brzegowych*. Prace Instytutu Elektrotechniki 238/2008, pp. 121–133.
- [9] Waleska B.: *Coupling boundary element method and set level methods for interface problems*. Informatyka, Automatyka, Pomiary w Gospodarce i Ochronie Środowiska 3/2011, pp. 17–23.

Mgr inż. Bartosz Waleska

e-mail: bartosz.waleska@onet.pl

Absolwent wydziału elektrycznego Politechniki Warszawskiej kierunku Automatyka i Robotyka. W chwili obecnej, autor jest pracownikiem działu Badawczo-Rozwojowego dużej polskiej firmy związanej z przemysłem petrochemicznym. Uczestnik Studiów Doktoranckich Instytutu Elektrotechniki w Międzyzlesiu.



Prof. dr hab. inż. Jan Sikora

e-mail: j.sikora@pollub.pl

Ukończył Wydział Elektryczny Politechniki Warszawskiej. W ciągu 34 lat pracy zawodowej zdobył na swojej macierzystej uczelni wszystkie stopnie, tytuły i stanowiska, łącznie ze stanowiskiem profesora zwyczajnego. Z Instytutem Elektrotechniki w Warszawie jest związany od 1998 roku. Od 2008 r. pracuje na Wydziale Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Lubelskiej w Instytucie Elektroniki i Techniki Informatycznych (dawniej Katedra Elektroniki). W latach 2001–2004 pracował jako Senior Research Fellow w University College London w Grupie Tomografii Optycznej Prof. S.R. Arridge'a.

