

ZASTOSOWANIE I PORÓWNANIE ALGORYTMÓW METAHEURYSTYCZNYCH I OPTYMALIZACYJNYCH W REKONSTRUKCJI KONDUKTANCJI SIATEK REZYSTORÓW

Piotr Zegarmistrz, Zbigniew Galias

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki, Katedra Elektrotechniki i Elektroenergetyki

Streszczenie. W pracy przedstawiono wyniki analizy algorytmów rekonstrukcji konduktancji prostokątnych siatek rezystorów na podstawie pomiarów brzegowych. Opracowano i zaimplementowano algorytmy rekonstrukcji bazujące na metodach metaheurystycznych (symulowane wyżarzanie, algorytmy genetyczne) oraz optymalizacyjnych. Zaproponowane algorytmy porównano pod względem stabilności numerycznej oraz poprawności uzyskiwanych wyników. Przedstawiono ograniczenia istniejących algorytmów oraz zaproponowano usprawnienia.

Słowa kluczowe: siatka rezystorów, algorytm rekonstrukcji, tomografia rezystancyjna, symulowane wyżarzanie, algorytmy genetyczne, metody optymalizacyjne

APPLICATION AND COMPARISON OF METAHEURISTIC AND OPTIMIZATION ALGORITHMS FOR RECONSTRUCTION OF CONDUCTANCES IN RESISTIVE GRIDS

Abstract. The problem of reconstruction of conductances in rectangular resistive grids from boundary measurements is studied. Several reconstruction algorithms based on metaheuristics (simulated annealing, genetic algorithms) and optimization methods are compared in terms of numerical stability and accuracy of the results. Limitations of the algorithms are discussed and several improvements are proposed.

Keywords: resistive grid, reconstruction algorithm, resistance tomography, simulated annealing, genetic algorithms, optimization methods

Wstęp

Rekonstrukcja konduktancji siatek rezystorów na podstawie pomiarów brzegowych wzbudza zainteresowanie od wielu lat [3, 4, 7, 13]. Istotą problemu rekonstrukcji jest znalezienie wartości konduktancji elementów łączących węzły siatki, mając dostęp jedynie do węzłów brzegowych.

W roku 1990 Curtis i Morrow zaproponowali analityczny algorytm rekonstrukcji konduktancji na podstawie pomiarów brzegowych [3, 4]. Udowodnili oni, że problem rekonstrukcji ma jednoznaczne rozwiązanie oraz wykazali, że problem ten ma charakter ciągły, tzn. że jeżeli wartości pomiarów na brzegach siatki są do siebie zbliżone, to siatki, dla których uzyskano te wyniki są zbudowane z elementów o zbliżonych wartościach konduktancji. W pracy [17] wykazano, że wspomniany algorytm analityczny ma pewne ograniczenia, a w pracy [18] zaproponowano usprawnienia pozwalające na rekonstrukcję siatek o większych rozmiarach. Opracowanie algorytmów pozwalających na rekonstrukcję siatek o odpowiednio dużych rozmiarach (składających się z wielu elementów) może pozwolić na zastosowanie ich do rozwiązania problemu tomografii rezystancji ośrodków ciągłych z wystarczającą rozdzielczością [5, 9, 14, 15, 16].

Poniższa praca składa się z następujących części. W rozdziale pierwszym zdefiniowano prostokątne siatki rezystorów oraz omówiono ich podstawowe własności. Rozdział drugi zawiera opis zaproponowanego algorytmu rekonstrukcji, definicję funkcji celu oraz prezentację jej podstawowych własności. W rozdziale trzecim i czwartym pokrótce przedstawiono wybrane algorytmy metaheurystyczne i optymalizacyjne zastosowane do poszukiwania minimum funkcji celu. W rozdziale piątym zaprezentowano uzyskane wyniki pomiarów. Następnie zinterpretowano je, zaproponowano możliwe modyfikacje algorytmu i przedstawiono wnioski.

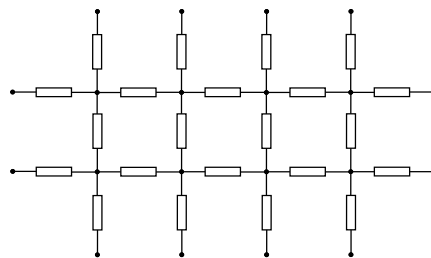
1. Skończone prostokątne siatki rezystorów

Siatką rezystorów nazywamy obwód elektryczny, w którym elementy rezystancyjne łączą sąsiednie węzły kratownicy. W pracy rozważany jest przypadek kratownicy prostokątnej. Założono, że każdy węzeł wewnętrzny jest połączony z czterema węzłami sąsiednimi oraz że każdy węzeł brzegowy jest połączony z jednym węzłem wewnętrznym (rys. 1). Ponadto założono, że wszystkie konduktancje posiadają wartości dodatnie i skończone.

Siatka o n wierszach i m kolumnach posiada $(n-2) \cdot (m-2)$ węzłów wewnętrznych oraz $2 \cdot (n+m-4)$ węzłów brzegowych,

co daje całkowitą liczbę $n \cdot m - 4$ węzłów. Przykładowa siatka zaprezentowana na rysunku 1 jest rozmiaru 4×6 węzłów i posiada 8 węzłów wewnętrznych i 12 węzłów brzegowych, co daje łącznie 20 węzłów.

Algorytm rekonstrukcji konduktancji na podstawie pomiarów brzegowych można zrealizować w oparciu o procedurę, w której wymuszane są odpowiednie prądy w węzłach brzegowych, a mierzone są różnice potencjałów pomiędzy tymi węzłami. Można również zastosować podejście odwrotne – wymuszać napięcia pomiędzy węzłami brzegowymi i dokonywać pomiaru prądów brzegowych. Wektor prądów brzegowych siatki rezystancyjnej zwany jest zestawem danych Neumanna, podczas gdy wektor potencjałów węzłów brzegowych zwany jest zestawem danych Dirichleta. Na podstawie odpowiednich pomiarów można łatwo zdefiniować odwzorowania Neumann–Dirichlet oraz Dirichlet–Neumann [3, 4]. Problem rekonstrukcji sprowadza się do określenia zestawu wartości konduktancji elementów łączących węzły siatki, który odpowiada danemu odwzorowaniu Neumann–Dirichlet lub Dirichlet–Neumann. Udowodniono [3], że odwzorowania te w sposób jednoznaczny określają wartości konduktancji elementów siatki rezystorów.



Rys. 1. Przykładowa siatka o rozmiarze 4×6 węzłów

2. Algorytm rekonstrukcji

W celu wykorzystania procedur metaheurystycznych i optymalizacyjnych do rekonstrukcji konduktancji należy zdefiniować odpowiednią funkcję celu w taki sposób, aby jej globalne minimum odpowiadało prawidłowemu rozwiązaniu problemu.

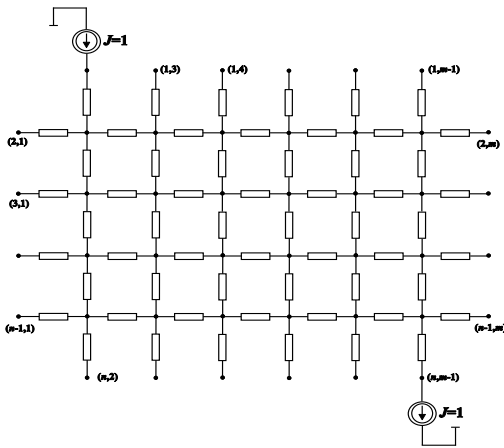
W prezentowanych w tej pracy badaniach funkcję celu skonstruowano w oparciu o pomiary dla odwzorowania Neumann–Dirichlet, czyli wymuszano odpowiednie prądy w węzłach brzegowych i odczytywano odpowiadające im potencjały w tych węzłach. Do obliczenia wartości funkcji celu dla wybranej próbki wykorzystywany jest zawsze więcej niż jeden wektor prądów brzegowych,

gdyż rozmiar wektora potencjałów węzłów brzegowych (równy $k-1$, gdzie k jest liczbą węzłów brzegowych) jest zawsze mniejszy od liczby elementów siatki.

Funkcja celu zdefiniowana jest następująco:

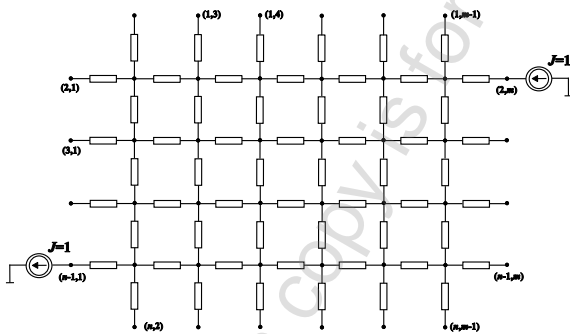
$$f(G) = \sum_{s=1}^l \sum_{t=1}^{k-1} (V_{st}^{org} - V_{st}^{test})^2 \quad (1)$$

gdzie $G=(G_1, G_2, \dots, G_p)$ jest wektorem konduktancji siatki, p oznacza liczbę elementów siatki, $l=k/2$ jest liczbą zestawów pomiarowych, $k-1$ jest rozmiarem zestawu Dirichleta, V_{st}^{org} jest zmierzonym potencjałem węzła t w s -tym zestawie pomiarowym dla oryginalnej nieznannej siatki, a V_{st}^{test} jest obliczonym potencjałem węzła t w s -tym zestawie pomiarowym dla siatki testowej G . Wektory prądów brzegowych wybrano tak, aby wstrzykiwać prąd o wartości $J=1$ w wybranym węźle brzegowym i pobierać ten sam prąd z węzła położonego symetrycznie względem środka siatki. Prądy w pozostałych węzłach brzegowych wynoszą zero. Dla kolejnego wektora prądów brzegowych źródło wymuszające jest przesuwane symetrycznie do sąsiednich węzłów. Procedura rozpoczyna się od skrajnego lewego węzła pierwszego wiersza. Wymuszenie prądów brzegowych w pierwszym kroku obliczenia wartości funkcji celu dla danej próbki zobrazowano na rysunku 2.



Rys. 2. Wymuszenie prądów brzegowych w pierwszym kroku obliczenia wartości funkcji celu

Po osiągnięciu ostatniego węzła pierwszego wiersza (w $m-2$ -gim kroku), źródło wymuszające jest przesuwane do górnego węzła skrajnej prawej kolumny (rys. 3). Następnie procedura jest powtarzana, aż do osiągnięcia ostatniego węzła prawej kolumny w l -tym kroku. W ten sposób do obliczenia wartości funkcji celu wykorzystywanych jest $k/2$ zestawów Neumanna i przez każdy element siatki co najmniej raz płynie niezerowy prąd.



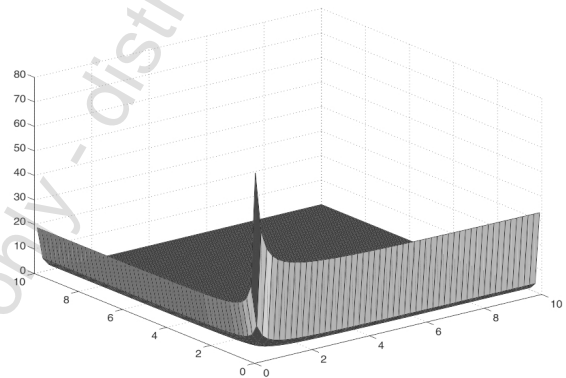
Rys. 3. Wymuszenie prądów brzegowych w $m-1$ -szym kroku obliczenia wartości funkcji celu

W przypadku algorytmów bazujących na procedurach metaheurystycznych obliczenie wartości funkcji celu dla każdej próbki jest niezbędne do oceny jej dopasowania do oryginalnej siatki.

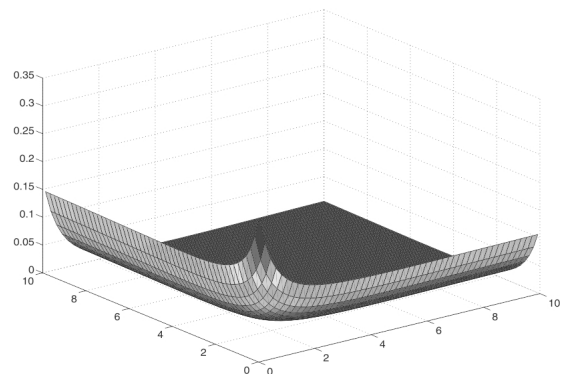
Procedury te polegają na przeszukiwaniu zbioru obiektów tego samego typu i wskazaniu próbki/osobnika najbardziej zbliżonego do oryginału. Do celów badawczych wybrano procedurę symulowanego wyzarczenia oraz algorytm genetyczny w podstawowej wersji.

Algorytmy bazujące na metodach optymalizacyjnych są tak skonstruowane, że problem rekonstrukcji konduktancji jest sformułowany jako zagadnienie znalezienia minimum funkcji wielu zmiennych, gdzie liczba zmiennych odpowiada liczbie elementów siatki. Jeżeli siatka testowa odpowiada dokładnie oryginałowi, funkcja celu określona wzorem (1) przyjmuje wartość zero. Dla każdej innej siatki, funkcja celu przyjmuje wartość dodatnią. Zaimplementowane i przetestowane metody optymalizacyjne poszukiwania minimum funkcji to algorytm sympleksowy Nelder-Meada, metoda quasi-Newtona, metoda sekwencyjnego programowania kwadratowego (optymalizacja nieliniowa z ograniczeniami) oraz nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów.

Aby określić pewne charakterystyczne właściwości funkcji celu wygenerowano wykresy przedstawiające zależność wartości funkcji celu od dwóch wybranych konduktancji siatki. Punkt środkowy płaszczyzny X-Y odpowiada sytuacji, gdy wartości wybranych konduktancji są równe wartościom dla oryginalnej siatki. W punkcie tym funkcja celu przyjmuje wartość zero. Przykładowe wykresy przedstawiono na poniższych rysunkach.



Rys. 4. Wartość funkcji celu w funkcji zmiennych (G_5, G_{11}) dla siatki o rozmiarze 4×4 węzły (12 elementów)

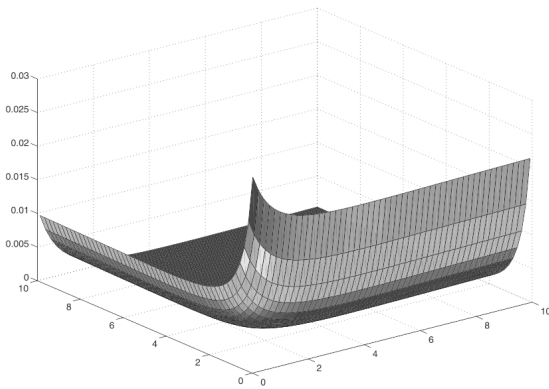


Rys. 5. Wartość funkcji celu w funkcji zmiennych (G_{12}, G_{28}) dla siatki o rozmiarze 6×6 węzłów (40 elementów)

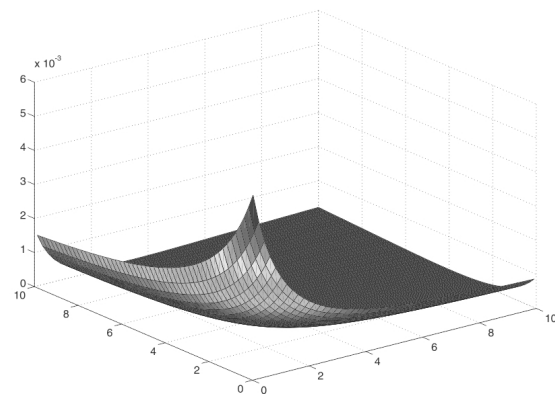
Najważniejszą obserwacją jest, że funkcja celu może być bardzo płaska w otoczeniu minimum. Wynika z tego, że znalezienie w przestrzeni poszukiwań punktu o bardzo małej wartości funkcji celu nie oznacza, że znalezione rozwiązanie jest blisko oryginału.

Inną istotną obserwacją jest, że kształt uzyskanych wykresów bardzo mocno zależy od wyboru zmiennych, od których uzależniamy wartość funkcji celu. Niektóre konduktancje siatki mają duży wpływ na wartość funkcji celu, podczas gdy w przypadku innych wpływ ten jest praktycznie niezauważalny.

W ogólności można zauważyć, że wartości konduktancji leżących w pobliżu środka siatki mają mały wpływ na wartość funkcji celu.



Rys. 6. Wartość funkcji celu w funkcji zmiennych (G_{10}, G_{50}) dla siatki o rozmiarze 7×7 węzłów (60 elementów)



Rys. 7. Wartość funkcji celu w funkcji zmiennych (G_{21}, G_{29}) dla siatki o rozmiarze 8×8 węzłów (84 elementy)

3. Algorytmy metaheurystyczne

W pierwszym etapie badań wybrano i zaimplementowano dwa algorytmy metaheurystyczne pozwalające na poszukiwanie globalnego minimum funkcji celu, czyli na wskazanie próbki najlepiej dopasowanej do rekonstruowanego oryginału. Wybrane algorytmy to symulowane wyżarzanie oraz algorytm genetyczny w podstawowej wersji. Cechą wspólną wszystkich algorytmów metaheurystycznych jest przeszukiwanie zbioru możliwych rozwiązań i obliczanie wartości funkcji celu dla każdej badanej próbki. Poszczególne algorytmy różnią się metodą zmiernia do globalnego minimum. Algorytmy metaheurystyczne inspirowane są zjawiskami fizycznymi lub przyrodniczymi.

Symulowane wyżarzanie [10] jest jednym z pierwszych algorytmów metaheurystycznych i znalazło zastosowanie w wielu dziedzinach optymalizacji. Podstawową zaletą algorytmu symulowanego wyżarzania jest zdolność unikania utknięcia w lokalnym minimum funkcji. Prawdopodobieństwo akceptacji kolejnej próbki jest uzależnione od wartości funkcji celu próbki poprzedniej, przy czym z niezerowym prawdopodobieństwem akceptowane są gorsze rozwiązania w kolejnych krokach. Wartość funkcji celu dla badanej próbki nazywana jest tutaj energią, a warunek akceptacji nowego rozwiązania jest następujący [11]:

$$p = e^{\frac{-\Delta E}{T}} > r \quad (2)$$

gdzie p oznacza prawdopodobieństwo akceptacji, ΔE – różnicę energii analizowanej i poprzedniej próbki, T – temperaturę, a r – wartość losową z przedziału (0; 1), którą można nazwać progiem akceptacji.

Z wzoru (2) wynika, że lepsze rozwiązania (o niższej energii) są zawsze akceptowane (dla $\Delta E < 0$, $p > 1$), natomiast z pewnym prawdopodobieństwem, uzależnionym od temperatury T , akceptowane są gorsze rozwiązania. Wartość parametru T jest stopniowo

obniżana w kolejnych krokach algorytmu, aż do osiągnięcia wartości zerowej. Nawiązuje to do procesu wyżarzania w metalurgii, stąd nazwa algorytmu. Obniżanie temperatury oznacza, że na początku działania algorytmu gorsze rozwiązania są akceptowane z większym prawdopodobieństwem, a w miarę wzrostu liczby iteracji prawdopodobieństwo to maleje. To właśnie ta cecha algorytmu pozwala unikać lokalnych minimów w poszukiwaniu globalnego.

Nowa próbka jest generowana na podstawie najlepszej dotychczas zachowanej próbki w ten sposób, że wartość konduktancji każdego elementu siatki jest modyfikowana o wartość losową w przedziale $(-\delta; \delta)$. Parametry T oraz δ należy dobrać indywidualnie dla każdego postawionego problemu. Przykładowo, mała wartość temperatury ($T \rightarrow 0$) oznacza, że gorsze rozwiązania praktycznie w ogóle nie będą akceptowane. Natomiast zbyt duża wartość T oznacza stan wysokiej energii systemu. Innymi słowy wysokie prawdopodobieństwo akceptacji gorszych rozwiązań, a co za tym idzie trudność w osiągnięciu minimum globalnego.

Symulowane wyżarzanie jest algorytmem działającym w oparciu o analizę pojedynczej próbki i trajektorię zmiernia jej do minimum. Przykładem algorytmu analizującego wiele próbek w każdym kroku jest algorytm genetyczny. Jest to klasyczny algorytm, którego idea działania bazuje na założeniach teorii ewolucji Darwina w biologii. W pierwszym kroku algorytmu generowana jest populacja początkowa (pierwsze pokolenie), składające się z wielu osobników. W omawianym przypadku jest to skończony zbiór siatek o zadanym rozmiarze i wartościach konduktancji elementów z zadanego przedziału.

Działanie algorytmu genetycznego bazuje na trzech podstawowych operacjach: krzyżowanie, mutacja oraz selekcja najlepiej dopasowanych osobników. Selekcja polega na poddaniu ocenie wszystkich osobników w pokoleniu (przypisanie wartości funkcji celu) i wybraniu najlepiej przystosowanych (czyli tych o najniższej wartości funkcji celu). Wśród wyselekcjonowanych osobników dokonuje się krzyżowania oraz mutacji. Tak powstałe osobniki tworzą kolejne pokolenie. Krzyżowanie polega na połączeniu części genotypu jednego osobnika z pozostałą częścią genotypu innego, natomiast mutacja polega na zmianie wartości losowego genu o losową wartość. Część osobników najlepiej przystosowanych może być w całości skopiowana do kolejnego pokolenia. W przypadku zastosowania algorytmu genetycznego do rekonstrukcji siatek rezystancyjnych przyjęto, że genotypem będzie wektor konduktancji wszystkich elementów siatki, a genem wartość konduktancji pojedynczego elementu.

Podobnie jak w naturze przyjęto, że krzyżowanie następuje ze stosunkowo dużym (typowo 0,8–0,95), natomiast mutacja z małym (poniżej 0,1) prawdopodobieństwem. Zaobserwowano, że w badanych przypadkach, gdy zrezygnowano z mutacji (prawdopodobieństwo mutacji ustalono na 0,0) to po określonej liczbie generacji (zależnie od rozmiaru siatki) cała populacja składała się z osobników o takim samym genotypie.

4. Algorytmy optymalizacyjne

Zaimplementowano i porównano cztery algorytmy poszukiwania minimum funkcji $f(G)$, należące do różnych grup algorytmów optymalizacyjnych.

Pierwszym z nich jest algorytm sympleksów Nelder-Meada (oznaczany w zestawieniach wyników jako „sympleksowy-NM”). Jest to metoda bezpośredniego poszukiwania, nie używająca obliczonych numerycznie ani analitycznie wartości pochodnych funkcji celu. Sympleksem nazywamy figurę rozpiętą na $p+1$ wierzchołkach w przestrzeni p -wymiarowej. Taka liczba wierzchołków pozwala na przeszukiwanie przestrzeni we wszystkich możliwych kierunkach. Z tego powodu istotne jest, aby sympleks nie rozpiął figury o zerowej objętości (np. 4 punkty sympleksu w przestrzeni trójwymiarowej leżące na jednej płaszczyźnie). W pierwszej kolejności generowany jest sympleks wokół punktu początkowego x_0 . Jednym z wierzchołków sympleksu jest sam punkt x_0 , natomiast pozostałe p wierzchołków powstaje poprzez dodanie 5% wartości do każdej współrzędnej punktu x_0 . W kolejnych krokach algorytm modyfikuje sympleks wielokrotnie, na podstawie procedury opisanej w [12].

Kolejnym przetestowanym algorytmem jest metoda quasi-Newtona z procedurą interpolacji sześcienną (oznaczona dalej jako „quasi-Newton”). W metodzie tej wartości elementów hesjanu (macierzy drugich pochodnych) nie są obliczane bezpośrednio. Przybliżenia hesjanu są obliczane na podstawie kolejnych wektorów gradientu (lub przybliżeń wektora gradientu).

Metody quasi-Newtona są uogólnieniem metody siecznych poszukiwania zer pierwszej pochodnej dla problemów wielowymiarowych. Dla problemów wielowymiarowych równanie siecznych nie definiuje rozwiązania w sposób jednoznaczny, a różne wersje metody quasi-Newtona różnią się sposobem nakładania dodatkowych ograniczeń na rozwiązanie. Jedną z najczęściej stosowanych metod aproksymacji hesjanu jest metoda BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) [1, 8], która wykazuje wysoką skuteczność nawet dla problemów nie-gładkiej optymalizacji.

Algorytm sympleksowy Nelder-Meada jest generalnie mniej efektywny od metody quasi-Newtona dla problemów wielowymiarowych, ale dla problemów wysoce nieciągłych może być bardziej niezawodny. Z tego powodu postanowiono zaimplementować i porównać oba algorytmy.

Trzecim zastosowanym algorytmem optymalizacyjnym jest metoda sekwencyjnego programowania kwadratowego, należąca do klasy metod optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami [6]. W klasie tej podstawowym celem jest przekształcenie problemu w łatwiejszy do rozwiązania „podproblem”, który można rozwiązać i który może posłużyć za bazę procesu iteracyjnego. Cechą charakterystyczną tej klasy metod jest przekształcenie problemu z ograniczeniami w prostszy problem bez ograniczeń, poprzez użycie funkcji wykluczającej punkty będące blisko lub poza brzegiem ograniczenia. W ten sposób problem z ograniczeniami jest rozwiązywany przy użyciu sekwencji sparametryzowanych optymalizacji bez ograniczeń, które w granicy zmierną do rozwiązania problemu z ograniczeniami. W zaimplementowanej metodzie w każdej iteracji algorytm rozwiązuje „podproblem” programowania kwadratowego. Następnie algorytm aktualizuje wartości przybliżenia hesjanu przy użyciu formuły BFGS.

Ostatnią wybraną i przetestowaną metodą jest metoda najmniejszych kwadratów w wersji nieliniowej. Przy jej pomocy rozwiązywane są nieliniowe problemy typu „data-fitting”, z zastosowaniem algorytmu „trust-region-reflective”, działającego w oparciu o metodę Newtona wewnętrznej odbicia [2]. W każdej iteracji przybliżone rozwiązanie dużego układu równań liniowych jest znajdowane przy pomocy metody wstępnie uwarunkowanych gradientów zespolonych.

5. Uzyskane wyniki

Zaproponowane algorytmy zaimplementowano i przetestowano przy użyciu oprogramowania MATLAB 7.12.0 (R2011a). Algorytmy porównano dla różnych rozmiarów siatek i różnego zakresu wartości konduktancji, z których zbudowana jest siatka.

W celu porównania metod przeprowadzono dla każdego z algorytmów rekonstrukcję konduktancji dla 20 losowych siatek testowych. W tabelach przedstawione są wyniki średnie. Analizowano wyłącznie siatki kwadratowe (o równej liczbie wierszy i kolumn). Dla wybranych procedur ustalono górne ograniczenie czasu obliczeń dla pojedynczej siatki testowej równe 10 sekund. Jako parametr porównawczy poprawności działania algorytmów rekonstrukcji wybrano średni maksymalny błąd rekonstrukcji. Parametr ten jest obliczony w następujący sposób. Dla każdej siatki losowej wskazywano element, dla którego różnica pomiędzy wartością konduktancji oryginalnej siatki oraz siatki zrekonstruowanej była największa. Następnie uśredniono wartość tego parametru z wszystkich podjętych prób rekonstrukcji. Zaobserwowano, że maksymalny błąd rekonstrukcji z reguły występuje na elemencie położonym blisko środka siatki.

W pierwszej serii doświadczeń analizowano rekonstrukcję siatek, w których wartości konduktancji były losowo wybierane z przedziału (0,1;10,0). Oznacza to różnice konduktancji elementów siatki dochodzące do dwóch rzędów wielkości, co podnosi stopień trudności problemu rekonstrukcji.

W tabeli 1. przedstawiono wyniki doświadczeń przeprowadzonych dla siatek o rozmiarze 4×4 węzły. Dla każdego przetestowanego algorytmu przedstawiono średni maksymalny błąd rekonstrukcji oraz średni czas obliczeń.

Tabela 1. Porównanie metod dla siatki o wymiarach 4×4 węzły

Algorytm	G_{MIN}	G_{MAX}	Średni maksymalny błąd rekonstrukcji	Średni czas obliczeń [s]
symul. wyzarczenie	0,1	10,0	5,980584	11,23374
alg. genetyczny	0,1	10,0	2,462503	1,096279
sympleksowy-NM	0,1	10,0	14,77997	1,230723
quasi-Newton	0,1	10,0	0,001183	1,103715
sekw. prog. kw.	0,1	10,0	0,000077	1,129632
niel. met. najmn. kw.	0,1	10,0	0,000000	0,123826

Jak widać z tabeli 1. już dla niewielkiego rozmiaru siatki (siatka o rozmiarze 4×4 węzły ma 12 elementów) istnieją bardzo poważne różnice w działaniu poszczególnych algorytmów. Algorytm bazujący na procedurze symulowanego wyzarczenia był za każdym razem przerywany, po osiągnięciu wspomnianego wcześniej maksymalnego czasu obliczeń. Jak widać po wartości maksymalnego błędu rekonstrukcji, minimum globalne funkcji celu nie zostało w tym czasie znalezione. Bardzo duża wartość błędu rekonstrukcji dla metody sympleksów Nelder-Meada może wynikać z braku stabilności numerycznej metody dla omawianego problemu.

Należy zauważyć, że algorytmy bazujące na metodzie quasi-Newtona oraz sekwencyjnego programowania kwadratowego dla siatek o rozmiarze 4×4 węzły działają z satysfakcjonującą precyzją. Jednakże nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów przewyższa pozostałe metody, zarówno pod względem precyzji rekonstrukcji, jak również czasu obliczeń.

Na podstawie wyników z tabeli 1. wybrano algorytm bazujący na metodzie najmniejszych kwadratów i zbadano jego właściwości dla większych rozmiarów siatek (n). Zaobserwowano, że nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów działa w taki sposób, że albo osiąga minimum globalne funkcji celu w stosunkowo krótkim czasie, albo jej czas obliczeń znacznie się wydłuża i algorytm zatrzymuje się po osiągnięciu ustawionej wartości maksymalnej liczby iteracji, nie znajdując minimum. W związku z tym, w tabeli 2. oprócz średniego czasu obliczeń zaprezentowano parametr oznaczający odsetek poprawnych wyników rekonstrukcji, czyli tych, które doprowadziły do osiągnięcia minimum funkcji celu.

Tabela 2. Nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów dla różnych rozmiarów siatek

n	G_{MIN}	G_{MAX}	% poprawnych wyników	Średni Czas Obliczeń [s]
3	0,1	10,0	100	0,081235
4	0,1	10,0	100	0,123826
5	0,1	10,0	80	0,732583
6	0,1	10,0	70	4,101307
7	0,1	10,0	20	30,18785
8	0,1	10,0	0	30,90485

Wraz ze zwiększaniem rozmiaru siatki, maleje odsetek przypadków w których funkcja osiąga minimum globalne i znajduje poprawne rozwiązanie. Zastosowano usprawnienie polegające na uruchomieniu procedury wielokrotnie, z różnych punktów startowych i wybraniu najlepszego rozwiązania. Pozwoliło to na rekonstrukcję dla siatki o rozmiarze 7 ze 100%-ową skutecznością, ale nie pozwoliło na poprawę działania algorytmu dla większych siatek. Obserwacje z tym związane zostaną szczegółowo omówione w następnym rozdziale.

Następnie przetestowano algorytm quasi-Newtona dla większych rozmiarów siatek. W tabeli 3. zaprezentowano średni maksymalny błąd rekonstrukcji, średni czas obliczeń oraz odsetek poprawnych wyników rekonstrukcji. Oczywiście jest, że metoda quasi-Newtona działa gorzej niż nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów, jednak jej właściwości mogą być istotne dla dalszych usprawnień algorytmów rekonstrukcji. Jak widać z tabeli 3. badany algorytm działa poprawnie tylko dla siatek o rozmiarze nie większym niż 6.

Tabela 3. Metoda quasi-Newtona dla różnych rozmiarów siatek

n	G_{MIN}	G_{MAX}	Średni maksymalny błąd rekonstrukcji	% poprawnych wyników	Średni czas obliczeń [s]
3	0,1	10,0	0,000003	100	0,152758
4	0,1	10,0	0,001183	100	1,103715
5	0,1	10,0	0,002413	85	4,737862
6	0,1	10,0	–	0	13,75410

Podobne doświadczenie przeprowadzono dla algorytmu bazującego na metodzie sekwencyjnego programowania kwadratowego. Tabela 4. prezentuje uzyskane wyniki. Wartość uśrednionego maksymalnego błędu rekonstrukcji oraz odsetek poprawnych wyników dla siatek o rozmiarach od 3×3 do 5×5 węzłów pozwalały podejrzewać, że efektywność algorytmu będzie większa niż dla metody quasi-Newtona. Jednak z ostatniego wiersza tabeli widać, że oba algorytmy są ograniczone ze względu na rozmiar siatek możliwych do rekonstrukcji i ograniczenie to dla obu algorytmów jest na tym samym poziomie – siatek 6×6 węzłów.

Tabela 4. Metoda sekwencyjnego programowania kwadratowego dla różnych rozmiarów siatek

n	G_{MIN}	G_{MAX}	Średni maksymalny błąd rekonstrukcji	% poprawnych wyników	Średni czas obliczeń [s]
3	0,1	10,0	0,000002	100	0,218294
4	0,1	10,0	0,000077	100	1,129632
5	0,1	10,0	0,000728	100	4,887621
6	0,1	10,0	–	0	8,794875

Z przedstawionych dotychczas wyników należy wnioskować, że w celu osiągnięcia prawidłowej rekonstrukcji dla większych siatek należy zmniejszyć zakres możliwych konduktancji. W kolejnych testach zakres ten zmniejszono z $(0,1; 10,0)$ do $(1,0; 2,0)$. Porównanie algorytmów przy ograniczonym zakresie wartości konduktancji może być bardziej interesujące z praktycznego punktu widzenia. Zbadano działanie algorytmu bazującego na nieliniowej metodzie najmniejszych kwadratów dla różnych rozmiarów siatek i z losowo wybranym punktem startowym. Wyniki takiego eksperymentu przedstawiono w tabeli 5.

Tabela 5. Nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów – ograniczony zakres konduktancji

n	G_{MIN}	G_{MAX}	% poprawnych wyników	Średni czas obliczeń [s]
7	1,0	2,0	100	0,76
8	1,0	2,0	100	2,09
9	1,0	2,0	77	32,95

Zgodnie z oczekiwaniami, redukcja przestrzeni poszukiwań pozwoliła poprawić skuteczność działania algorytmu. Dla siatek o rozmiarze 9×9 węzłów w 77% uruchomień algorytmu uzyskano prawidłowy wynik rekonstrukcji, podczas gdy we wcześniejszym przypadku (szerszy zakres konduktancji) algorytm nie działał już dla siatek o rozmiarze 8×8 węzłów.

W dalszych badaniach postanowiono sprawdzić, jak poprawiła się skuteczność działania pozostałych algorytmów o zmniejszeniu zakresu możliwych konduktancji. Przyjęto za poprawne te wyniki, dla których maksymalny błąd rekonstrukcji był poniżej 5% wartości konduktancji. Wyniki zebrano w tabeli 6.

Tabela 6. Wybrane algorytmy - ograniczony zakres konduktancji

Algorytm	n	G_{MIN}	G_{MAX}	Średni maksymalny błąd rekonstrukcji	% poprawnych wyników	Średni czas obliczeń [s]
symul. wyzarzanie	5	1,0	2,0	0,595642	0	12,567092
alg. genetyczny	5	1,0	2,0	0,579245	0	1,8232247
quasi-Newton	6	1,0	2,0	0,108296	50	7,3833632
quasi-Newton	7	1,0	2,0	0,507784	0	12,132236
sekw. prog. kw.	6	1,0	2,0	0,291947	0	8,6238615
sekw. prog. kw.	7	1,0	2,0	0,634132	0	13,108094

Jak widać poprawa nastąpiła tylko dla algorytmu działającego w oparciu o metodę quasi-Newtona. W przypadku pozostałych zbadanych algorytmów zawężenie zakresu możliwych konduktancji nie pozwoliło na rekonstrukcję siatek o większych rozmiarach, co praktycznie dyskwalifikuje te algorytmy w kontekście wykorzystania ich do rekonstrukcji konduktancji siatek rezystorów.

6. Ograniczenia i usprawnienia

W tej części zostaną omówione ograniczenia przetestowanych algorytmów oraz na podstawie wcześniejszych obserwacji zaproponowane zostaną pewne usprawnienia.

Jak zaobserwowano w poprzednim rozdziale skuteczność działania algorytmów bazujących na metodach optymalizacyjnych silnie zależy od wyboru punktu startowego. Najprostsze usprawnienie zaimplementowanych algorytmów polega na uruchomieniu algorytmu równolegle w wielu punktach startowych i wybraniu najlepszego spośród wyznaczonych rozwiązań problemu.

Jak już wspomniano, nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów prowadzi do prawidłowego rozwiązania w małej liczbie iteracji lub osiąga zadaną graniczną wartość liczby iteracji nie realizując prawidłowej rekonstrukcji. W związku z tym, dalsze usprawnienie algorytmu może polegać na ograniczeniu czasu obliczeń poprzez obniżenie wartości maksymalnej liczby iteracji dla każdego punktu startowego.

Tabela 7. Analiza maksymalnej liczby iteracji dla niel. met. najmniejszych kwadratów

n	G_{MIN}	G_{MAX}	Maks. liczba iteracji	% poprawnych wyników	Średni czas obliczeń [s]	Liczba popr. wyników na jedn. czasu
6	1,0	2,0	10000	100	0,32	3,13
6	1,0	2,0	5000	100	0,31	3,23
6	1,0	2,0	2000	100	0,29	3,45
6	1,0	2,0	1000	100	0,31	3,23
6	1,0	2,0	500	100	0,31	3,22
6	1,0	2,0	400	100	0,33	3,03
6	1,0	2,0	300	100	0,30	3,33
6	1,0	2,0	250	98	0,28	3,50
6	1,0	2,0	230	88	0,24	3,67
6	1,0	2,0	220	83	0,24	3,46
6	1,0	2,0	210	89	0,24	3,71
6	1,0	2,0	200	58	0,23	2,52
6	1,0	2,0	100	0	0,15	0,00
7	1,0	2,0	10000	100	0,76	1,32
7	1,0	2,0	1000	100	0,75	1,33
7	1,0	2,0	500	99	0,73	1,35
7	1,0	2,0	400	97	0,61	1,59
7	1,0	2,0	350	55	0,54	1,02
7	1,0	2,0	300	6	0,46	1,30
7	1,0	2,0	200	0	0,38	0,00
8	1,0	2,0	1000	100	2,09	0,48
8	1,0	2,0	700	77	1,82	0,42
8	1,0	2,0	600	71	1,61	0,44
8	1,0	2,0	550	39	1,45	0,27
8	1,0	2,0	500	10	1,24	0,081
9	1,0	2,0	20000	77	32,95	0,023
9	1,0	2,0	10000	78	18,96	0,041
9	1,0	2,0	5000	61	16,51	0,037
9	1,0	2,0	2000	39	9,69	0,040
9	1,0	2,0	1000	3	5,08	0,006

Badania wykazały, że dla każdego rozmiaru siatki i zakresu konduktancji istnieje optymalna wartość maksymalnej liczby iteracji, dla której prawdopodobieństwo uzyskania prawidłowego rozwiązania (w ustalonym czasie obliczeń) jest największe. W tabeli 7. zaprezentowano dane pozwalające na określenie optymalnej wartości maksymalnej liczby iteracji dla danego rozmiaru siatki. Dla różnych wartości maksymalnej liczby iteracji przedstawiono odsetek uruchomień algorytmu prowadzących do prawidłowych rozwiązań oraz średni czas obliczeń dla każdego uruchomienia. W tym wypadku przyjęto za prawidłowe te rozwiązania, które rekonstruują konduktancje elementów siatki z maksymalnym błędem rekonstrukcji poniżej 1% maksymalnej wartości konduktancji. W skrajnej prawej kolumnie znajdują się obliczone wartości ilorazu odsetku prawidłowych rozwiązań

i średniego czasu obliczeń. Współczynnik ten obrazuje liczbę prawidłowych rekonstrukcji w przeliczeniu na jednostkę czasu.

Po wymnożeniu tej wartości przez całkowity czas obliczeń w wyniku otrzymujemy spodziewaną liczbę poprawnych rekonstrukcji.

Należy zauważyć, że dla mniejszych siatek ($n=6,7$) liczba prawidłowych rekonstrukcji na jednostkę czasu nie zależy znacząco od zadanej wartości maksymalnej liczby iteracji, aż do momentu, gdy maksymalna liczba iteracji nie znajdzie się poniżej minimum wymaganego do określenia globalnego minimum funkcji celu. Dla większych siatek ($n=8,9$) zależność pomiędzy omawianym współczynnikiem a maksymalną liczbą iteracji jest bardziej znacząca. Przykładowo dla $n=9$ oraz zakresu konduktancji $(1,0; 2,0)$ na podstawie tabeli 7. należy wybrać maksymalną liczbę iteracji na poziomie 10000. Ta wartość pozwala spodziewać się największej liczby prawidłowych rezultatów na jednostkę czasu, a co za tym idzie zwiększyć prawdopodobieństwo prawidłowej rekonstrukcji. Dla wyższej wartości maksymalnej liczby iteracji algorytm traci wiele czasu na wykonywanie obliczeń dla nieprawidłowych rezultatów rekonstrukcji i w związku z tym obniża się prawdopodobieństwo prawidłowej rekonstrukcji.

Zastosowanie modyfikacji algorytmu, polegającej na wprowadzeniu wielu punktów startowych pozwala na rekonstrukcję siatek o rozmiarze 7×7 z konduktancjami z zakresu $(0,1; 10,0)$ ze 100% skutecznością. Niestety algorytm nadal nie pozwala na rekonstrukcję siatek o większych rozmiarach przy takim zakresie konduktancji. Przy 100 punktach startowych, maksymalnej liczbie iteracji ustawionej na 10000, zakresie konduktancji $(0,1; 10,0)$ żaden z punktów startowych nie doprowadził do prawidłowej rekonstrukcji siatki.

7. Wnioski

Przedstawiono możliwości zastosowania metod optymalizacyjnych i metaheurystycznych do rekonstrukcji konduktancji siatek rezystorów. Przetestowano sześć algorytmów. Wykazano, że algorytm bazujący na nieliniowej metodzie najmniejszych kwadratów przewyższa skutecznością pozostałe algorytmy. Udowodniono, że dla wybranego zakresu możliwych konduktancji istnieje ograniczenie rozmiaru siatki, dla którego rekonstrukcja prowadzi do poprawnego rezultatu, przy zachowaniu satysfakcjonującego czasu obliczeń.

Pokazano, że redukcja zakresu możliwych wartości konduktancji elementów siatki pozwala na rekonstruowanie siatek o większych rozmiarach. Nawet dla stosunkowo wąskiego zakresu konduktancji, maksymalny rozmiar siatki, dla którego prawidłowa rekonstrukcja jest możliwa przy użyciu najlepszego z zaprezentowanych algorytmów, wynosi 9×9 węzłów. Niestety, ogranicza to w sposób znaczący możliwe zastosowanie wspomnianych algorytmów rekonstrukcji konduktancji w tomografii rezystancyjnej, gdzie element ciągły o zmiennej konduktywności modeluje się za pomocą odpowiednio gęstej siatki.

W dalszych badaniach planowane jest testowanie funkcji celu zdefiniowanych na podstawie inaczej wybranych zestawów danych Neumanna oraz implementacja algorytmów optymalizacyjnych wykorzystujących obliczone analitycznie pochodne funkcji celu.

Podziękowanie

Praca została sfinansowana ze środków przeznaczonych na badania statutowe Akademii Górniczo-Hutniczej, grant nr 10.10.120.133.

Literatura

- [1] Broyden C.G.: *The Convergence of a Class of Double-Rank Minimization Algorithms*. Journal Inst. Math. Applic., nr 6/1970, s. 76-90.
- [2] Coleman T.F., Li Y.: *An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds*. SIAM Journal on Optimization, nr 6/1996, s. 418-445
- [3] Curtis E.B., Morrow J.A.: *Determining the resistors in a network*. SIAM J. Applied Math., nr 50 (1990), s. 918-930.

- [4] Curtis E.B., Morrow J.A.: *The Dirichlet to Neumann map for a resistor network*. SIAM J. of Applied Math., nr 51 (1991), s. 1011-1029.
- [5] Filipowicz S.F., Rymarczyk T.: *Tomografia Impedancyjna, pomiary, konstrukcje i metody tworzenia obrazu*. BelStudio, Warszawa 2003.
- [6] Gill P.E., Murray W., Wright M.H.: *Practical Optimization*. London, Academic Press, 1981.
- [7] Goff M.: *Recovering networks with signed conductivities*. University of Washington, REU Summer Research, Inverse Problems, 2003, s. 1-18.
- [8] Goldfarb D.: *A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means*. Mathematics of Computing, nr 24/1970, s. 23-26.
- [9] Holder D.S.: *Electrical Impedance Tomography: Methods, History and Applications*. Institute of Physics, 2004.
- [10] Kirkpatrick S., Gelatt C.D., Vecchi M.P.: *Optimization by simulated annealing*. Science 220 (4598), 1983, s. 671-680.
- [11] Koziel S., Yang X.S.: *Computational Optimization, Methods and Algorithms*. Studies in Computational Intelligence, t.356, Springer, 2011.
- [12] Lagarias J.C., Reeds J.A., Wright M.H., Wright P.E.: *Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions*. SIAM Journal of Optimization, t. 9, nr 1/1998, s. 112-147
- [13] Lorussi F., Rocchia W., Scilingo E.P., Tognetti A., Rossi D.D.: *Wearable, redundant fabric-based sensor arrays for reconstruction of body segment posture*. IEEE Sensors Journal, t. 4, nr 6/2004, s. 807-818.
- [14] Nita K., Sikora J., Wójtowicz S., Biernat K.: *Impedance tomography data acquisition system for brick walls humidity level evaluation*. Przegląd Elektrotechniczny, nr 11/2007, s. 171-173.
- [15] Uhlmann G.: *Recent progress in the anisotropic electrical impedance problem*. USA-Chile Workshop on Nonlinear Analysis, Electron. J. Diff. Eqns., Conf. 06. 2001, s. 303-311.
- [16] Webster J.G.: *Electrical Impedance Tomography*. Bristol and New York: Adam Hilger, 1990.
- [17] Zegarmistrz P., Galias Z.: *Study of the algorithm for reconstruction of conductances in square resistive grids*. In Proc. Int. Conference on Signals and Electronic Systems, ICSES'06, Łódź, 2006, s. 193-196.
- [18] Zegarmistrz P., Galias Z.: *On reconstruction of conductances in resistor grids from boundary measurements*. In Proc. European Conference on Circuit Theory and Design, ECCTD'07, Sevilla, 2007, s. 783-786.

Mgr inż. Piotr Zegarmistrz
e-mail: pzegar@agh.edu.pl



Piotr Zegarmistrz jest absolwentem kierunku Elektronika i Telekomunikacja na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie. Od 1 października 2004 jest zatrudniony na stanowisku asystenta w Katedrze Elektrotechniki tego wydziału (obecnie K. Elektrotechniki i Elektroenergetyki). W swojej pracy badawczej zajmuje się analizą algorytmów rekonstrukcji siatek rezystorów. Jest autorem i współautorem publikacji zarówno konferencyjnych, jak i w czasopiśmie, w głównej mierze związanych z tematyką algorytmów rekonstrukcji. W październiku 2011 autor odbył staż naukowy w Engineering Optimization & Modeling Center, School of Science and Engineering, Reykjavik University sfinansowany przez Fundusz Stypendialny i Szkoleniowy Fundacji Rozwoju

Prof. dr hab. inż. Zbigniew Galias
e-mail: galias@agh.edu.pl



Zbigniew Galias ukończył w 1990 roku studia na kierunku Elektronika i Telekomunikacja na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie oraz w 1992 roku studia na kierunku Matematyka Teoretyczna w Uniwersytecie Jagiellońskim. W roku 1996 uzyskał stopień doktora, a w roku 2004 stopień doktora habilitowanego nauk technicznych w dyscyplinie elektrotechnika w AGH. Od 1992 roku był zatrudniony na stanowisku asystenta, a od 1996 roku na stanowisku adiunkta w Katedrze Elektrotechniki Akademii Górniczo-Hutniczej. Od 2005 roku jest zatrudniony na stanowisku profesora nadzwyczajnego w Katedrze Elektrotechniki i Elektroenergetyki. Jego zainteresowania naukowe obejmują metody symulacji, analizy i projektowania układów nieliniowych, w szczególności układów chaotycznych, metody numeryczne, arytmetykę przedziałową i komputerowo wspierane dowody w dziedzinie układów dynamicznych. Opublikował ponad 100 prac naukowych. Odbył wyjazdy naukowe do Uniwersytetów w Monachium (1991, 1993), Berkeley (1996), San Diego (1999-2000), Melbourne (2005, 2007, 2011) oraz Uppsali (2011). Otrzymał nagrodę Fundacji Nauki Polskiej dla młodych pracowników nauki (1994), nagrodę Prezesa Rady Ministrów za wyróżnioną rozprawę doktorską (1996) oraz stypendium Fulbrighta (1999).