

ZASTOSOWANIE WYMIARU FRAKTALNEGO DO ANALIZY KONTURU OBIEKTÓW

Zbigniew Omiotek

Wyższa Szkoła Zarządzania i Administracji w Zamościu, Wydział Zarządzania i Administracji

Streszczenie. W artykule zaprezentowano wyniki analizy fraktalnej zbioru obrazów testowych podzielonych umownie na 12 kategorii. Celem badań było szacowanie wymiaru fraktalnego na podstawie konturu badanych obiektów, w oparciu o metodę pudełkową i metodę masa-promień. Wyniki analizy pokazały, iż łączne zastosowanie obu wspomnianych metod może być wykorzystane w procesie klasyfikacji obrazów.

Słowa kluczowe: fraktal, wymiar fraktalny, metoda pudełkowa, metoda masa-promień

The use of the fractal dimension for analysis of the contour of objects

Abstract. The article presents the results of fractal analysis of a set of test images which was divided conventionally into 12 categories. The aim of the study was to estimate the fractal dimension based on the contour of studied objects, using box-counting method and mass-radius method. The results showed that combination of both above methods can be used in the image classification process.

Keywords: fractal, fractal dimension, box-counting method, mass-radius method

Wstęp

W wielu obszarach nauki istnieje potrzeba oceny stopnia złożoności analizowanych obrazów, przy czym ocena ta może dotyczyć zarówno cech linii brzegowej obiektów (konturu), jak i cech ich pola powierzchni [1]. Zależnie od celu dokonywanej analizy, korzystniejsze może być zastosowanie metod dokonujących oceny złożoności pierwszej lub drugiej grupy cech. Oba rodzaje metod opisują różne komplementarne cechy analizowanego obiektu, dlatego też, w celu poszerzenia zasobu informacji, metody te mogą być również stosowane łącznie. W przypadku analizy konturu, istnieje szereg różnych metod opisujących długość i kształt linii brzegowej wyznaczającej granice analizowanych obiektów. Można tu wymienić proste algorytmy śledzenia konturu, analizę sąsiedztwa punktów w siatce dyskretnej, cztero-, ośmio- lub wielokierunkowe kody łańcuchowe Freemana, reprezentację syntaktyczną konturów, a także analizę fraktalną.

Analiza fraktalna dostarcza miary ilościowej w postaci wymiaru fraktalnego. Pojęcie fraktala zostało zdefiniowane przez Mandelbrota [2] i oznacza ono zbiór charakteryzujący się następującymi cechami:

- jest samopodobny (po wycięciu z niego dowolnie małej części i jej powiększeniu, powstaje obiekt, który wiernie naśladuje całość);
- jest opisywany zależnościami rekurencyjnymi a nie wzorami matematycznymi;
- jego wymiar nie jest liczbą naturalną;
- ma naturalny wygląd („poszarpany”, „kłębiasty”, itp.).

Wymiar fraktalny jest wykorzystywany w wielu dziedzinach prowadzonych obecnie badań jako jedno z kryteriów służących do automatycznej klasyfikacji i rozpoznawania obrazów. Przykładowe obszary jego zastosowania obejmują analizę i interpretację obrazów medycznych (np. sygnały EEG i obrazy MRI mózgu), rozpoznawanie skupisk zieleni, zmienności gatunkowej roślin, linii brzegowych, zjawisk atmosferycznych, czy też identyfikację osób na podstawie tęczy oka. Podczas szacowania wymiaru fraktalnego wykorzystywana jest koncepcja samopodobieństwa. Wyraża się ona w tym, iż obraz składa się z kopii (odpowiednio przekształconych) części samego siebie. Cechę tę można zauważyć na przykładzie większości obrazów obserwowanych w naturze (linie brzegowe, chmury, góry, drzewa, domy, twarze, skrzydła motyli, skorodowany metal, itd.).

Wymiar fraktalny charakteryzuje stopień złożoności obiektów wykorzystując ocenę tego, jak szybko wzrastają długość, powierzchnia czy objętość, jeśli pomiar dokonywany jest z coraz większą dokładnością. W przypadku obiektów fraktalnych wykorzystana jest zasada, że dwie wielkości – długość, powierzchnia czy objętość z jednej strony a stopień dokładności z drugiej – nie zmieniają się w sposób dowolny lecz są związane

prawem potęgowym, które pozwala wyznaczyć jedną wartość na podstawie drugiej. Istnieje wiele estymatorów wymiaru fraktalnego [3], wśród których największe znaczenie posiadają:

- wymiar Richardsona – otrzymywany przez zliczanie liczby kroków potrzebnych do przemierzenia konturu w funkcji długości kroku;
- wymiar Minkowskiego – obliczany za pomocą metody cyrklowej, polegającej na poszukiwaniu liniowej zależności pomiędzy logarytmami długości badanej krzywej i rozstawu cyrkla użytego do jej pomiaru;
- wymiar Kolomogorowa (wymiar pojemnościowy) – otrzymywany przez zliczanie kwadratowych (lub sześciennych) elementów pokrywających badany zbiór.

Dla rzeczywistych obiektów nie można obliczyć wymiaru fraktalnego w sposób analityczny, dlatego opracowano szereg metod numerycznych, które podają jego wartość przybliżoną [4]. Do bardziej popularnych, służących do analizy złożoności konturu obiektów, należą metody: pudełkowa, masa-promień, dylatacji, pręta, cyrklowa.

W rozdziale pierwszym opisano sposób szacowania wymiaru fraktalnego za pomocą metody pudełkowej oraz metody masa-promień. Wymienione metody zostały wykorzystane do przeprowadzenia badań obrazów należących do dwunastu różnych kategorii. Wyniki tych badań przedstawiono w rozdziale drugim. Wnioski podsumowujące wyniki analizy zamieszczono w rozdziale trzecim.

1. Wybrane metody szacowania wymiaru fraktalnego

1.1. Metoda pudełkowa

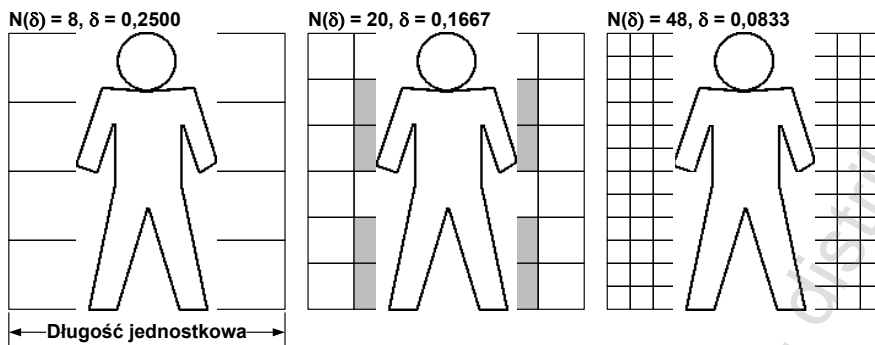
W celu obliczenia wymiaru fraktalnego metodą pudełkową, badany obraz należy umieścić na regularnej siatce składającej się z elementów o długości boków równej δ , a następnie policzyć ile elementów siatki (pudełek) pokrywa kontur obrazu (rys. 1). Liczba, którą otrzymamy ($N(\delta)$), będzie zależna od rozmiaru elementów siatki. W dalszych iteracjach należy stopniowo zmniejszać wartość δ i określać odpowiednie wartości $N(\delta)$. Istota określenia wymiaru pudełkowego polega więc na obserwacji, jak zmienia się $N(\delta)$ przy zmianie δ [5]. Należy w tym miejscu zaznaczyć, iż δ jest ułamkiem umownej długości jednostkowej. W zależności od wielkości badanych obiektów, długość jednostkowa odpowiada kilometrom (granice państw), metrom (skupiska zieleni), centymetrom (obrazy medyczne), a także jednostkom mniejszym od wyżej wymienionych.

Dla obrazów występujących w naturze, liczba elementów występujących w kolejnych iteracjach nie jest stała, dlatego

wymiar pudełkowy określa się jako wartość graniczną, gdzie długość pudełka zmierza do zera. Zakładając, że $N(\delta)$ jest liczbą pudełek o długości boku δ pokrywających kontur obrazu, wymiar fraktalny oszacowany metodą pudełkową takiego obrazu (przy założeniu, że granica istnieje) jest zdefiniowany zależnością:

$$D_b = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N(\delta))}{\log(1/\delta)} \quad (1)$$

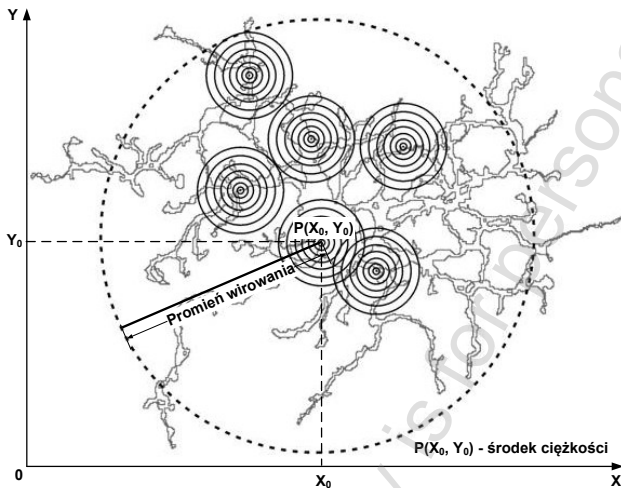
Praktycznie, wymiar pudełkowy określa się w ten sposób, że rysujemy wykres $\log(N(\delta))$ w funkcji $\log(1/\delta)$ i aproksymujemy go linią prostą. Nachylenie otrzymanej prostej jest wymiarem pudełkowym. Dla przykładu przedstawionego na rys. 1 oszacowana w ten sposób wartość wymiaru fraktalnego (po zaokrągleniu do dwóch miejsc po przecinku) wynosi 1,59.



Rys. 1. Idea metody pudełkowej
Fig. 1. Conception of the box-counting method

1.2. Metoda masa-promień

W metodzie masa-promień (rys. 3), w pierwszej kolejności obliczany jest środek ciężkości obiektu, czyli średnia wartość współrzędnych x i y wszystkich pikseli obrazu przedstawiających obiekt. Następnie, ustalany jest tzw. promień wirowania. Okrąg wyznaczony przez promień wirowania został na rys. 3 oznaczony linią przerywaną.

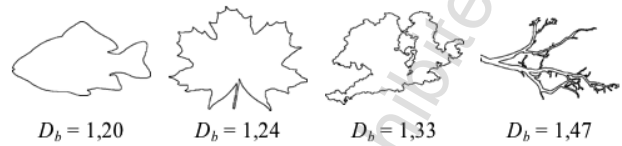


Rys. 3. Idea metody masa-promień [6]
Fig. 3. Conception of the mass-radius method [6]

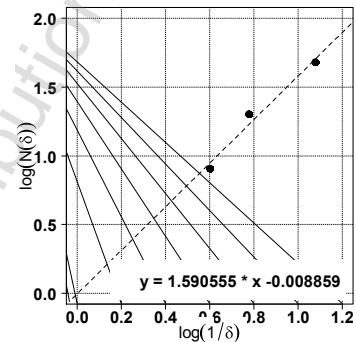
Każdy piksel wewnątrz okręgu wyznaczonego przez środek ciężkości i promień wirowania jest wybierany jako centrum (lokalny początek) siatki złożonej z koncentrycznych okręgów (na rys. 3 pokazano jedynie kilka takich siatek). Dla każdego lokalnego początku zlicza się piksele znajdujące się wewnątrz kolejnych okręgów. Pomiarzy ze wszystkich lokalnych początków są następnie uśredniane dla danej wartości promienia okręgu.

Należy w tym miejscu zaznaczyć, iż okrąg wyjściowy (początkowy) ma promień o umownej długości jednostkowej,

Wartość wymiaru fraktalnego szacowanego metodą pudełkową zależy od szybkości, z jaką zwiększa się długość konturu obiektu, w miarę zmniejszania skali pomiarowej długości. Intuicyjnie można go rozumieć jako „szorstkość” konturu. Na rys. 2 przedstawiono tendencję zmiany wymiaru fraktalnego w zależności od złożoności konturu obiektu.



Rys. 2. Zmiana wymiaru fraktalnego w zależności od złożoności konturu obiektu
Fig. 2. Change of the fractal dimension depending on the complexity of the object contour



natomiast długości promieni kolejnych koncentrycznych okręgów są długościami względnymi i odnoszą się właśnie do wspomnianego promienia jednostkowego.

Metoda masa-promień wykorzystuje zatem związek pomiędzy powierzchnią obiektu (M), znajdującą się w okręgu o promieniu r , a wielkością promienia. Powierzchnia ta rośnie wraz ze wzrostem promienia według zależności [7]:

$$M(r) \propto r^{D_m} \text{ oraz} \quad (2)$$

$$\log(M(r)) = CD_m \log(r), \quad (3)$$

gdzie: D_m – wymiar fraktalny,

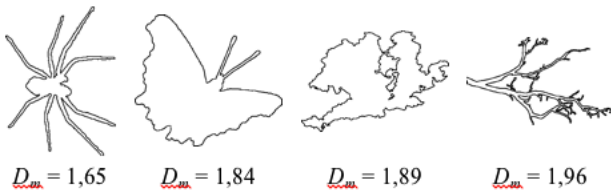
C – stała,

$M(r)$ – średnia liczba pikseli w okręgu o promieniu r .

Po obustronnym zlogarytmowaniu i przekształceniu (pomijamy stałą C) zależności (3) otrzymujemy:

$$D_m = \frac{\log(M(r))}{\log(r)}. \quad (4)$$

Ostatecznie, wymiar fraktalny szacuje się w ten sposób, że rysujemy wykres log-log, gdzie na jednej osi jest logarytm z promienia kolejnych okręgów $\log(r)$, a na drugiej logarytm ze średniej liczby pikseli w okręgu o danej średnicy $\log(M(r))$. Określając współczynnik nachylenia prostej regresji na tym wykresie, otrzymujemy szacunkową wartość wymiaru fraktalnego. Wartość wymiaru fraktalnego szacowanego metodą masa-promień zależy od szybkości, z jaką zwiększa się powierzchnia obiektu, w miarę zwiększania promienia okręgu służącego do zliczania pikseli tego obiektu. Intuicyjnie można go rozumieć jako stopień „wypełnienia” powierzchni obrazu przez dany obiekt (rys. 4).



Rys. 4. Zmiana wymiaru fraktalnego w zależności od stopnia wypełnienia powierzchni obrazu przez obiekt

Fig. 4. Change of the fractal dimension depending on the filling of the image surface by the object

2. Wyniki analizy fraktalnej

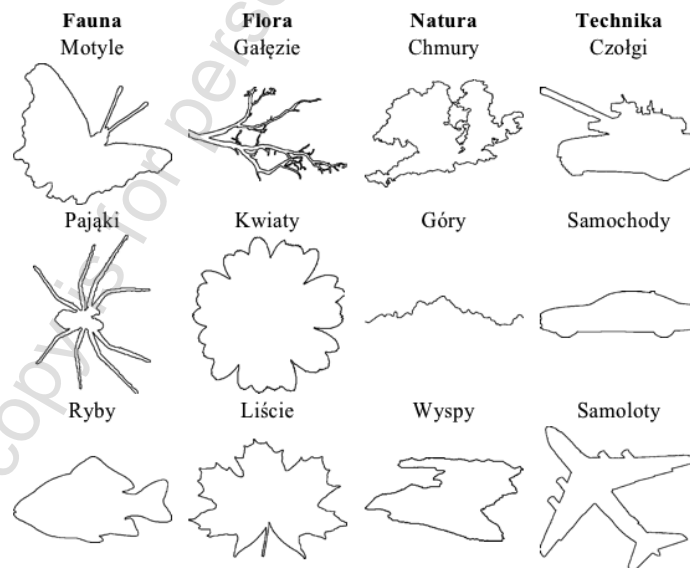
W celu przeprowadzenia testów, zgromadzono zbiór 120-tu kolorowych zdjęć w różnej rozdzielczości. Zdjęcia podzielono umownie na 12 kategorii, po 10 zdjęć dla każdej z nich. W procesie przetwarzania wstępnego, zdjęcia przeskalowano do szerokości 450 pikseli, poddano segmentacji oraz wyznaczono kontury badanych obiektów. Na rys. 5 przedstawiono miniatury przykładowych obiektów poddawanych analizie fraktalnej. Z kolei na rys. 6 zaprezentowano wykresy pudełkowe odpowiadające wymiarowi fraktalnemu oszacowanemu za pomocą metody pudełkowej (górną wykres) i metody masa-promień (dolny wykres). Na wykresie tym widać, iż w przypadku obu metod wymiar fraktalny odpowiadający poszczególnym kategoriom obiektów posiada charakterystyczny dla siebie zakres zmian, który może być jedną z cech pozwalających na klasyfikację obiektów. Widać również, iż wyniki uzyskane za pomocą obu metod różnią się pod względem rozrzutu wartości wymiaru fraktalnego. Dla metody pudełkowej jest on mniejszy niż dla metody masa-promień. Można to uzasadnić faktem, iż każda z metod, stosując inny algorytm pomiarowy, uwzględnia nieco inne cechy analizowanych obiektów. Odmiennością każdej z metod należy również tłumaczyć wyniki zaprezentowane na rys. 7a. Prezentuje on wartość średniej arytmetycznej wymiaru fraktalnego (uzyskanej na podstawie 10-ciu pomiarów) dla poszczególnych kategorii obiektów. Niemalże dla wszystkich przypadków wymiar fraktalny uzyskany metodą masa-promień ma mniejszą wartość, niż wymiar wyznaczony metodą pudełkową.

Stosowanie jednej metody do analizy złożoności konturu obiektów w wielu przypadkach okazuje się niewystarczające. Widać to doskonale na przykładzie kwiatów i samochodów. Mimo istotnej różnicy pomiędzy kształtami tych obiektów (rys. 5), wymiar

fraktalny szacowany za pomocą metody pudełkowej jest dla obu kategorii na zbliżonym poziomie i osiąga wartości w zakresie od 1,81 do 1,84 (rys. 6 góra). W takiej sytuacji może się okazać korzystne zastosowanie obu metod łącznie. Cecha badanego obiektu, wyrażająca złożoność jego konturu, jest wówczas przedstawiona na wykresie dwuwymiarowym, gdzie poszczególne osie odpowiadają wartościom wymiaru fraktalnego oszacowanym za pomocą metody pudełkowej i metody masa-promień. Na rys. 7b przedstawiono wyniki analizy dla czterech wybranych kategorii obiektów (pająki, gałęzie, kwiaty, samochody). Można zauważyć, iż wyniki dla wspomnianych obiektów posiadają wyraźną tendencję do grupowania. Stwarza to lepsze możliwości klasyfikacji obiektów, niż w przypadku stosowania tylko jednej metody. Wyniki uzyskane dla kwiatów i samochodów tworzą wyraźne grupy, dzięki czemu można jednoznacznie określić przynależność badanego obiektu do danej kategorii. Nie było to możliwe w przypadku stosowania wyłącznie metody pudełkowej.

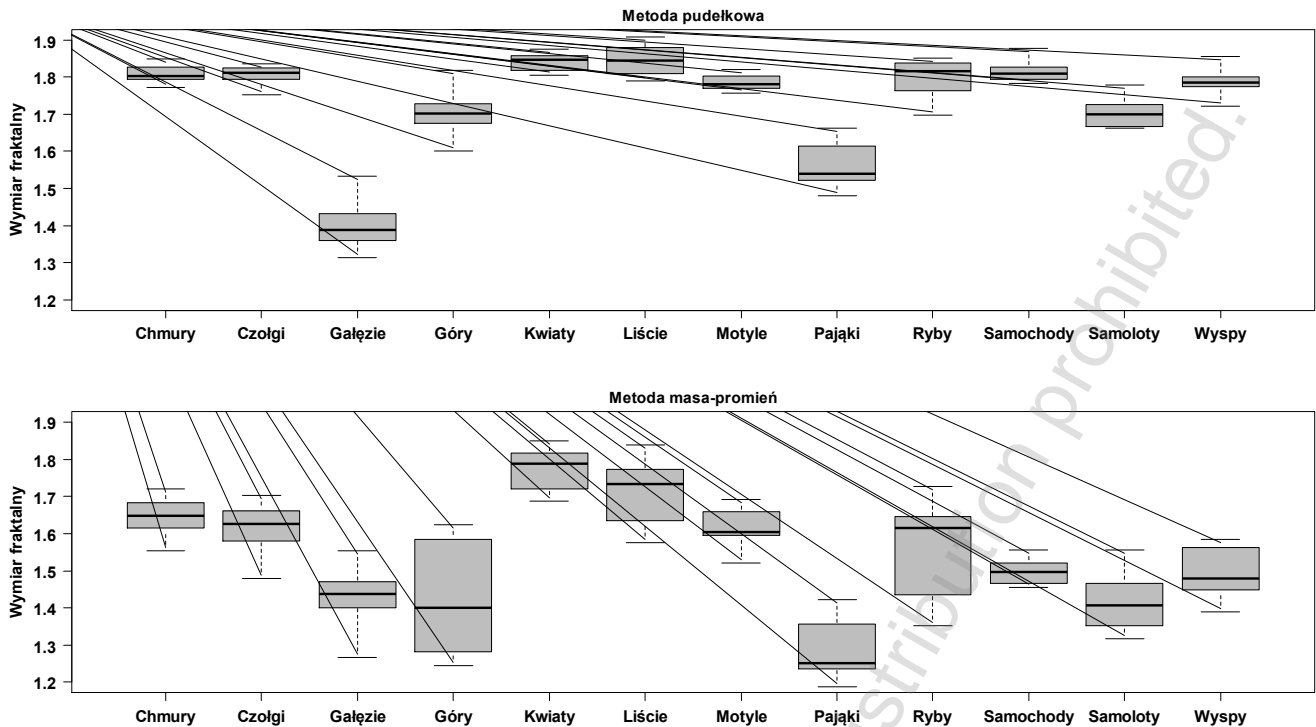
3. Wnioski

Podczas badań dokonano analizy fraktalnej zbioru 120-tu obrazów testowych podzielonych na 12 kategorii. Analizę wykonano za pomocą metody pudełkowej i metody masa-promień. Wyniki pokazały, iż wymiar fraktalny może być jedną z cech opisujących kształt obiektu. Jednak bazowanie wyłącznie na jednej metodzie szacowania wymiaru fraktalnego w wielu przypadkach daje niejednoznaczne wyniki. Często, dla różnych kategorii obiektów (różnych kształtów), uzyskuje się zbliżone wartości wymiaru fraktalnego. Badania pokazały, iż może się okazać korzystne zastosowanie kilku metod szacowania wymiaru fraktalnego łącznie. W takim przypadku, dzięki grupowaniu się wyników analizy dla poszczególnych kategorii obrazów, można uzyskać lepsze efekty w procesie klasyfikacji obiektów. Wymiar fraktalny dobrze opisuje złożoność konturu obiektów, jednak w przypadku obiektów rzeczywistych istotny jest także opis cech ich pola powierzchni. Wówczas wymiar fraktalny może być uzupełniony o tzw. lakunarność obiektu, która jest miarą niejednorodności jego struktury. Dalsze badania będą dotyczyły możliwości wykorzystania wymiaru fraktalnego oraz lakunarności do opisu cech obiektów wyodrębnionych na podstawie zdjęć USG tarczycy.

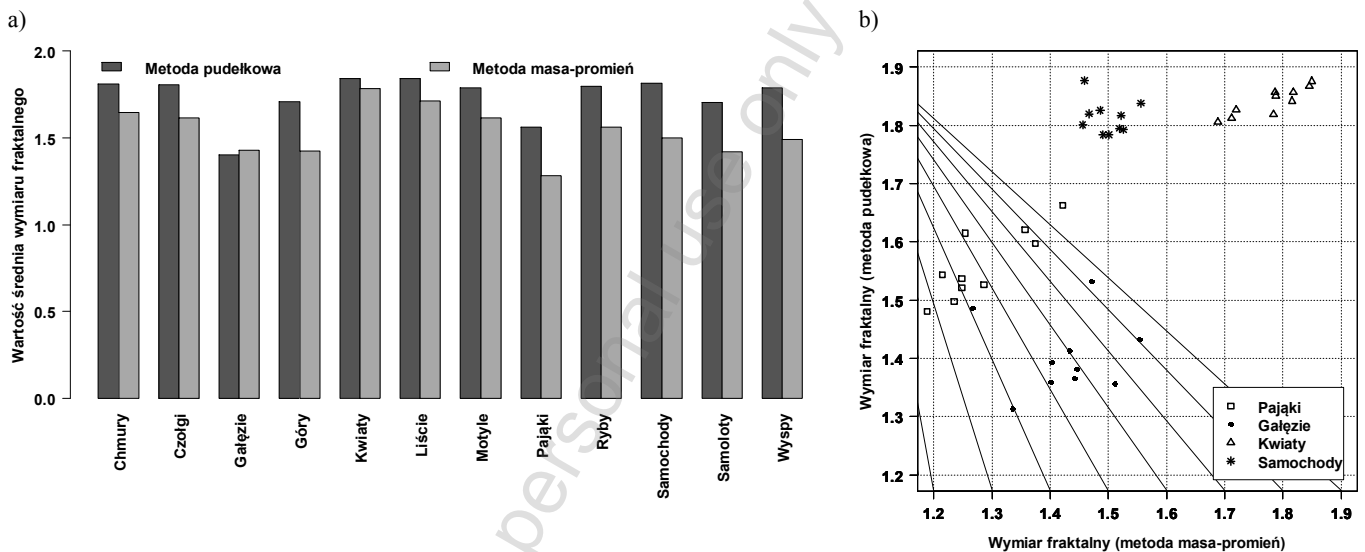


Rys. 5. Miniatury przykładowych obiektów wykorzystanych do analizy fraktalnej

Fig. 5. Thumbnails of exemplary objects used for the fractal analysis



Rys. 6. Wyniki szacowania wymiaru fraktalnego za pomocą metody pudełkowej (górze) i metody masa-promień (dół)
 Fig. 6. Results of estimating the fractal dimension using box-counting method (top) and mass-radius method (bottom)



Rys. 7. a) Wartość średnia wymiaru fraktalnego, b) grupowanie wyników szacowania wymiaru fraktalnego dla wybranych kategorii obiektów
 Fig. 7. a) Average value of the fractal dimension, b) the clustering of estimation results of the fractal dimension for selected categories of objects

Literatura

- [1] Tadeusiewicz, R., Flasiński, M.: *Rozpoznawanie obrazów*, PWN 1991.
- [2] Mandelbrot B.: *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Co., New York 1982.
- [3] Normat F., Tricot C.: *Method for evaluation the fractal dimension of curves using convex hulls*. Physical Review A 43, 6518-6525, 1991.
- [4] Theiler J.: *Estimating Fractal Dimension*. J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 7, No. 6, 1055-1073, 1990.
- [5] Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D.: *Granice chaosu. Fraktale*. Cz. 1, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa 2002.
- [6] Romanowska-Pawliczek A., Piechota M., Sołtys Z.: *Analiza fraktalna w badaniu morfologii komórek tkanki nerwowej: Zastosowania*. Episteme Vol. 5, 29-40, 2007.
- [7] Caserta, F., Eldred, W.D., Fernandez, E., Hausman, R.E., Stanford, L.R., Bulderev, S.V., Schwarzer, S., Stanley, H.E.: *Determination of fractal dimension of physiologically characterized neurons in 2-dimensions and 3-dimensions*. J. Neurosci. Methods 56, 133-144, 1995.

Mgr inż. Zbigniew Omiotek
 e-mail: zomiotek@gmail.com



Absolwent Wydziału Elektroniki WAT w Warszawie. W latach 1995-2000 asystent w Instytucie Podstaw Elektroniki WAT. Od 2000 r. asystent w Katedrze Informatyki i Inżynierii Wiedzy WSZiA w Zamościu, a od 2011 r. doktorant na Wydziale Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Lubelskiej. Zainteresowania naukowe skupiają się wokół metod dynamicznego zarządzania QoS podczas transmisji obrazu ruchomego przez Internet oraz analizy i rozpoznawania obrazów medycznych.