www.biswbis.pb.edu.pl

CIVIL AND ENVIRONMENTAL ENGINEERING 3 (2012) ISSN: 2081-3279 BUDOWNICTWO I INŻYNIERIA ŚRODOWISKA

KONCEPCJA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W OBLICZENIACH KONSTRUKCJI O DUŻYCH ZMIANACH SZTYWNOŚCI

Tadeusz CHYŻY[*], Monika MACKIEWICZ

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 A, 15-351 Białystok

Streszczenie: W referacie zaprezentowano oryginalną koncepcję elementów skończonych, w których można modyfikować pole odkształceń, dopasowując je do lokalnych zmian sztywności i geometrii podobszaru obliczanego modelu konstrukcji. Prezentowane rozwiązanie nazwano elementami o adaptatywnych funkcjach kształtu, ponieważ opisane nimi pole odkształceń może być modyfikowane w trakcie procesu obliczeniowego, w zależności od powstających lokalnych zmian geometrii i sztywności. Prezentowane rozwiązanie może też być wykorzystane w zagadnieniach stacjonarnych, gdzie lokalne różnice sztywności stanowią stan początkowy. Wykonane badania obliczeniowe wykazują słuszność koncepcji, która prowadzi do oczekiwanych wyników. Podstawową zaletą prezentowanej metody jest minimalizacja liczby elementów skończonych i eliminacja kosztownych obliczeniowo procedur rearanżacji siatki dyskretyzacji układu.

Słowa kluczowe: MES, pręt, belka, adaptatywne funkcje kształtu, pole odkształceń.

1. Wprowadzenie

W praktyce modelowania konstrukcji Metodą Elementów Skończonych MES (Zienkiewicz i in., 2005) czasami zachodzi konieczność definiowania obszarów o znacznie różniącej się charakterystyce sztywnościowej. Standardowo takie podobszary są wydzielane i opisane oddzielnie odpowiednimi elementami skończonymi. Takie podejście jest naturalne w przypadkach obliczeniowych, gdzie parametry geometrii i sztywności podobszarów są znane. Niekiedy jednak uzasadnione jest i niezbędne opisanie różnych podobszarów jednym elementem skończonym, przykładowo:

- gdy zmiany sztywności powstają w trakcie niestacjonarnego procesu obliczeniowego i mają wpływ na jego dalszy przebieg, na przykład: zarysowanie, pęknięcie czy zniszczenie elementu konstrukcji (Bąk i Stolarski, 1990);
- gdy istnieje potrzeba opisu konstrukcji warstwowych (belki, płyty) lub o nietypowych kształtach przekroju poprzecznego (belki);
- w zagadnieniach modelowania fazy pokrytycznej, procesu niszczenia i zachowania się elementów konstrukcji po jej uszkodzeniu lub zniszczeniu; przykładowo zjawisko wybuchu gazu wewnątrz budynku mieszkalnego może być bardzo destrukcyjne i prowadzić do zniszczenia konstrukcji poprzez rozwój katastrofy postępującej lub poprzez jej defragmentację i „rozrzucenie” elementów budynku (Chyży, 2009);

W dalszej części artykułu Autorzy prezentują oryginalną metodę umożliwiającą opis jednym elementem podobszarów o różnych parametrach geometryczno-sztywnościowych, z zachowaniem odpowiedniej dokładności rozwiązania, którą uzyskano poprzez dopasowanie pola odkształceń z zastosowaniem adaptatywnych funkcji kształtu.

2. Koncepcja metody

Koncepcja prezentowanego rozwiązania została pokazana na przykładzie najprostszego elementu prętowego (rys. 1). Macierz sztywności elementu prętowego o dwóch węzłach definiowana standardowo jest wyznaczana według następującej procedury (Zienkiewicz i in., 2005; Chyży, 2009).

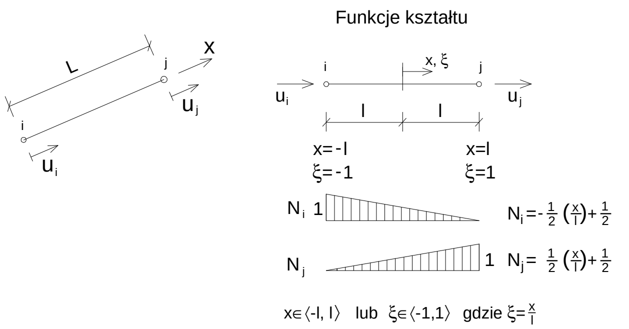
Macierz sztywności elementu wyznaczono z następującego równania:

$$\mathbf{K_e} = \oint_V \mathbf{B_e}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D_e} \cdot \mathbf{B_e} \cdot dV \tag{1}$$

gdzie: $\mathbf{B_e}$ jest macierzą odkształceń, $\mathbf{D_e}$ jest macierzą materiałową równą [E], V jest obszarem całkowania,

[*] Autor odpowiedzialny za korespondencję. E-mail: t_chyzy@interia.pl

L = 2l jest długością elementu prętowego pokazanego na rysunku 1.

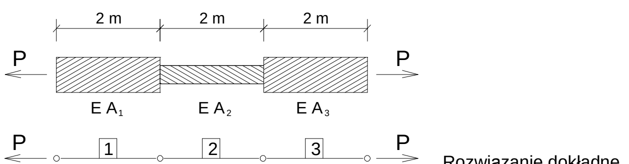


Rys. 1. Standardowe funkcje kształtu dla dwuwęzłowego elementu prętowego

Z równania (1) otrzymuje się standardową macierz sztywności elementu skończonego, która może być zastosowana tylko do opisu podobszaru o stałej po długości sztywności EA:

$$\mathbf{K_e} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{E}\cdot\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2\cdot \mathrm{l}}\cdot \mathrm{d}x = \\ =\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{EA}}{2\cdot\mathrm{l}} & -\frac{\mathrm{EA}}{2\cdot\mathrm{l}}\\ -\frac{\mathrm{EA}}{2\cdot\mathrm{l}} & \frac{\mathrm{EA}}{2\cdot\mathrm{l}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}} & -\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}}\\ -\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}} & \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}}\end{bmatrix} \tag{2}$$

Aby rozwiązać przykład pokazany na rysunku 2 i uzyskać rozwiązanie dokładne, należy podzielić go na 3 elementy o sztywnościach EA_1, EA_2, EA_3. To zadanie można również rozwiązać opisując fragment konstrukcji jednym elementem o 3 punktach Gaussa. Autorzy proponują jeszcze inne podejście, a mianowicie jeden element całkowany jawnie, w tym przypadku w 3 podobszarach.

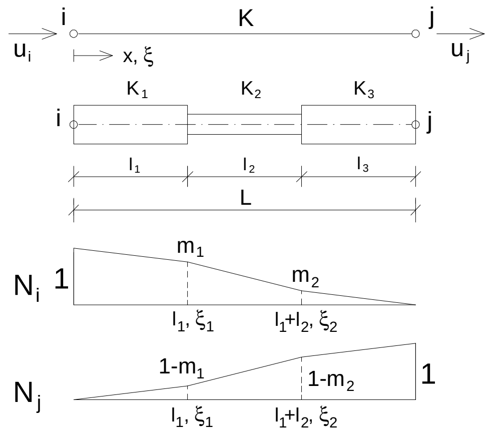


Rys. 2. Rozciągany fragment konstrukcji o zróżnicowanej sztywności

Koncepcja elementów całkowanych jawnie w podobszarach polega na podziale elementu na k części (podobszarów) i sumowaniu częściowych macierzy sztywności z każdego podobszaru, co wyraża się wzorem:

$$\mathbf{K_e} = \mathbf{K}_1+\mathbf{K_2}+\mathbf{K_3}+\ldots = \\ =\int_0^{\mathrm{l}_1}\mathbf{K}_\mathbf{e}^\mathbf{1}(\xi)+\int_{\mathrm{l}_1}^{\mathrm{l}_1+\mathrm{l}_2}\mathbf{K}_\mathbf{e}^\mathbf{2}(\xi)+\int_{\mathrm{l}_1+\mathrm{l}_2}^{\mathrm{l}_1+\mathrm{l}_2+\mathrm{l}_3}\mathbf{K}_\mathbf{e}^\mathbf{3}(\xi)+\ldots=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{K}_\mathbf{e}^\mathbf{k} \tag{3}$$

Na rysunku 3 pokazano przykładowy element liniowy podzielony na 3 podobszary o różnej sztywności osiowej K_1, K_2, K_3. Dalsze przekształcenia podano dla jednego podobszaru oznaczonego sztywnością $K_2 \equiv K_e^k$, ograniczonego współrzędnymi ξ_1 do ξ_2, dla którego wartości brzegowe funkcji kształtu mają wartości odpowiednio m_1, m_2 dla funkcji kształtu N_i, z dopełnieniem do jedności dla funkcji kształtu N_j.



Rys. 3. Podział elementu na podprzestrzenie (podobszary)

Macierz sztywności podobszaru k jest wyznaczana z równania:

$$\mathbf{K}_\mathbf{e}^{\boldsymbol{k}} = \oint_{\mathrm{V}_k}\mathbf{B}_\mathbf{e}^{\boldsymbol{k}\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D}_\mathbf{e}^{\boldsymbol{k}}\cdot\mathbf{B}_\mathbf{e}^{\boldsymbol{k}}\cdot \mathrm{dV}_k \tag{4}$$

$$\mathbf{B}_\mathbf{e}^{\boldsymbol{k}} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{N}_\mathbf{e}^{\boldsymbol{k}} = \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\cdot\left[N_i^k, N_j^k\right]= \\ =\left[\frac{\mathrm{m}_2-\mathrm{m}_1}{\xi_2-\xi_1},\quad -\frac{\mathrm{m}_2-\mathrm{m}_1}{\xi_2-\xi_1}\right]=\left[\mathrm{b},\quad -\mathrm{b}\right],\quad \xi\in\langle -1,1\rangle, \tag{5}$$

gdzie: $\mathbf{B}_e^k$ jest macierzą odkształceń podobszaru k, $\mathbf{D}_e^k$ jest macierzą materiałową podobszaru, $\mathbf{D}_e^k = [E_k]$, $\mathbf{N}_e^k$ jest macierzą funkcji kształtu w podobszarze k, daną wzorem:

$$\mathbf{N}_\mathbf{e}^{\boldsymbol{k}} = \left[N_i^k, N_j^k\right]= \\ =\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{m}_2-\mathrm{m}_1}{\xi_2-\xi_1}\cdot\xi+\frac{\mathrm{m}_1\cdot\xi_2-\mathrm{m}_2\cdot\xi_1}{\xi_2-\xi_1}, \\ 1-\left(\frac{\mathrm{m}_2-\mathrm{m}_1}{\xi_2-\xi_1}\cdot\xi+\frac{\mathrm{m}_1\cdot\xi_2-\mathrm{m}_2\cdot\xi_1}{\xi_2-\xi_1}\right)\end{bmatrix} \tag{6}$$

W związku z tym po podstawieniu do równania (4) otrzymano:

$$\mathbf{K}_\mathbf{e}^{\boldsymbol{k}} = \oint_{\mathrm{V}_k}\mathbf{B}_\mathbf{e}^{\boldsymbol{k}\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D}_\mathbf{e}^{\boldsymbol{k}}\cdot\mathbf{B}_\mathbf{e}^{\boldsymbol{k}}\cdot \mathrm{dV}_k = \\ =\mathrm{A}_k\cdot\int_{\xi_1}^{\xi_2}\begin{bmatrix}\mathrm{b}\\ -\mathrm{b}\end{bmatrix}\cdot\left[\mathrm{E}_k\right]\cdot\left[\mathrm{b},\quad -\mathrm{b}\right]\cdot\mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\xi \tag{7}$$

gdzie $\mathbf{J}$ jest Jacobianem przekształcenia równym 1/L, skąd ostatecznie otrzymano:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\boldsymbol{k}} = b^2 \cdot \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}} \cdot \int_{\xi_1}^{\xi_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}\xi =$$

$$= \begin{bmatrix} b^2(\xi_2-\xi_1)\cdot\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}} & -b^2(\xi_2-\xi_1)\cdot\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}} \\ -b^2(\xi_2-\xi_1)\cdot\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}} & b^2(\xi_2-\xi_1)\cdot\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Wartości funkcji kształtu na granicach podobszaru m_1 i m_2 można wyznaczyć ze standardowego rozkładu liniowego pokazanego na rysunku 1. W tym konkretnym przykładzie wynosiłyby odpowiednio parami $(1,0;\ 0,666)_1$, $(0,666;\ 0,333)_2$, $(0,333;\ 0,0)_3$, gdzie indeksem dolnym oznaczono numer podobszaru. Oba z zaprezentowanych powyżej rozwiązań, czyli z pojedynczym elementem z 3 punktami całkowania Gaussa i z pojedynczym elementem całkowanym jawnie z trzema podobszarami, znacznie odbiegają od rozwiązania dokładnego. Błąd rozwiązania narasta wraz ze wzrostem różnicy sztywności, co przedstawiono w tabeli 1. Potwierdza to fakt, że przy dużych zmianach sztywności konieczne jest modyfikowanie pola odkształceń.

W dalszej części pracy przedstawiono koncepcję takiej modyfikacji, która polega na zastosowaniu linii łamanych w opisie funkcji kształtu. Wartości funkcji kształtu m_1 i m_2, ogólnie m_i, (rys. 3) dopasowujących rozkład pola odkształceń wewnątrz podobszaru do zmian sztywności, proponuje się wyznaczyć ze wzoru (9) (Chyży i in., 1996) i formuł sumacyjnych (10) (11), które wyprowadzono przy założeniu, że podobszary tworzą układ szeregowo połączonych sprężyn (rys. 4) o sztywności $\mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\boldsymbol{k}}$, k = 1, 2, …, n (n jest liczbą podobszarów – przedziałów całkowania):

$$\mathrm{m}_i = \frac{\overline{\mathrm{k}}}{\overline{\mathrm{k}}_i} \tag{9}$$

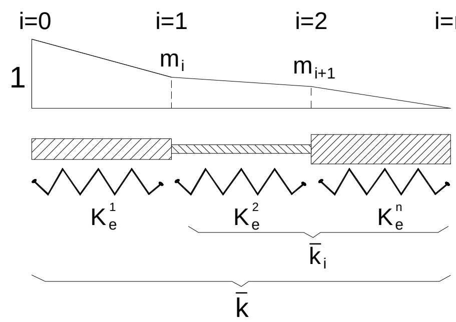
gdzie $\overline{k}$ oznacza sztywność wypadkową całego zespołu sprężyn opisaną wzorem:

$$\overline{\mathrm{k}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{K}_\mathrm{e}^k}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{\mathrm{E}_k \cdot \mathrm{A}_k}{\mathrm{l}_k}}} \tag{10}$$

Natomiast $\overline{k}_i$ to sztywność wypadkowa części układu sprężyn do punktu, w którym obliczana jest wielkość m_i. Wartość $\overline{k}_i$ wyznaczana jest ze wzoru:

$$\overline{\mathrm{k}}_i = \frac{1}{\sum_{k=n}^{i} \frac{1}{\mathrm{K}_\mathrm{e}^k}} = \frac{1}{\sum_{k=n}^{i} \frac{1}{\frac{\mathrm{E}_k \cdot \mathrm{A}_k}{\mathrm{l}_k}}}, \quad i = 1,2,..,n-1 \tag{11}$$

Zastosowanie łamanych funkcji kształtu, czyli dopasowanie pola odkształceń do zmian sztywności, prowadzi do uzyskania oczekiwanych wyników, co zostało zaprezentowane w tabeli 1.



Rys. 4. Geometryczna interpretacja wyznaczania wartości linii łamanej funkcji kształtu

Tab. 1. Porównanie wartości przemieszczeń elementu rozciąganego pokazanego na rysunku 2

Przemieszczenie przy określonym rozwiązaniu w cm	Przekrój				
	A_1, A_3 = 100 cm^2 – stałe				
	A_2 = 100 cm^2	A_2 = 90 cm^2	A_2 = 50 cm^2	A_2 = 10 cm^2	A_2 = 1 cm^2
Rozwiązanie dokładne	2,0000	2,0741	2,6667	8,0000	68,0000
Całkowanie Gaussa	2,0000	2,0930	2,5714	3,3333	3,5714
Elementy całkowane w podprzestrzeniach bez modyfikacji pola odkształceń	2,0000	2,0690	2,4000	2,8571	2,9851
Prezentowana metoda – elementy całkowane w podprzestrzeniach z modyfikacją pola odkształceń	2,0000	2,0741	2,6667	8,0000	68,0000

3. Test metody – element belkowy

Zaprezentowaną metodę zaadaptowano do analizy belek, w których występuje lokalne osłabienie materiału, na przykład belek zarysowanych lub pękających (zniszczenie).

Element belki wyprowadzono na bazie czterowęzłowego standardowego elementu tarczowego (Bathe, 1996). Istotą koncepcji jest podział elementu na n warstw poziomych, w których to warstwach zastosowano funkcje kształtu według krzywych łamanych, dopasowujących rozkład pola odkształceń do aktualnego stanu wytężenia elementu skończonego. W formie graficznej prezentowaną koncepcję pokazano na rysunku 5.

Dla tak zdefiniowanego elementu skończonego przyjęto następujące funkcje kształtu dla każdej n-tej warstwy, inne dla odkształceń liniowych i inne dla odkształceń postaciowych:

$$\mathrm{N}_{\mathrm{e}}^{n} = \left[\mathrm{N}_i^n, \mathrm{N}_j^n, \mathrm{N}_k^n, \mathrm{N}_l^n\right]$$

Funkcje kształtu dla odkształceń liniowych N_ε

$$\mathrm{N}_i^{n\varepsilon} = \left(\frac{\mathrm{m}_2 - \mathrm{m}_1}{\xi_2 - \xi_1}\cdot\frac{x}{\mathrm{l}} + \frac{\mathrm{m}_1\cdot\xi_2 - \mathrm{m}_2\cdot\xi_1}{\xi_2 - \xi_1}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{y}{\mathrm{h}}\right)$$

$$\mathrm{N}_j^{n\varepsilon} = \left[1 - \left(\frac{\mathrm{m}_2 - \mathrm{m}_1}{\xi_2 - \xi_1}\cdot\frac{x}{\mathrm{l}} + \frac{\mathrm{m}_1\cdot\xi_2 - \mathrm{m}_2\cdot\xi_1}{\xi_2 - \xi_1}\right)\right]\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{y}{\mathrm{h}}\right)$$

$$\mathrm{N}_k^{n\varepsilon} = \left[1 - \left(\frac{\mathrm{m}_2 - \mathrm{m}_1}{\xi_2 - \xi_1}\cdot\frac{x}{\mathrm{l}} + \frac{\mathrm{m}_1\cdot\xi_2 - \mathrm{m}_2\cdot\xi_1}{\xi_2 - \xi_1}\right)\right]\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{y}{\mathrm{h}}\right)$$

$$\mathrm{N}_l^{n\varepsilon} = \left(\frac{\mathrm{m}_2 - \mathrm{m}_1}{\xi_2 - \xi_1}\cdot\frac{x}{\mathrm{l}} + \frac{\mathrm{m}_1\cdot\xi_2 - \mathrm{m}_2\cdot\xi_1}{\xi_2 - \xi_1}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{y}{\mathrm{h}}\right)$$

i postaciowych N_γ

$$\mathrm{N}_i^{n\gamma} = \frac{1}{4}\cdot\left(1 - \frac{x}{\mathrm{l}}\right)\cdot\left(1 - \frac{y}{\mathrm{h}}\right)$$

$$\mathrm{N}_j^{n\gamma} = \frac{1}{4}\cdot\left(1 + \frac{x}{\mathrm{l}}\right)\cdot\left(1 - \frac{y}{\mathrm{h}}\right)$$

$$\mathrm{N}_k^{n\gamma} = \frac{1}{4}\cdot\left(1 + \frac{x}{\mathrm{l}}\right)\cdot\left(1 + \frac{y}{\mathrm{h}}\right)$$

$$\mathrm{N}_l^{n\gamma} = \frac{1}{4}\cdot\left(1 - \frac{x}{\mathrm{l}}\right)\cdot\left(1 + \frac{y}{\mathrm{h}}\right) \tag{12}$$

Całkowanie wykonywane jest dla pojedynczej warstwy po jej wysokości, przyjmując $\mathrm{h_d}$ i $\mathrm{h_g}$ jako dolną i górną granicę całkowania. W danej warstwie należy również wykonać całkowanie w podobszarach według wzoru (3) i rysunku 3. Macierz sztywności podobszaru k w warstwie n ma zatem postać:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{nk} &= \oint_{\mathrm{V}_n} \mathbf{B}_{\mathbf{e}}^{nk\,\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D}_{\mathbf{e}}^{nk}\cdot\mathbf{B}_{\mathbf{e}}^{nk}\cdot \mathrm{dV}_n = \\ &= t_{nk}\cdot\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\mathrm{h_d}}^{\mathrm{h_g}} \mathbf{B}_{\mathbf{e}}^{nk\,\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D}_{\mathbf{e}}^{nk}\cdot\mathbf{B}_{\mathbf{e}}^{nk}\cdot \mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{13}$$

gdzie: indeks n oznacza n-tą warstwę, natomiast indeks k oznacza k-ty podobszar całkowania warstwy n, a t_{nk} jest grubością elementu w danym podobszarze.

Ostatecznie macierz sztywności jest sumą wszystkich n warstw i k podobszarów w warstwach, według wzoru (14), w którym symbolami L_n i L_k oznaczono odpowiednio liczbę warstw i liczbę podobszarów.

$$\mathbf{K}_{\mathbf{e}} = \sum_{n=1}^{\mathrm{L}_n}\sum_{k=1}^{\mathrm{L}_k}\mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{nk} \tag{14}$$

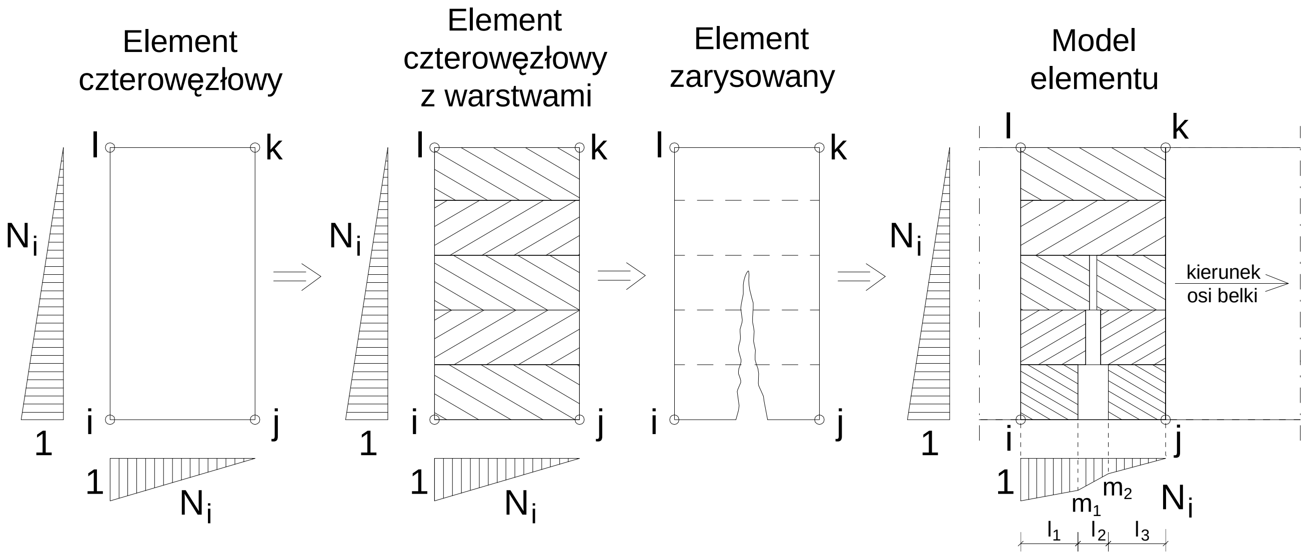
Macierz odkształceń podobszaru nk ma postać:

$$\mathrm{B}_{\mathrm{e}}^{nk} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{N}_i^{n\varepsilon} & 0 & \mathrm{N}_j^{n\varepsilon} & 0 & \mathrm{N}_k^{n\varepsilon} & 0 & \mathrm{N}_l^{n\varepsilon} & 0 \\ \mathrm{N}_i^{n\gamma} & 0 & \mathrm{N}_{\mathrm{j}}^{n\gamma} & 0 & \mathrm{N}_k^{n\gamma} & 0 & \mathrm{N}_l^{n\gamma} & 0 \\ 0 & \mathrm{N}_i^{n\varepsilon} & 0 & \mathrm{N}_j^{n\varepsilon} & 0 & \mathrm{N}_k^{n\varepsilon} & 0 & \mathrm{N}_l^{n\varepsilon} \\ 0 & \mathrm{N}_i^{n\gamma} & 0 & \mathrm{N}_j^{n\gamma} & 0 & \mathrm{N}_k^{n\gamma} & 0 & \mathrm{N}_l^{n\gamma} \end{bmatrix} \tag{15}$$

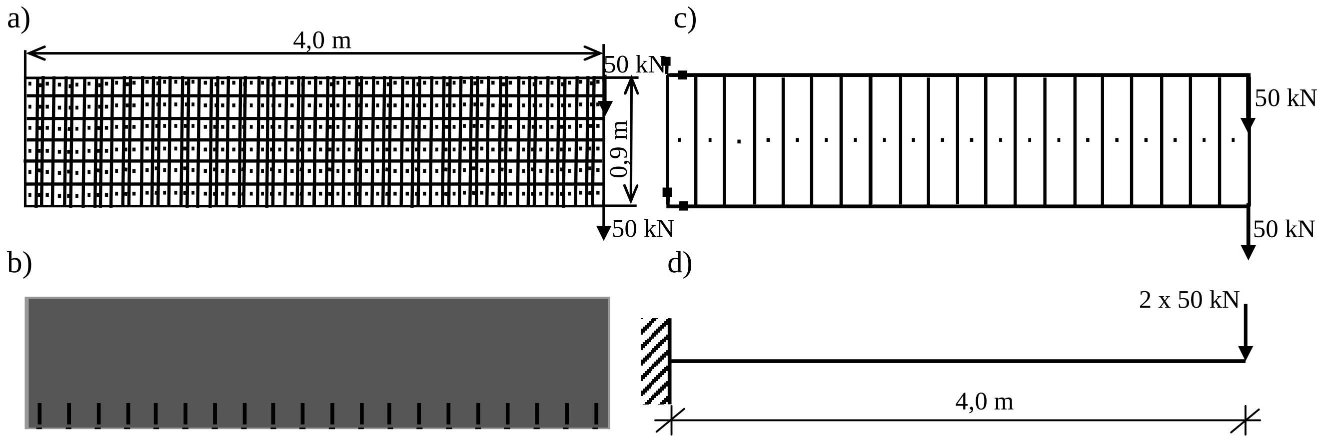
Parametry m_1 i m_2 funkcji kształtu wyznaczane są według wzorów (9), (10) i (11), przyjmując za A_k przekrój warstwy n w podobszarze k, a za l_k długość podobszaru k w warstwie n.

Zaprezentowaną metodę przetestowano na przykładzie belki wspornikowej o wysięgu 4,0 m i stałym przekroju prostokątnym 25 × 90 cm (odpowiednio grubość i wysokość przekroju). Przyjęto E = 27,5 GPa, ν = 0,2, G = 11,46 GPa. Na końcu wspornika ustawiono dwie siły skupione po 50 kN każda (rys. 6d). Po długości belki w odstępach co 20 cm wykonano osłabienia przekroju – przyjęto grubość 1 cm. Osłabienia mają szerokość 4 cm i wysokość (licząc od dołu belki) 15 cm. Lokalizacje osłabień przekroju pokazano na rysunku 6b.

Dla prezentowanego przykładu wykonano obliczenia systemem ORCAN (http://kmb.pb.edu.pl/dydaktyka/tchyzy/orcan.html) z zastosowaniem elementów tarczowych według dyskretyzacji pokazanej na rysunku 6a, na tyle gęstej by dokładnie odwzorować osłabienia belki standardowym elementem tarczowym. Rozwiązanie posłużyło jako układ porównawczy. Następnie wykonano obliczenia z zastosowaniem prezentowanej w pracy metody według dyskretyzacji pokazanej na rysunku 6c, gdzie pojedynczym elementem odwzorowuje się duży fragment belki, włącznie ze strefą osłabienia. Dla porównania wykonano również obliczenia elementami całkowanymi w podobszarach (jak w prezentowanej metodzie) ale bez modyfikacji pola odkształceń według zaprezentowanych funkcji łamanych. Wyniki w postaci ugięcia końca wspornika zaprezentowano w tabeli 2. Jak można zauważyć z zastosowania prezentowanej metody, przy niewielkiej liczbie elementów skończonych, otrzymano wyniki zbliżone do oczekiwanych, czyli takich jakie uzyskano przy gęstej siatce podziału, według rysunku 6a, z zastosowaniem standardowych elementów płaskich.



Rys. 5. Graficzna prezentacja koncepcji elementu belkowego z zarysowaniem



Rys. 6. Model belki w teście obliczeniowym

Tab. 2. Porównanie wartości ugięcia końca testowego wspornika

Metoda	Ugięcie końca wspornika w mm	
	węzeł dolny	węzeł górny
Układ porównawczy	7,357	7,344
Elementy całkowane w podprzestrzeniach bez modyfikacji pola odkształceń	5,3193	5,318
Prezentowana metoda – elementy całkowane w podprzestrzeniach z modyfikacją pola odkształceń	7,34	7,339

4. Podsumowanie

W wyniku zastosowania prezentowanej koncepcji uzyskano wystarczająco dokładne wyniki obliczeń przy dużych zmianach sztywności. Koncepcja została opracowana z myślą o analizie pokrytycznej konstrukcji, a zatem będącej w ruchu i doznającej dużych zmian sztywności. Analiza pokrytyczna jest tu bowiem rozumiana jako proces dynamiczny, natomiast pojęcie „dużych zmian sztywności" zawiera możliwość zmian przekrojowych, jak i liniowych w wydzielonych fragmentach elementu skończonego. Prezentowana koncepcja może być także zastosowana w stacjonarnych rozwiązaniach skokowych zmian sztywności i zagadnieniach wymagających procedur rearanżacji siatki podziału (Zienkiewicz i in., 1995).

Literatura

Bathe K. J. (1996). Finie Element Procedures. *Prentice Hall, Englewood Cliffs*, New York.

Bąk G., Stolarski A. (1990). Analiza nieliniowa prętowych ustrojów żelbetowych obciążonych impulsowo. *Studia z zakresu inżynierii*, Nr 30, Warszawa.

Chyży T. (2009). Metoda analizy budynków mieszkalnych obciążonych nadciśnieniem w strefie wewnętrznego wybuchu gazu. *Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej*, Białystok.

Chyży T., Kazberuk A., Tribiłło R. (1996). Zastosowanie samo adaptujących się funkcji kształtu w nieliniowej analizie obszarów płaskich i masywnych. *Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej*, Budownictwo, z. 15/1996, 65-72.

Zienkiewicz O. C., Pastor M., Huang M. (1995). Softening, localization and adaptive remeshing: capture of discontinuous solutions. *Computational Mechanics*, Vol. 17, No. 1-2, 98-106.

Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. (2005). The finite element method: its basis and fundamentals. *Elsevier*, Butterworth-Heinemann, Amsterdam.

CONCEPTION OF FINITE ELEMENTS FOR CALCULATIONS OF CONSTRUCTIONS WITH LARGE STIFFNESS CHANGES

Abstract: An original conception of finite elements with adjustable shape functions, depended of local changes of stiffness in sub-areas of the calculated construction model, is presented in the paper. Presented solution is called as elements with adaptive shape functions, because described by them deformation field can be modified during the calculation process, according to local changes of stiffness. This conception can also be used for solving problems, where the local stiffness differences are the initial state. Examples of such solutions are presented in the paper. Performed computational studies show the validity of the concept and lead to correct solutions. The main advantage of the presented method is the reduction of finite elements number and the reduction of time-consuming procedures for reorganization the system geometry.