

IMPLEMENTACJA METODY RÓŻNIC SKOŃCZONYCH Z OPTYMALIZACJĄ METODY LIEBMANNA W MODELOWANIU LAMINARNYCH PRZEPŁYWÓW W PRZEWODACH PROSTOOSIOWYCH O DOWOLNYM KSZTAŁCIE PRZEKROJU PRZEWODU

Tomasz Janusz TELESZEWSKI, Sławomir Adam SORKO*

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45A, 15-351 Białystok

Streszczenie: W artykule zaprezentowano metodę różnic skończonych (MRS) przy zastosowaniu płaskich siatek z optymalizacją metody Liebmana w modelowaniu laminarnych przepływów w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju przewodu, jako alternatywę dla metod numerycznych wykorzystujących trójwymiarowe siatki. Dwuwymiarowe siatki w przekrojach przewodów mogą być wykorzystane do wyznaczania wielkości jednoczłonowych opisujących przepływ. W celu weryfikacji metody porównano rezultaty obliczeń numerycznych ze znanym rozwiązaniem analitycznym laminarnego przepływu przez przewód okrągły. W pracy przedstawiono przykłady obliczeniowe pól prędkości, dla których nie są znane proste rozwiązania teoretyczne.

Słowa kluczowe: przewody prostoosiowe, przepływ laminarny, współczynnik Coriolisa, współczynnik Boussinesqa.

1. Wprowadzenie

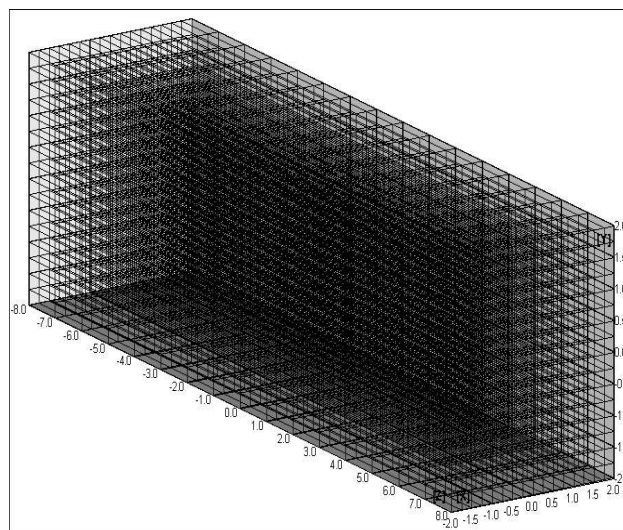
Znajomość pól prędkości w przekrojach przewodów prostoosiowych ma istotne znaczenie w tworzeniu programów służących do obliczeń hydraulicznych. Obecnie jedynie niektóre zagadnienia można policzyć metodami analitycznymi, natomiast w przypadku skomplikowanych geometrii przekrojów przewodów prostoosiowych wymagane jest zaawansowane oprogramowanie komputerowe. Klasyczne, a zarazem najczęściej stosowane siatkowe algorytmy rozwiązywania przepływu w przewodach prostoosiowych wymagają budowy pracochłonnych trójwymiarowych siatek (Kosma, 2007; Huang i Ho, 1993).

Wyprowadzony w publikacji algorytm pozwala zastąpić skomplikowaną siatkę przestrzenną (rys. 1) wewnątrz przewodu dwuwymiarową siatką zlokalizowaną w przekroju przewodu (rys. 2).

Płaski, izotermiczny przepływ płynu lepkiego opisuje równanie (Batchelor, 2000):

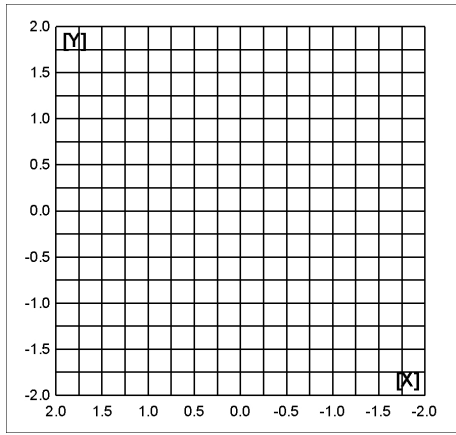
$$\frac{d\bar{c}}{dt} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \nu \nabla^2 \bar{c} + \frac{1}{3} \nu \text{grad}(\text{div} \bar{c}) \quad (1)$$

gdzie: c jest prędkością przepływu, F są to siły masowe, p jest ciśnieniem, ρ jest gęstością, a ν współczynnikiem lepkości kinematycznej.



Rys. 1. Przykładowa przestrzenna siatka stosowana w symulacji przepływu w przewodach prostoosiowych składająca się z 4096 prostopadłościów

* Autor odpowiedzialny za korespondencję. E-mail: s.sorko@pb.edu.pl

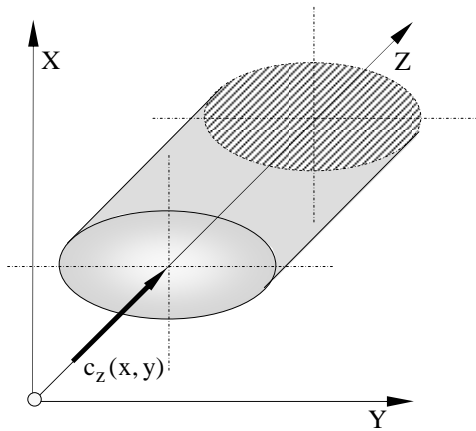


Rys. 2. Przykładowa płaska siatka przekroju przewodu prostoosiowego składająca się z 256 prostokątnych elementów

Przepływ laminarny w przewodzie prostoosiowym można sprowadzić do zagadnienia przepływu jednokierunkowego (rys. 3). Przy założeniu stacjonarności przepływu, a także uwzględnieniu składowej prędkości wzdłuż osi przewodu c_z ($c_x \ll c_z$, $c_y \ll c_z$) równanie (1) przyjmuje postać (Batchelor, 2000):

$$\left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2)$$

gdzie: c_z oznacza prędkość przepływu, p jest ciśnieniem, a μ jest współczynnikiem lepkości dynamicznej.



Rys. 3. Jednokierunkowy przepływ przez przewód prostoliniowy

W celu założenia warunku brzegowego jedynie na konturze przekroju przewodu pole prędkości przepływu jednokierunkowego c_z podzielono na składową prędkości przepływu niezakłóconego c_∞ oraz składową prędkości przepływu wzbudzonego ściankami prostoliniowego kanału c_w (Teleszewski i Sorko, 2011):

$$c_z = c_\infty + c_w \quad (3)$$

gdzie:

$$c_\infty = -\frac{1}{4} \wp (x^2 + y^2) \quad ; \quad \wp = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad (4)$$

Wartość prędkości na brzegu (L) materialnym i nieprzepuszczalnym równa jest zero, wobec czego warunek brzegowy na ścianie (L) przyjmuje postać:

$$c_w = -c_\infty \quad (5)$$

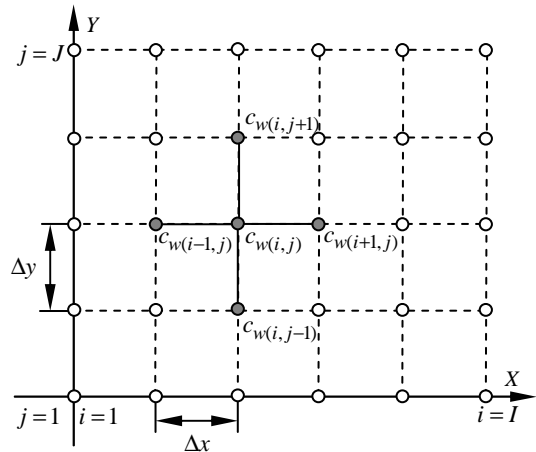
Warunek brzegowy (5) redukuje równanie Poissona (2) do równania Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 c_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_w}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

W dalszej kolejności równanie (6) zostanie rozwiązane metodą różnic skończonych (MRS) z optymalizacją obliczeń metody Liebman.

2. Rozwiązanie przepływu laminarnego w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju przewodu metodą różnic skończonych z optymalizacją metody Liebman

Podstawą rozwiązania równania (6) metodą różnic skończonych jest siatka węzłów z krokiem Δx i Δy (rys. 4).



Rys. 4. Szkic do analizy zagadnień brzegowych w obszarze płaskim

Po zastosowaniu różnic centralnych drugie pochodne funkcji $c(x,y)$ można opisać wzorami (Mitchell i Griffiths, 1980):

$$\frac{\partial^2 c_w}{\partial x^2} = \frac{c_w(i+1,j) - 2c_w(i,j) + c_w(i-1,j)}{\Delta x^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 c_w}{\partial y^2} = \frac{c_w(i,j+1) - 2c_w(i,j) + c_w(i,j-1)}{\Delta y^2} \quad (8)$$

Po uwzględnieniu (7) i (8) w równaniu (6) otrzymuje się zależność:

$$\frac{c_w(i+1,j) - 2c_w(i,j) + c_w(i-1,j)}{\Delta x^2} + \frac{c_w(i,j+1) - 2c_w(i,j) + c_w(i,j-1)}{\Delta y^2} = 0 \quad (9)$$

W celu przyspieszenia zbieżności procesu stosuje się nadrelaksację w procesie iteracji wprowadzając współczynnik λ według schematu Liebmana (Isaacson i Keller, 1994):

$$c_{w(i,j)}^{(n+1)} = \lambda \cdot c_{w(i,j)}^{(n+1)} + (1-\lambda) \cdot c_{w(i,j)}^{(n)} \quad ; \quad n = \overline{1, N} \quad (10)$$

gdzie n jest numerem iteracji.

Proces iteracji jest prowadzony do momentu, kiedy maksymalna różnica wartości funkcji w dwóch kolejnych iteracjach będzie mniejsza lub równa od przyjętej wartości błędu.

$$\max \left| \frac{c_{w(i,j)}^{(n+1)} - c_{w(i,j)}^{(n)}}{c_{w(i,j)}^{(n+1)}} \cdot 100 \right| \leq \varepsilon \quad ; \quad n = \overline{1, N} \quad (11)$$

Po wyznaczeniu składowej przepływu wzbudzonego, prędkość c_z wyznacza się z zależności (3)

3. Ocena dokładności MRS z optymalizacją obliczeń metody Liebmana

W celu oceny dokładności prezentowanej numerycznej metody dokonano porównania rezultatów rozwiązania zagadnienia laminarnego przepływu w przewodzie okrągłym metody różnic skończonych z optymalizacją obliczeń metody Liebmana z wynikami obliczeń teoretycznych.

Pole prędkości przepływu laminarnego glicerolu w przewodzie o przekroju kołowym jest opisane rozkładem parabolicznym (Batchelor, 2000):

$$c_T(x, y) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r_0^2 - r^2) \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (12)$$

gdzie: $r_0 = 10\text{mm}$ jest promieniem przewodu, a $\mu = 1,499 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ jest współczynnikiem lepkości dynamicznej glicerolu.

W przypadku metody różnic skończonych wykonano podział przekroju przewodu na siatkę składającą się z 100 i 10000 węzłów. Do obliczeń przyjęto, że $\varepsilon = 0,0001$.

Błąd rozwiązania MRS z optymalizacją metody Liebmana dla wybranych punktów zestawiono w tabeli 1.

Względne błędy obliczeń poszczególnych prędkości do przedstawionych niżej zestawień graficznych i tabelarycznych wyznaczono z zależności:

$$\delta c_{MRS} = \left| \frac{c_T - c_{MRS}}{c_T} \right| * 100\% \quad (13)$$

gdzie: c_{MRS} jest to prędkość wyznaczona numerycznie MRS z optymalizacją metody Liebmana, natomiast c_T jest to prędkość teoretyczna wyznaczona z równania (12).

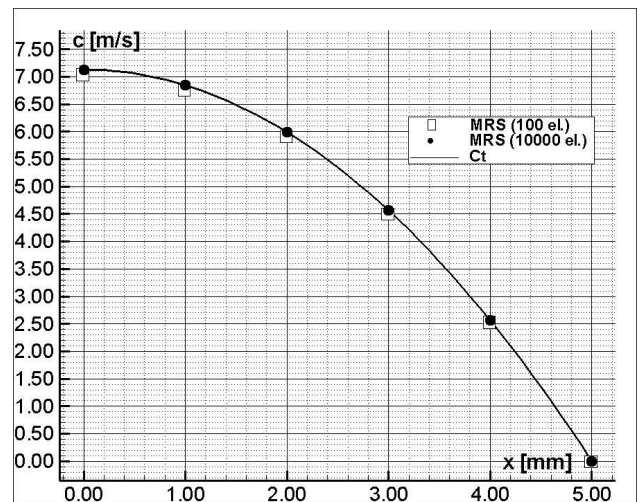
Na rysunku 5 przedstawiono graficzne porównanie rezultatów numerycznych z rozwiązaniem teoretycznym (12).

Tab. 1. Laminarny przepływ glicerolu w przewodzie kołowym ($Re = 30$) – błąd rozwiązania MRS z optymalizacją metody Liebmana

Współrzędne węzłów		Rozwiązanie teoretyczne	Rozwiązanie num. MRS 100 el.	Błąd metody MRS 100 el.
x	y	c_T	c_{MRS}	δc_{MRS}
[mm]	[mm]	[m/s]	[m/s]	[%]
0,0E+00	0,0E+00	7,1320E+00	7,0459E+00	1,2067E+00
1,0E+00	0,0E+00	6,8467E+00	6,7639E+00	1,2093E+00
2,0E+00	0,0E+00	5,9909E+00	5,9183E+00	1,2109E+00
3,0E+00	0,0E+00	4,5645E+00	4,5097E+00	1,1993E+00
4,0E+00	0,0E+00	2,5675E+00	2,5375E+00	1,1691E+00
5,0E+00	0,0E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	-

Współrzędne węzłów		Rozwiązanie teoretyczne	Rozwiązanie num. MRS 1000 el.	Błąd metody MRS 1000 el.
x	y	c_T	c_{MRS}	δc_{MRS}
[mm]	[mm]	[m/s]	[m/s]	[%]
0,0E+00	0,0E+00	7,1320E+00	7,1285E+00	4,8958E-02
1,0E+00	0,0E+00	6,8467E+00	6,8436E+00	4,5462E-02
2,0E+00	0,0E+00	5,9909E+00	5,9890E+00	3,0848E-02
3,0E+00	0,0E+00	4,5645E+00	4,5633E+00	2,5293E-02
4,0E+00	0,0E+00	2,5675E+00	2,5670E+00	1,8437E-02
5,0E+00	0,0E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	-

Maksymalny błąd metody MRS z optymalizacją metody Liebmana w przypadku siatki składającej się z 100 elementów nie przekracza 1,5 %, natomiast w przypadku siatki złożonej z 10000 elementów nie przekracza 0,05 %. Wraz ze wzrostem liczby węzłów zwiększa się dokładność metody.



Rys. 5. Porównanie rozwiązania numerycznego prędkości z rezultatami obliczeń numerycznych MRS z optymalizacją metody Liebmana

Niewielkie różnice pomiędzy rozwiązaniem analitycznym i MRS z optymalizacją metody Liebmana w odniesieniu do wyznaczanego pola prędkości wskazują, że proponowane algorytmy obliczeniowe przedstawionej metody charakteryzują się dużą dokładnością obliczeń.

Na dokładność obliczeń ma wpływ również parametr ε (11). Wzrost wartości ε powoduje zmniejszenie błędu metody oraz dłuższy czas obliczeń.

4. Przykłady obliczeniowe

Niżej przedstawiono rezultaty obliczeń pól prędkości przepływu glicerolu ($R_e = 30$, $\mu = 1,499$ Pa·s) w wybranych przekrojach przewodów. Przyjęto siatkę składającą się z 1000 węzłów, którą również wykorzystano do wyznaczenia współczynnika energii kinetycznej (Coriolisa) oraz współczynnika pędu (Boussinesqa).

Współczynnik Coriolisa wyznaczono ze wzoru (Chadwick i in., 2012, Nalluri i Marriott, 2009):

$$\alpha = \frac{\int c_z^3 d\Lambda}{\Lambda c_{sr}^3} \approx \frac{\sum_{i=1}^N c_{zi}^3 d\Lambda_i}{\Lambda c_{sr}^3} \quad (14)$$

gdzie: c_z oznacza prędkość w polu przepływu, c_{sr} jest prędkością średnią przepływu w kanale, a Λ jest polem powierzchni przewodu.

Współczynnik Boussinesqa wyznaczono z zależności (Chadwick i in., 2012):

$$\beta = \frac{\int c_z^2 d\Lambda}{\Lambda c_{sr}^2} \approx \frac{\sum_{i=1}^N c_{zi}^2 d\Lambda_i}{\Lambda c_{sr}^2} \quad (15)$$

Liczba Reynoldsa została obliczona z następującego wzoru (Batchelor, 2000):

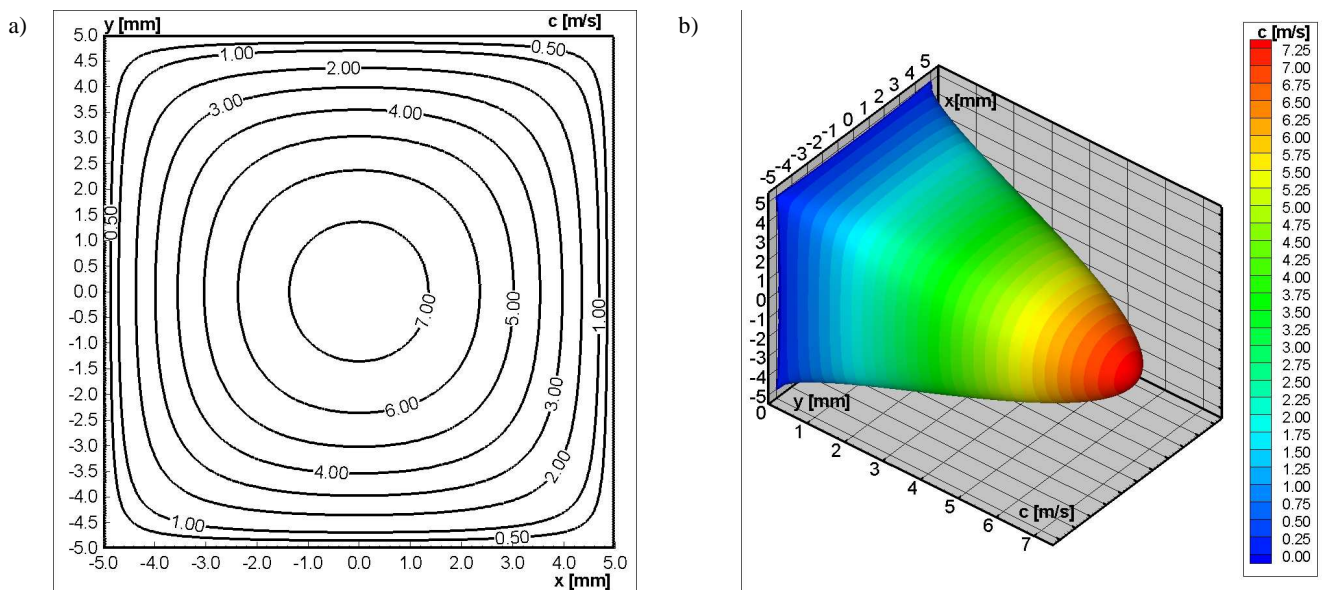
$$Re = \frac{c_{sr} D_h}{\nu} ; \quad D_h = \frac{4\Lambda}{L} \quad (16)$$

gdzie: D_h jest to średnica hydrauliczna, ν jest to współczynnik lepkości kinematycznej, a L jest obwodem przewodu (obwód zwilżony).

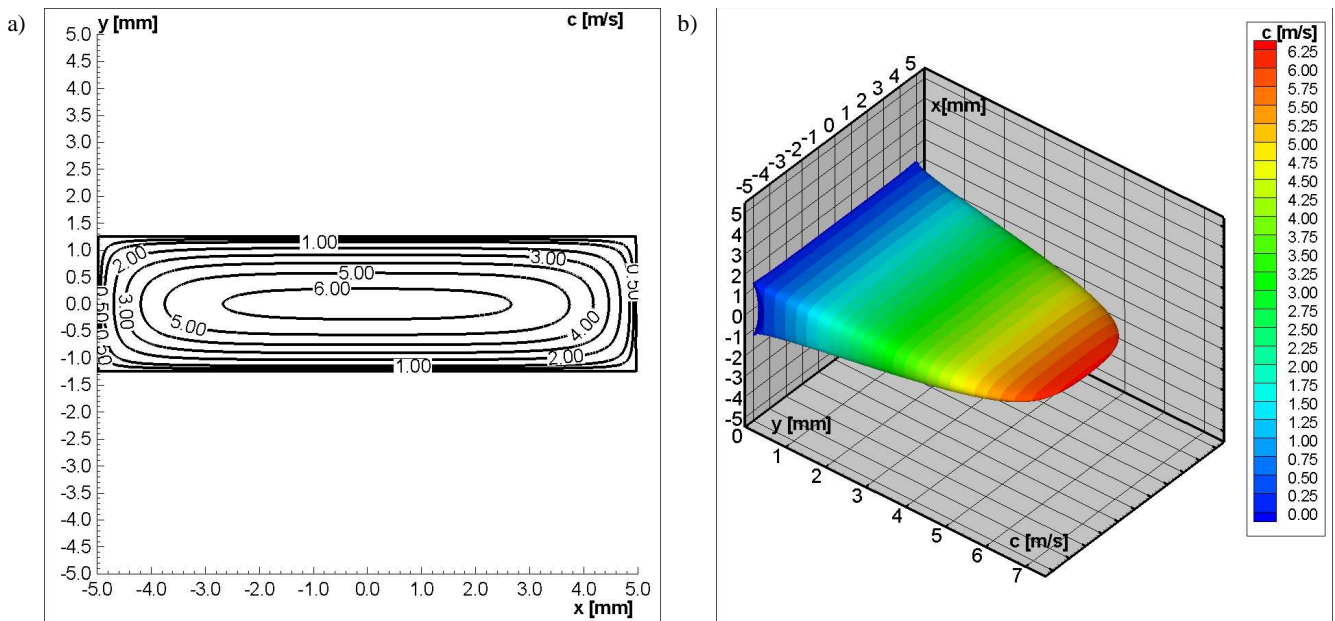
Na rysunku 6 wykreślono pole prędkości przepływu laminarnego ($R_e = 30$) w przewodzie o przekroju kwadratowym ($\alpha = 2,15$, $\beta = 1,38$).

Rysunek 7 przedstawia pole prędkości ($R_e = 30$) w przewodzie o przekroju prostokąta dla założonego stosunku boków wysokości do podstawy 1:4 ($\alpha = 1,83$, $\beta = 1,29$).

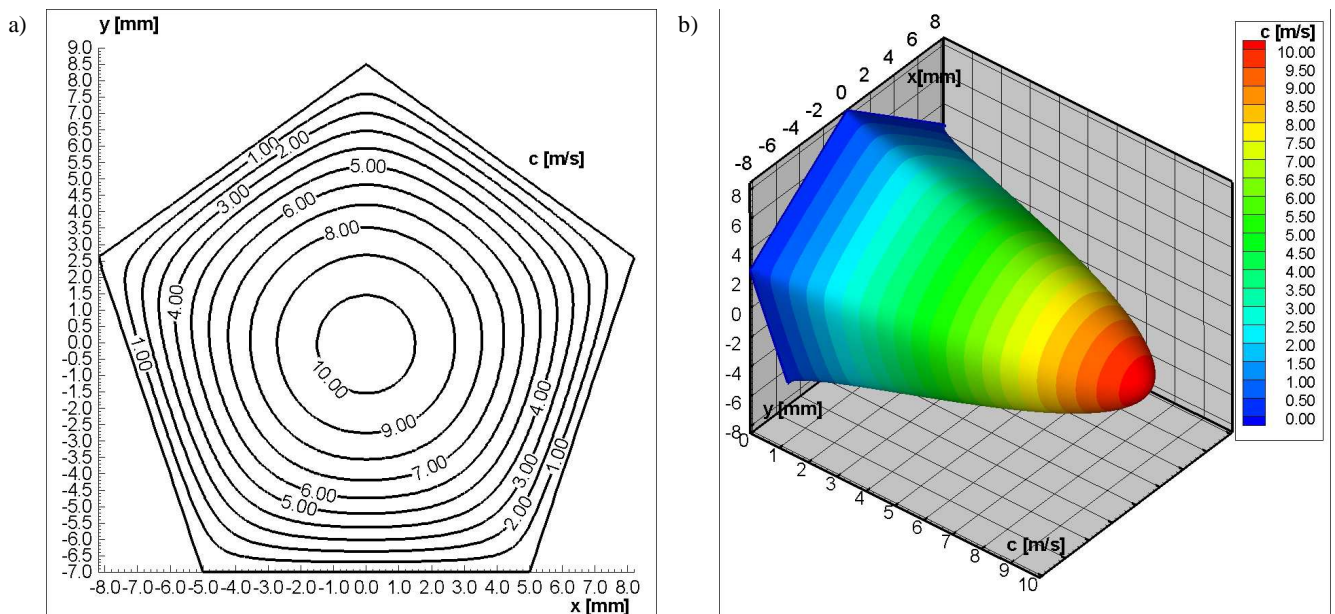
Na rysunku 8 przedstawiono pole prędkości ($R_e = 30$) w przewodzie o przekroju pięciokąta foremnego ($\alpha = 2,09$, $\beta = 1,36$).



Rys. 6. Pole prędkości ($R_e = 30$) w przewodzie o przekroju kwadratu: a) izotachy, b) trójwymiarowy kształt pola prędkości



Rys. 7. Pole prędkości ($Re = 30$) w przewodzie prostokątnym o stosunku wysokości do podstawy przekroju poprzecznego 1:4: a) izotachy, b) trójwymiarowy kształt pola prędkości



Rys. 8. Pole prędkości ($Re = 30$) w przewodzie o przekroju pięciokąta foremnego: a) izotachy, b) trójwymiarowy kształt pola prędkości

5. Podsumowanie

Przedstawiona metoda różnic skończonych pozwala w efektywny sposób wyznaczać pola prędkości przepływów laminarnych w przewodach prostoosiowych niezależnie od kształtu przekroju przewodu. Implementacja metody Liebmana w MRS znacznie skraca czas obliczeń, a także zmniejsza pobór zasobów pamięci komputera.

Algorytm nie wymaga budowy pracochłonnych trójwymiarowych siatek, przez co metoda ta może być wykorzystywana jako aplikacja stosowana zarówno w zagadnieniach inżynierskich jak i naukowych.

Zastosowana płaska siatki w przekroju obliczanego kanału może być podstawą do wyznaczania wielkości jednoczłonowych charakteryzujących przepływ takich jak

liczba Reynoldsa, współczynnik energii kinetycznej czy współczynnik pędu.

Weryfikacja metody wykazała dużą dokładność metody. Zaprojektowany algorytm umożliwia rozwiązywanie zagadnień przepływów laminarnych w przewodach prostoliniowych bardzo złożonej geometrii przekroju przewodu.

Algorytm również może być stosowany w przepływach w mikrokanalach (Sharp i Adrian, 2004; Wibel i Ehrhard, 2009), gdzie przepływy zgodne są z makroprzepływami.

Literatura

- Huang M. Y., Ho C. H. (1993). Study of the Fluid in the Elliptical Duct by the Method of Characteristics. *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 115, No. 1, 80-84.
- Kosma Z. (2007). Symulacja numeryczna ruchu cieczy lepkiej metodą sztucznej ścisłości. Monografie, *Wydawnictwo Politechniki Radomskiej*, Radom 97/2007, 1- 108.
- Batchelor G. K. (2000). An introduction to fluid dynamics. *Cambridge University Press*, Cambridge.
- Teleszewski T. J., Sorko S. A. (2011). Zastosowanie metody elementów brzegowych do wyznaczania jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego. *Acta Mechanica et Automatica*, Vol. 5, No. 3, 124-132.
- Mitchell A. R., Griffiths D. F. (1980). The finite difference method in partial differential equations. *Wiley-Interscience*, Chichester, New York.
- Isaacson E., Keller H. B. (1994). Analysis of numerical methods. *John Wiley & Sons*, New York.
- Nalluri C., Featherstone R. E., Marriott M. (2009). Civil Engineering Hydraulics, 5th Edition. *John Wiley & Sons*, New York.
- Chadwick A., Morfett J., Borthwick M. (2012). Hydraulics in Civil and Environmental Engineering, 5th Edition. *Spon Press*, New York.
- Sharp K. V., Adrian R. J. (2004). Transition from laminar to turbulent flow in liquid filled microtubes. *Experiments in Fluids*, Vol. 36, No. 5, 741-747.
- Wibel W., Ehrhard P. (2009). Experiments on the laminar/turbulent transition of liquid flows in rectangular microchannels. *Heat Transfer Engineering*, Vol. 30, No. 1-2, 70-77.

IMPLEMENTATION OF THE FINITE DIFFERENCE METHOD WITH THE LIEBMANN METHOD FOR THE SOLUTION OF LAMINAR FLOW THROUGH STRAIGHT PIPES

Abstract: The work contains the implementation of the Finite Difference Method with the Liebmann Method for the solution of laminar flow through straight pipes using a two-dimensional grid. This method is the reduction of the three-dimensional grid to two-dimensional in the cross-section of duct. The algorithm were verified by numerical tests and compared with analytical solution. A numerical examples are presented.

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy własnej W/WBiŚ/8/2011.