

PRÓBA OKREŚLENIA OBSZARU CAŁKOWANIA ANOMALII GRAWIMETRYCZNYCH W ZAGADNIENIU INTERPOLACJI QUASI-GEOIDY

Marek Trojanowicz¹, Krzysztof Karsznia²¹

¹Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

²Leica Geosystem Sp. z o.o.

Streszczenie. W pracy podjęto próbę oszacowania wielkości obszaru całkowania anomalii grawimetrycznych wykorzystywanych jako dane uzupełniające w zagadnieniu interpolacji quasi-geoidy. Prace obliczeniowe oparto o dane grawimetryczne z obszaru Polski. Rozpatrywane były dwa warianty użycia danych grawimetrycznych – z wykorzystaniem globalnego modelu geopotencjału (EGM96) oraz bez wykorzystania tego modelu. W wyniku prac wykazano dużą rolę globalnego modelu geopotencjału w ograniczeniu obszaru całkowania anomalii grawimetrycznych. Ustalono także tzw. „promień obciążenia” dla danych z obszaru testowego.

Słowa kluczowe: interpolacja wysokości quasi-geoidy

WSTĘP

Budowa dokładnych, lokalnych modeli geoidy lub quasi-geoidy (w zależności od obowiązującego w danym kraju systemu wysokości) jest nieodzownym elementem umożliwiającym niwelację satelitarną. Jest wiele metod wyznaczenia takich powierzchni. Niezależnie jednak od zastosowanej techniki obliczeniowej podstawę obliczeń stanowi gęsta sieć punktów grawimetrycznych, wsparta często danymi dotyczącymi topografii terenu [np. Tscherning 2001]. Modele geoidy lub quasi-geoidy opracowane na podstawie takich danych noszą nazwę *geoidy* lub *quasi-geoidy grawimetrycznej*. Ponieważ w Polsce obowiązuje system wysokości normalnych, dalsze rozważania będą odniesione właśnie do zagadnienia wyznaczenia quasi-geoidy.

Charakterystyczną cechą quasi-geoid grawimetrycznych jest ich przesunięcie i pochYLENIE względem danych GPS/niwelacyjnych – tj. względem wysokości quasi-geoidy wyznaczonej na podstawie punktów o znanych wysokościach geometrycznych (elipsoidalnych-GPS) i normalnych [Tscherning 2001]. Taką cechą posiada np. quasi-geoida grawimetryczna Polski [Quasi97 [Łyszkowicz 1996]] [Barlik 1999]. To przesunięcie

i pochylenie, wywołane długookresowymi błędami wyznaczenia quasi-geoidy oraz błędami systematycznymi w pomiarach GPS i niwelacyjnych [Tscherning 2001], powoduje, że wykorzystanie quasi-geoidy grawimetrycznej w niwelacji satelitarnej właściwie wymusza jej transformację do punktów GPS/niwelacyjnych. Jeżeli taka transformacja obejmuje tylko przesunięcie i pochylenie całej powierzchni quasi-geoidy, to do wyznaczenia jej parametrów wystarczy tylko kilka punktów o znanych anomaliach wysokości (minimum 3). W Polsce liczba punktów o znanych wysokościach GPS i normalnych jest jednak znacznie większa. Przykładowo do wyznaczenia tzw. geoidy niwelacyjnej 2001 wykorzystano 62 punkty sieci EUVN, 341 punktów sieci POLREF, 23 punkty sieci Tatry oraz 326 punktów sieci WSSG [Pażus i in. 2002]. W takim wypadku zagęszczenie tych punktów jest tak duże, że właściwie wysokości quasi-geoidy pomiędzy punktami znanymi mogą być interpolowane. Natomiast dane grawimetryczne, numeryczny model terenu oraz globalny model potencjału uznać można za dane służące podniesieniu dokładności tej interpolacji. Znaczenie tych „dodatkowych” danych w procesie interpolacji jest oczywiście duże, a w perspektywie wyznaczenia quasi-geoidy z dokładnością $\pm 1-2$ cm ich wykorzystanie jest niezbędne. Pewne analizy dotyczące tego zagadnienia znaleźć można np. w pracy Łyszkowicz [1991].

Odległość między punktami o znanych wysokościach GPS/niwelacyjnych na terenie Polski wynosi od kilkunastu do kilkudziesięciu kilometrów. Takie zagęszczenie stwarza możliwość ograniczenia obszaru o znanych wartościach anomalii grawimetrycznych, który należy uwzględnić w obliczeniach. Wydaje się rozsądne przyjęcie założenia, że obszar, którego wpływ na wyznaczone anomalie wysokości będzie stały lub zmienny liniowo, może zostać pominięty. Oczywiście wpływ stref dalszych zależy od wielu czynników, a przede wszystkim od wartości anomalii grawimetrycznych w tych strefach oraz od odległości pomiędzy punktami znanymi. Uzależniony jest więc od miejsca interpolacji.

Niniejsze opracowanie stanowi próbę oszacowania wielkości obszaru o znanych wartościach anomalii grawimetrycznych, który należy wziąć pod uwagę „wzmacniając” interpolację quasi-geoidy danymi grawimetrycznymi.

SPOSÓB OCENY WPLYWU STREF DALSZYCH NA WYNIK INTERPOLACJI

W obliczeniach testowych założono, że interpolacja quasi-geoidy jest przeprowadzana z wykorzystaniem techniki *remove-restore* [np. Torge 2001]. W tym podejściu wysokość quasi-geoidy jest rozkładana na:

- cztery składowe, jeżeli w obliczeniach uwzględniany jest globalny model geopotencjału:

$$\zeta_{SN} = \zeta_{GM} + \zeta_t + \zeta_{Ag} + \zeta_L \quad (1)$$

lub

- trzy składowe (bez uwzględnienia globalnego modelu geopotencjału):

$$\zeta_{SN} = \zeta_t + \zeta_{Ag} + \zeta_L \quad (2)$$

We wzorach 1 i 2 przyjęto następujące oznaczenia: ζ_{GM} jest składową wyznaczoną na podstawie globalnego modelu geopotencjału, ζ_t to składowa wynikająca z wpływu

mas topograficznych, $\zeta_{\Delta g}$ – składowa wyznaczana na podstawie anomalii grawimetrycznych oraz ζ_L – podlegająca interpolacji resztową wartość anomalii wysokości.

Proces obliczeniowy podzielić można na trzy etapy:

- W etapie pierwszym wyznaczane są dla punktów o znanych anomalii wysokości (ζ_{SN}) składowe ζ_L . Oblicza się je poprzez usunięcie składowych ζ_{GM} , ζ_t i $\zeta_{\Delta g}$ – w przypadku zastosowania rozkładu (1) lub składowych ζ_t i $\zeta_{\Delta g}$ – w przypadku zastosowania rozkładu (2).
- W etapie drugim wykonujemy interpolację składowej ζ_L .
- W etapie trzecim przywracamy dla punktów nowych, w zależności od zastosowanego rozkładu, składowe ζ_{GM} , ζ_t i $\zeta_{\Delta g}$ lub składowe ζ_t i $\zeta_{\Delta g}$.

Wartości anomalii grawimetrycznych przyjętych do wyznaczenia składowej $\zeta_{\Delta g}$ obliczane są w zależności od zastosowanego rozkładu. Dla rozkładu danego wzorem (1) zapiszemy:

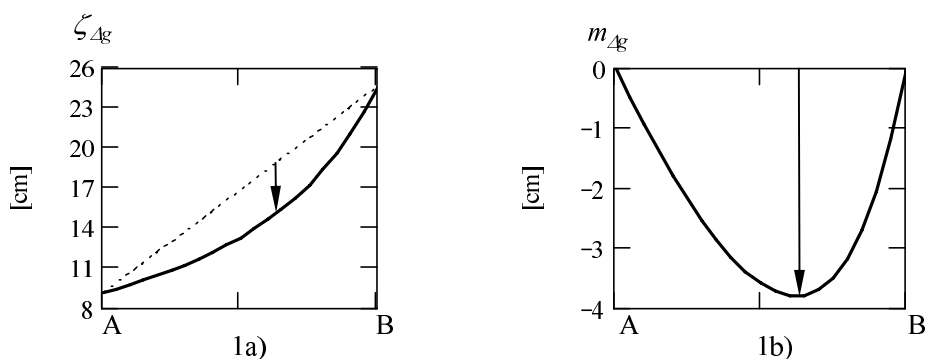
$$\Delta g_c = \Delta g - \Delta g_{GM} - \Delta g_t \quad (3)$$

Dla rozkładu (2) zapiszemy odpowiednio:

$$\Delta g_c = \Delta g - \Delta g_t \quad (4)$$

W pracy poddano analizie anomalie grawimetryczne wyznaczone dla obu powyższych przypadków (tj. wzory 3 i 4).

Sposób oceny wpływu danych grawimetrycznych na wynik interpolacji przedstawiony zostanie na następującym przykładzie. Załóżmy, że składowa $\zeta_{\Delta g}$ dla linii AB dana jest jak na rysunku 1a. Składowa ta przedstawiona jest linią ciągłą, którą nazwiemy linią wpływu składowej $\zeta_{\Delta g}$.



Rys. 1. Wpływ składowej $\zeta_{\Delta g}$ na wynik interpolacji anomalii wysokości

Fig. 2. Influence of the $\zeta_{\Delta g}$ component on quasi-geoid heights interpolation

Gdyby składowe ζ_{GM} i ζ_t dla tej linii były zerowe, składowa ζ_{Ag} definiowałaby jednocześnie przebieg quasi-geoidy pomiędzy punktami A i B. Odchylenie linii wpływu składowej ζ_{Ag} od cięciwy łączącej anomalie wysokości w punktach A i B możemy w tym wypadku uznać za definicję błędu interpolacji, wynikającego z nieuwzględnienia w procesie interpolacji danych grawimetrycznych. Błąd ten oznaczony jako m_{Ag} , dla omawianego przykładu przedstawia rysunek 1b. Strzałki na obu rysunkach przedstawiają błąd maksymalny $m_{Ag\ max}$.

Jeżeli obliczenie składowej ζ_{Ag} wykonamy wielokrotnie, biorąc pod uwagę anomalie grawimetryczne w ograniczonej i za każdym razem różnej odległości od punktów podlegających interpolacji, wyznaczymy różne wartości składowych ζ_{Ag} , które oznaczymy jako ζ_{AgR} , gdzie wskaźnik R oznacza tzw. promień obcięcia, określający maksymalną odległość anomalii przyjętych do obliczeń. Błąd interpolacji odpowiadający składowym ζ_{AgR} oznaczmy jako m_{AgR} . Korzystając z tak zdefiniowanych błędów, można sformułować następujące zadanie:

Znaleźć taką graniczną wartość R_G , dla której zwiększenie promienia obcięcia nie ma istotnego wpływu na wartość błędu m_{AgR} .

Wartość R_G definiuje więc strefę istotnego wpływu anomalii grawimetrycznych na wynik interpolacji. Poniżej przedstawione są analizy zmierzające do oszacowania wartości R_G dla obszaru testowego położonego w centralnej części Polski.

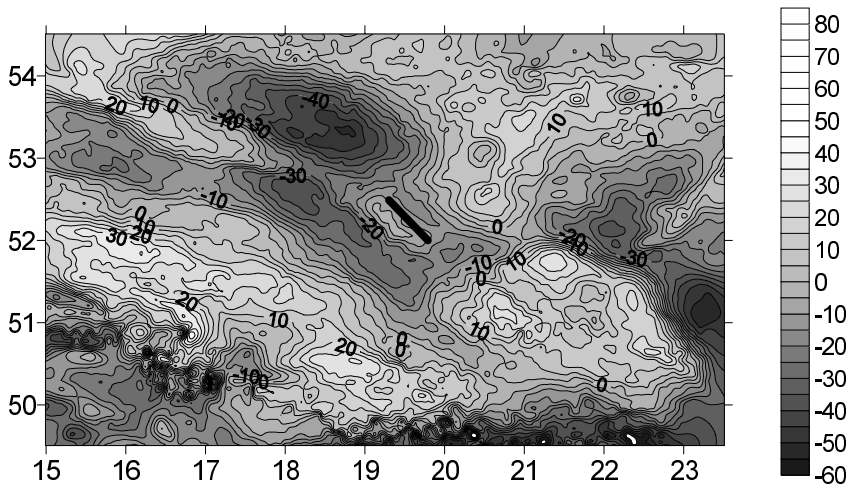
OBLICZENIA TESTOWE

Obliczenia testowe wykonane zostały w dwóch wariantach:

- bez uwzględnienia globalnego modelu geopotencjału tzn. tylko po usunięciu topografii (wariant A);
- z uwzględnieniem tego modelu, a więc po usunięciu topografii oraz modelu EGM96 (wariant B).

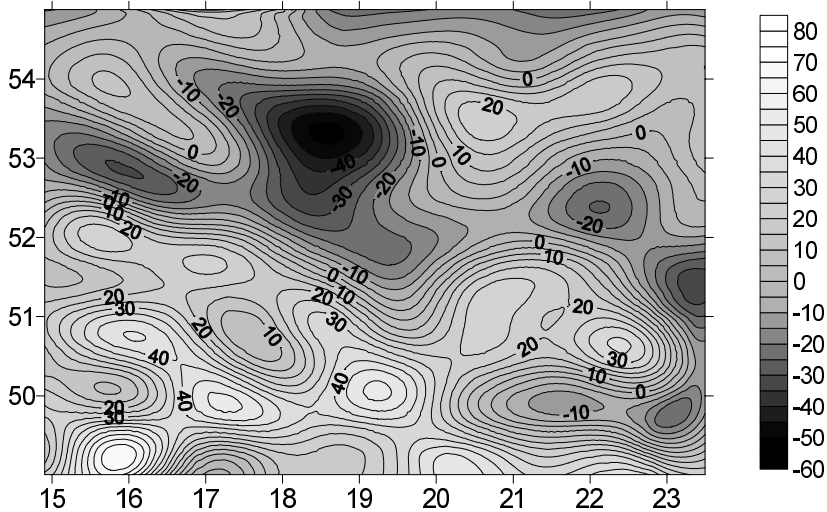
Obliczenia wykonano w szeregu punktach testowych. Punkty te tworzą profile o długości 25, 50 i 75 km. Profile pokrywają się ze sobą, a miejsce ich położenia oznaczone jest na rysunku 2 czarną kreską. W każdym profilu znajdują się punkty oddalone od siebie o ok. 3.3 km. Kierunek profili przyjętych do obliczeń określony został po analizie wyników obliczeń wykonanych w różnych kierunkach. Do prezentacji wybrano wyniki dla profili o największych wahaniami wpływu poszczególnych stref.

Do obliczeń dla wariantu A wykorzystano anomalie Bouguera z obszaru Polski w siatce $5' \times 5'$. Anomalie te wyznaczone zostały na podstawie anomalii wolnopowietrznych udostępnionych na stronie internetowej *International Gravity Bureau* (<http://bgi.cnes.fr>). Mapę anomalii Bouguera przedstawia rysunek 2.



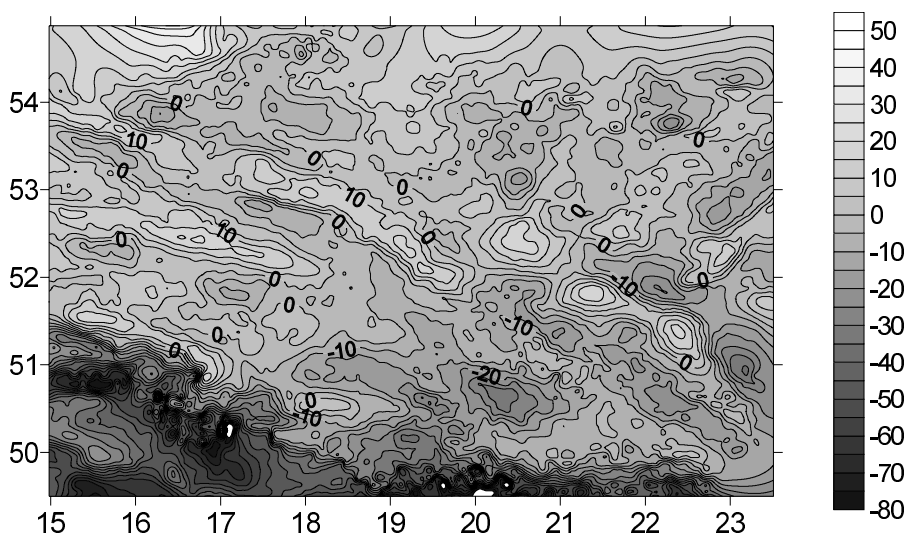
Rys. 2. Mapa anomalii Bouguera [mGal] dla obszaru Polski z zaznaczonym położeniem profili testowych. Anomalie te stanowią podstawę obliczeń dla wariantu A
 Fig.2. Bouguer Anomaly Map [mGal] for the territory of Poland with marked position of test profiles. Test calculations for variant A are based on this data

Dla obszaru opracowania wyznaczone zostały anomalie grawimetryczne z modelu geopotencjału EGM96. Mapę tych anomalii przedstawia rysunek 3.



Rys. 3. Anomalie grawimetryczne wyznaczone z modelu EGM96 [mGal] dla obszaru Polski
 Fig. 3. Gravity anomalies determined from the EGM96 model for the territory of Poland

Obliczenia testowe dla wariantu B zrealizowano w oparciu o *anomalie resztowe* Δg_c zdefiniowane równaniem (3). Mapę tych anomalii przedstawia rysunek 4.

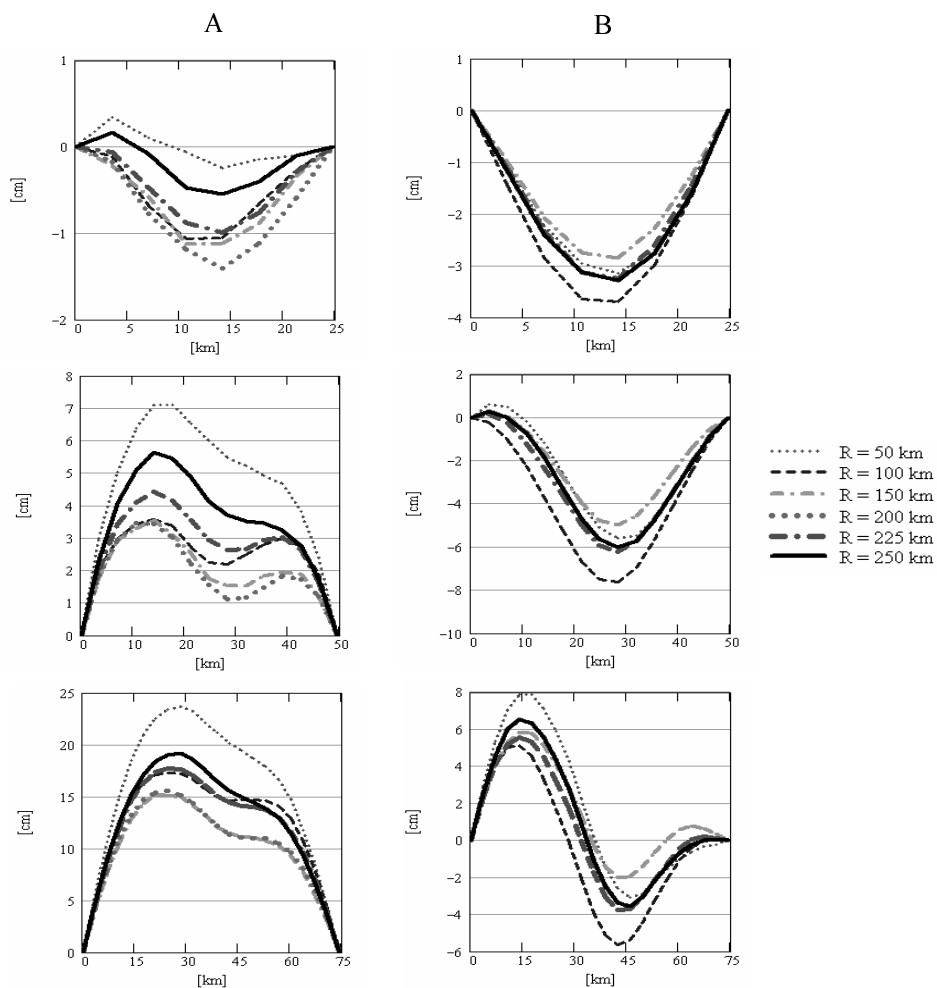


Rys. 4. Anomalie resztowe, stanowiące podstawę obliczeń dla wariantu B
 Fig. 4. Residual gravity anomalies, as the base for test calculations in variant B

Obliczenia testowe przeprowadzono dla dziesięciu stref od 25 do 250 km wokół każdego z punktów. Różnica promieni sąsiednich stref wynosi 25 km.

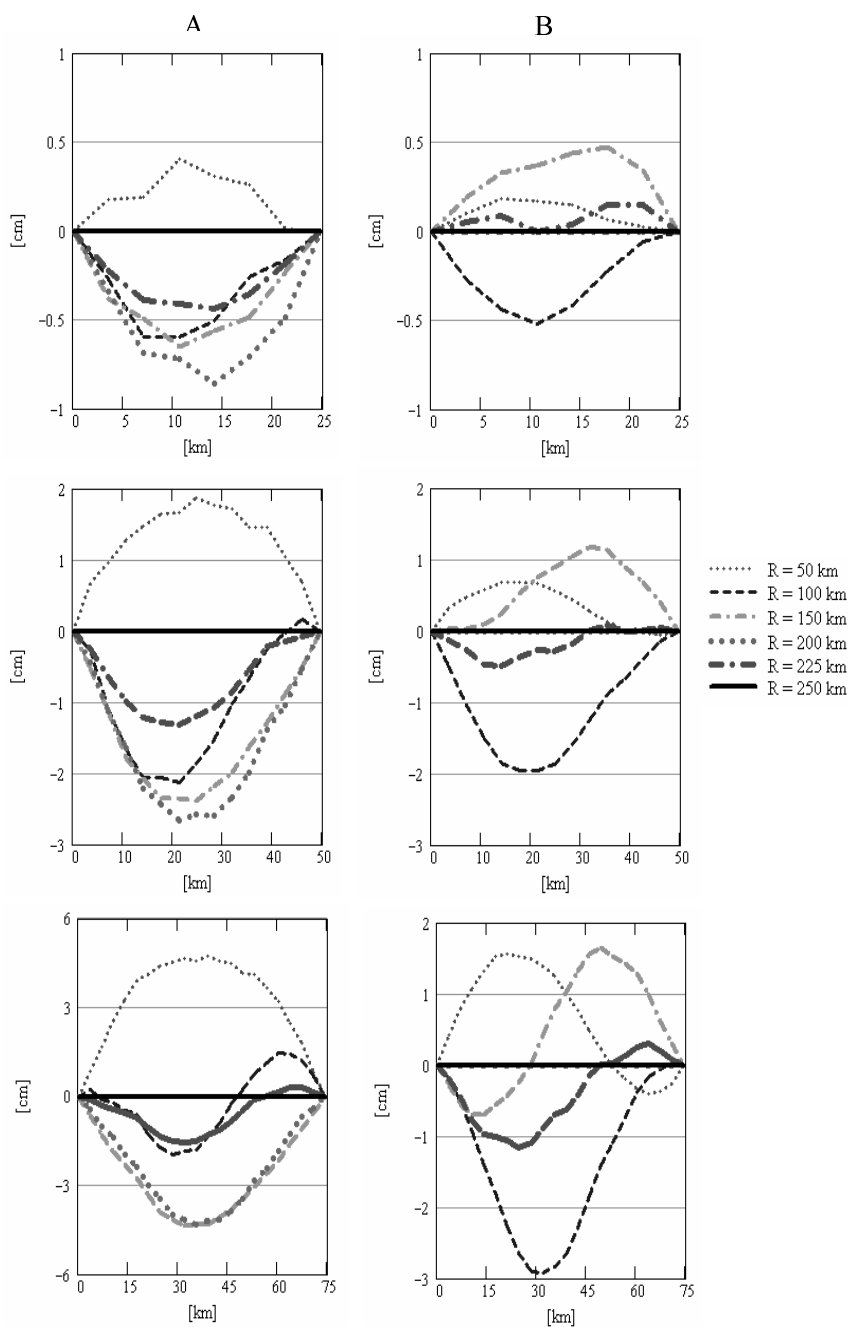
Prezentację wyników obliczeń testowych rozpoczniemy od przedstawienia błędów $m_{\Delta R}$. Błędy te dla wybranych stref w obu wariantach przedstawia rysunek 5.

Analizując przedstawione wykresy zauważyć należy, że bezwzględne wielkości wpływów danych grawimetrycznych w obu wariantach, dla profili 25 i 50 km, są podobne. Znacząca jest jedynie różnica tych wpływów dla profilu najdłuższego (75 km). Można powiedzieć, że uwzględnienie globalnego modelu geopotencjału w tym przypadku znacznie zmniejsza błąd nieuwzględnienia danych grawimetrycznych w procesie interpolacji. Dla analizowanego problemu istotne są jednak zmiany wpływu różnych stref na wynik interpolacji. Na rysunku 5 linią ciągłą zaznaczony jest wpływ na wynik interpolacji strefy największej (do 250 km wokół każdego punktu). Wpływy stref mniejszych różnią się zarówno między sobą, jak i od strefy $R=250$ km. Różnice te są większe dla wariantu, który nie uwzględnia globalnego modelu potencjału i nawet dla stref dalszych (200, 225 km) przekraczają one wartości 2 cm. Są to więc wielkości znaczące i świadczą o tym, że poszerzenie obszaru całkowania ma wciąż istotny wpływ na wynik interpolacji. Jeżeli dla kilku kolejnych stref (ze strefą najszerzą włącznie) krzywe błędów $m_{\Delta R}$ miałyby przebieg zbliżony, oznaczałoby to brak istotnego wpływu poszerzenia obszaru całkowania na wynik interpolacji.



Rys. 5. Wykresy błędów m_{AgR} bez uwzględnienia modelu EGM96 (A) oraz z jego uwzględnieniem (B)

Fig. 5. Diagrams of m_{AgR} errors determined without using the EGM96 model (A) and including it (B)



Rys. 6. Wykresy odchyżeń Δm_R dla wybranych stref. Bez uwzględnienia modelu EGM96 (A) oraz z jego uwzględnieniem (B)

Fig. 6. Diagrams of Δm_R deviations for selected profiles. Without using the EGM96 model (A) and including it (B)

Przyjmując strefę $R=250$ km jako odniesienie, wyznaczyć można odchylenia pomiędzy błędami $m_{\Delta g R}$ dla stref mniejszych i strefą odniesienia oznaczoną jako $m_{\Delta g 250}$. Odchylenia te oznaczone zostaną jako Δm_R .

Zapiszemy więc:

$$\Delta m_R = m_{\Delta g R} - m_{\Delta g 250} \quad (5)$$

Wykresy takich odchyłeń przedstawia rysunek 6.

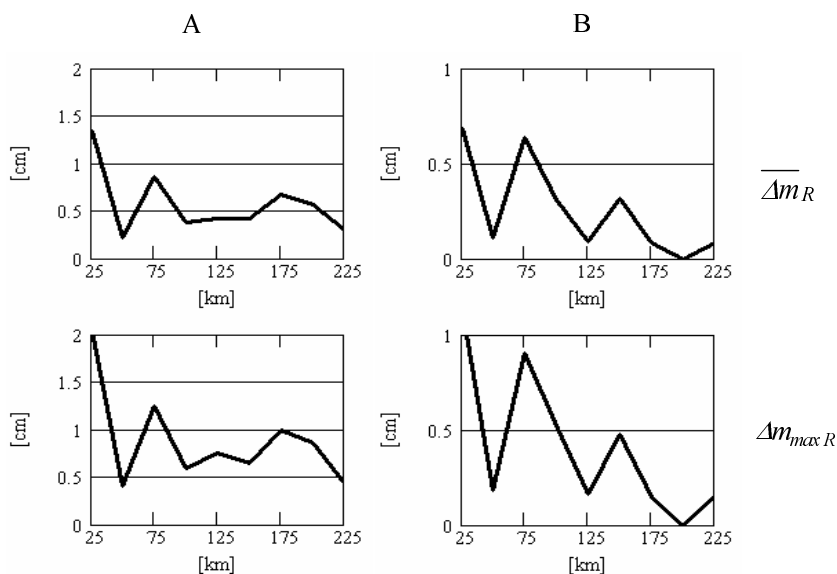
Różnice w oddziaływaniu kolejnych stref na wynik interpolacji są jeszcze lepiej widoczne na wykresach przedstawiających odchylenia średniokwadratowe $\overline{\Delta m_R}$ oraz odchylenia maksymalne dla każdej strefy $\Delta m_{max R}$. Odchylenia te zdefiniujemy następująco:

$$\overline{\Delta m_R} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta m_{R_i}^2}{n}} \quad (6)$$

$$\Delta m_{max R} = \max|\Delta m_R|$$

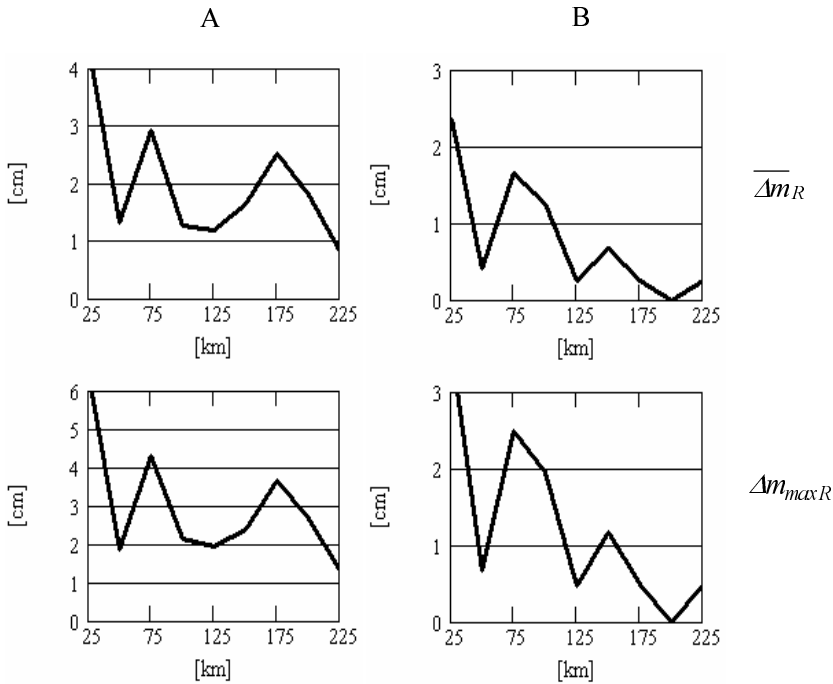
gdzie n jest liczbą punktów w profilu.

Wykresy tak zdefiniowanych błędów przedstawiają rysunki 7 (profil 25 km), 8 (profil 50 km) oraz 9 (profil 75 km).



Rys. 7. Wykresy błędów $\overline{\Delta m_R}$ oraz $\Delta m_{max R}$ dla profilu 25 km. Bez uwzględnienia modelu EGM96 (A) oraz z jego uwzględnieniem (B)

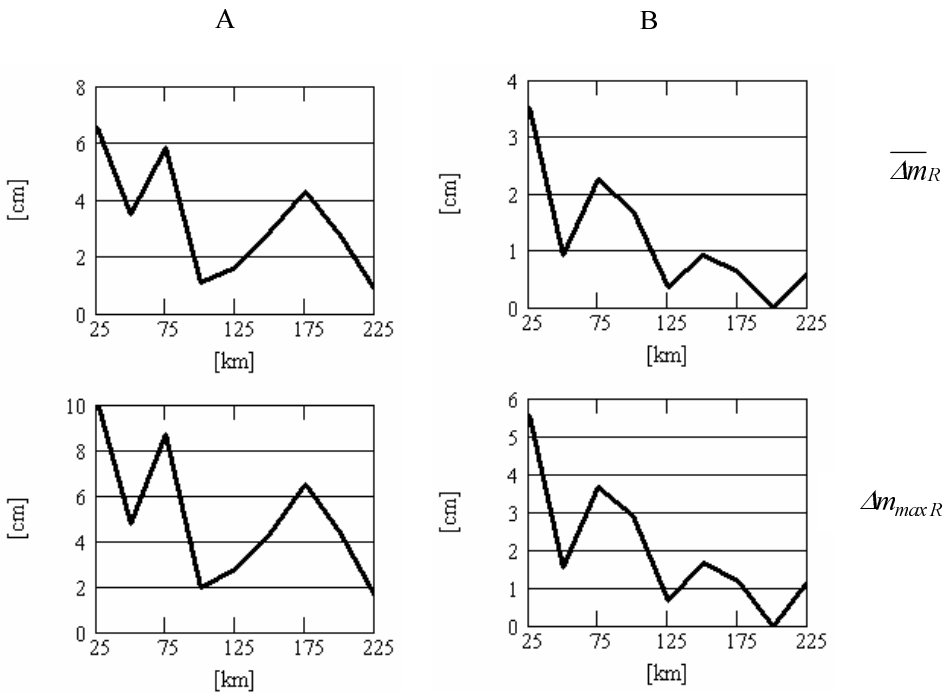
Fig. 7. Diagrams of $\overline{\Delta m_R}$ and $\Delta m_{max R}$ errors for the profile of 25 km. Without using the EGM96 model (A) and including it (B)



Rys. 8. Wykresy błędów $\overline{\Delta m_R}$ oraz Δm_{maxR} dla profilu 50 km. Bez uwzględnienia modelu EGM96 (A) oraz z jego uwzględnieniem (B)

Fig. 8. Diagrams of $\overline{\Delta m_R}$ and Δm_{maxR} errors for the profile of 50 km. Without using the EGM96 model (A) and including it (B)

Chcąc wyznaczyć wielkość obszaru całkowania anomalii grawimetrycznych, określić należy dopuszczalny błąd wynikający z ograniczenia tego obszaru. W przedstawionych analizach promień ograniczenia obszaru całkowania (R_o) ustalić można jako promień strefy o takich własnościach, że wielkości błędów Δm_{maxR} i $\overline{\Delta m_R}$ dla tej strefy oraz dla stref większych są mniejsze od pewnej granicznej wartości m_G . Jeżeli przyjmiemy $m_G = 1$ cm, to zauważymy, że dla wariantu A obszar całkowania numerycznego można ograniczyć właściwie tylko dla najkrótszego profilu o długości 25 km, przy czym odczytamy $R_o \approx 100$ km (rys. 7). Dla profili dłuższych nie można stwierdzić ustabilizowania się wartości błędów Δm_{maxR} i $\overline{\Delta m_R}$ na odpowiednim poziomie. Dla wariantu B, uwzględniającego model EGM96, obszar całkowania ograniczyć można także dla profilu o długości 50 km. Promień R_o odczytany dla tego profilu wynosi około 175 km. Natomiast dla profilu o długości 25 km promień będzie znacznie mniejszy niż w wariantcie A i wyniesie około 50 km. Dla profilu najdłuższego (75 km), ze względu na błędy Δm_{maxR} , nie można określić promienia R_o . Warto jednak zauważyć, że wartości błędów Δm_{maxR} i $\overline{\Delta m_R}$ wariantu B są znacznie mniejsze niż dla wariantu A. Dysponując zatem danymi grawimetrycznymi na ograniczonym obszarze (co wymusza ograniczenie obszaru całkowania) warto zawsze wykorzystać dodatkowo globalny model geopotencjału.



Rys. 9. Wykresy błędów $\overline{\Delta m_R}$ oraz Δm_{maxR} dla profilu 75 km. Bez uwzględnienia modelu EGM96 (A) oraz z jego uwzględnieniem (B)

Fig. 9. Diagrams of $\overline{\Delta m_R}$ and Δm_{maxR} errors for the profile 75 km. Without using the EGM96 model (A) and including it (B)

WNIOSKI KOŃCOWE

Podsumowując przeprowadzone analizy, należy przede wszystkim uwypuklić znaczenie globalnego modelu geopotencjału dla ograniczenia obszaru całkowania numerycznego anomalii grawimetrycznych. Sam promień ograniczenia (obcięcia) zależy przede wszystkim od wielkości pominiętych anomalii grawimetrycznych oraz od odległości pomiędzy punktami znanymi wykorzystanymi do interpolacji wysokości quasi-geoidy. Przeprowadzone analizy wykazały, że chcąc zachować wysoką dokładność obliczeń, nawet przy wykorzystaniu globalnego modelu geopotencjału, obszar przyjętych do obliczeń anomalii grawimetrycznych musi być znaczny. Zachowując dokładność 1 cm oraz zakładając odległość 50 km pomiędzy punktami znanymi, promień obcięcia dla analizowanego obszaru ustalono na ok. 175 km. Promień ten można znacznie ograniczyć zmniejszając odległość pomiędzy punktami znanymi.

Należy także podkreślić, że bez uwzględnienia modelu EGM96 udało się określić promień obcięcia jedynie dla najkrótszego profilu. Oznacza to, że przy większych odległościach pomiędzy punktami znanymi należy wziąć pod uwagę anomalie grawimetryczne w odległości większej niż 225 km wokół każdego punktu.

PIŚMIENNICTWO

- Barlik M., 1999. Geodetic gravimetry. Polish National Committee for International Union of Geodesy and Geophysics.
- Forsberg R., Tscherning C., 1997. Topographic effects in gravity field modelling for BVP. Geodetic Boundary Value Problems in view of the one centimetre geoid. Lecture notes in earth science, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Heiskanen WA., Moritz H., 1967. Physical geodesy. Freeman, San Francisco.
- Lyszkowicz A., 1996. The new gravimetric geoid for the territory of Poland. Publ. of Inst. of Geoph. Pol. Acad. Sci., M-18 (273), Warsaw, pp.191–197.
- Lyszkowicz A., 1991. Wyznaczenie różnic wysokości z wyników pomiarów GPS i odstępów geoidy od elipsoidy. Geodezja i Kartografia t. XL, z. 2.
- Sansò F. Rummel (Eds.), 1997. Lecture Notes in Earth Sciences. Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Torge W., 2001. Geodesy. Walter de Gruyter, Berlin, New York 2001.
- Tscherning C.C., 2001. Geoid determination after first satellite gravity missions. Paper prepared at the occasion of the 70 birthday of Wolfgang Torge.

AN ATTEMPT AT DETERMINING AN AREA OF INTEGRATING A GRAVITY ANOMALY IN THE QUASI-GEOID INTERPOLATION PROBLEM

Abstract. The paper concerns an attempt at estimating of gravity anomalies integration area. Such values have furthermore been used as the additional data in the quasi-geoid interpolation problem. The test calculations were based on gravity data coming from the territory of Poland. The authors have considered two variants of using the gravity data: based on the global geopotential model EGM96 as a reference as well as without taking it into account. The results of test calculations indicate a significant role, which the EGM96 plays in limiting the area of integrating the gravity data. Furthermore, the authors have also determined so called “truncation radiuses” for the test data.

Key words: quasi-geoid height interpolation

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 17.11.2006