

## GEOIDA MILIMETROWA MIASTA I OKOLIC OLSZTYNA

Jacek Lamparski

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

**Streszczenie.** Obecnie dostępne modele geoidy obszaru Polski pozwalają określić, na podstawie dokładnych wysokości elipsoidalnych, wysokości normalne z przeciętną dokładnością  $\pm 2$  cm. Przeprowadzone dotychczas weryfikacje rzetelności uzyskanych wysokości normalnych dotyczą tylko części obszaru Polski. W niniejszej pracy przedstawiono na przykładzie obszaru wielkości powiatu (Olsztyn i okolice) metodykę poprawiania dowolnego modelu geoidy na niewielkim obszarze na poziomie dokładności poniżej 1 cm. Ubocznym i cennym produktem w tej metodyce są dokładne wysokości elipsoidalne wszystkich znaków wysokościowych, położonych w badanym obszarze. Jakkolwiek, uzyskany poprawiony model geoidy jest tworem wirtualnym, daje on poprawne wyniki w stosunku do sieci reperów niwelacji precyzyjnej. Ograniczeniem metody jest zawężenie modelu do określonego obszaru – w przedstawionym przykładzie obszaru wielkości 30 x 40 km.

**Słowa kluczowe:** geodezja, geodezja satelitarna, GPS

### WSTĘP

Coraz szersze praktykowanie techniki pomiarowej przy zastosowaniu systemu GPS spowodowało potrzebę stworzenia dokładnego modelu geoidy obszaru Polski (rys. 1) w celu umożliwienia obliczania wysokości normalnych wyznaczanych punktów. Nie sposób także wymienić wszystkich korzyści, wynikających z posiadania dokładnego modelu geoidy w różnorodnych pracach naukowych zarówno krajowych, jak i międzynarodowych.

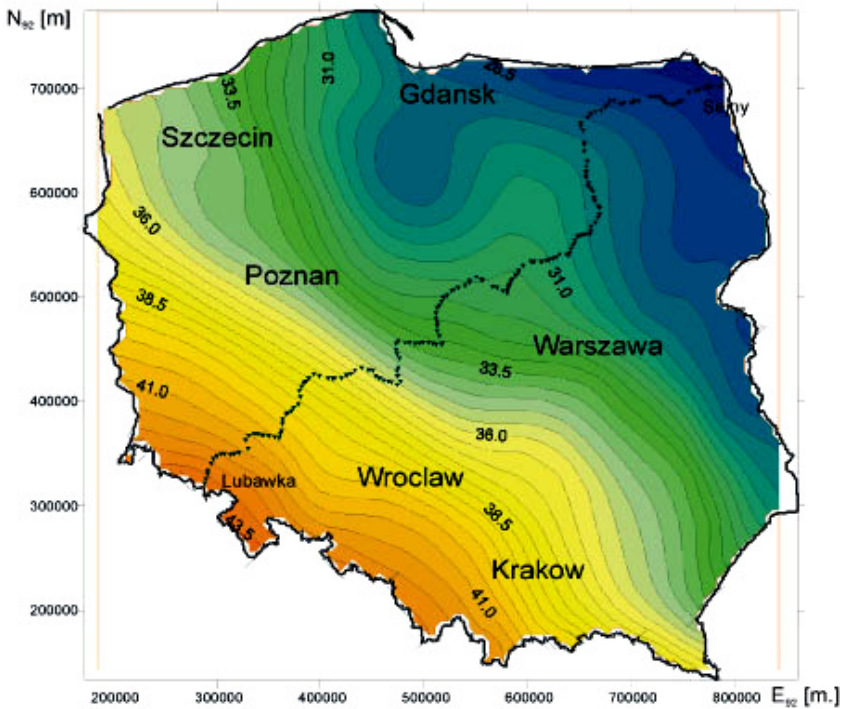
W ostatnich latach trwały w Instytucie Geodezji i Kartografii intensywne prace nad stworzeniem w Polsce modelu geoidy, dającego w praktyce dokładności centymetrowe. Zespół geodetów-naukowców z całej Polski pracował pod kierunkiem profesora Jana Kryńskiego nad wieloma problemami, których rozwiązanie miało doprowadzić do uzyskania końcowego produktu – modelu geoidy o dokładności większej od 1 cm.

Przeprowadzono kompleksowe, o szerokim zakresie zagadnień prace, wśród których należy wyróżnić:

- analizę jakości materiału obserwacyjnego, użytego do konstrukcji modelu,

- zbudowanie kilku modeli geoidy Polski, opartych na materiałach archiwalnych,
- zastosowanie różnych algorytmów obliczeniowych,
- przeprowadzenie kampanii pomiarowej GPS na trawersie niwelacyjnym o długości ok. 800 km z analizą uzyskanych wyników.

Uogólniając prace podsumowujące, można stwierdzić, że uzyskany model geoidy Polski „Geoida 2005” pozwala na uzyskanie undulacji geoidy z dokładnością 1–2 cm. Geoidę tę można nazwać niwelacyjną, ponieważ uzyskane dokładności odnoszą się do relacji względem sieci niwelacji precyzyjnej. Autor niniejszej pracy w celu „poprawienia” konkretnych rezultatów, jakimi są wysokości normalne, podjął próbę wykorzystania materiału obserwacyjnego, dotyczącego wysokości punktów sieci niwelacji precyzyjnej.



Rys. 1. Model geoidy obszaru Polski

Fig.1. Geoid model on Poland

## ZAŁOŻENIA KONSTRUKCYJNE

Sieć punktów niwelacji precyzyjnej charakteryzuje się wysoką dokładnością ich wysokości normalnych oraz stosunkowo dużą liczbą punktów, gwarantującą „dobre” pokrycie terenu. Jest ona jednak niezależna od innych układów – można ją nazwać siecią jednowymiarową. Ze względu na niedokładnie określone (przybliżone) współrzędne geodezyjne, a w szczególności brak wysokości elipsoidalnych, nie mogła posłużyć do budowania modelu geoidy niwelacyjnej.

Konstruując model quasi-geoidy, należy wykorzystać wszystkie dostępne informacje – nie tylko te, które w sposób bezpośredni pozwalają budować model. Ogromnym zbiorem danych są wysokości normalne reperów niwelacji precyzyjnej. Ich zaletami są: wysoka dokładność oraz jednorodność dokładności sieci.

Zakładając, że:

- punkty sieci POLREF, pokrywające w miarę równomiernie obszar kraju, posiadają wystarczająco dokładnie (w granicach  $\pm 1,5$  cm) określone wysokości elipsoidalne;
- punkty sieci POLREF mają dokładnie określone wysokości normalne, podobnie jak wysokości elipsoidalne ( $\pm 1,5$  cm);
- punkty sieci wysokościowej (repery) niwelacji precyzyjnej posiadają wysokości normalne, określone z dokładnością przewyższającą dokładność określenia wysokości normalnych punktów sieci POLREF;
- przebieg powierzchni geoidy w badanych obszarach jest na tyle „gładki”, że pozwala na dokładną (milimetrową) matematyczną transformację wysokości normalnych do wysokości elipsoidalnych;

można przystąpić do poprawiania istniejącego modelu geoidy niwelacyjnej (model 2002).

Wyżej wymienione założenia, postawione przed przeprowadzanymi obliczeniami, doprowadzają do mylnych wniosków:

- Wątpliwości może budzić ocena dokładności wyznaczenia wysokości elipsoidalnych punktów sieci POLREF. Nie można bezkrytycznie zakładać bezbłędności wysokości elipsoidalnych punktów nawiazania, jak również obliczenia wysokości elipsoidalnych w wyrównaniu sieci POLREF. Wiadomo, że określenie wysokości jest słabą stroną technologii GPS. Dokładność ta zależy od wielu czynników oddziałujących na system, np. aktywności Słońca czy pory roku, w której wykonano pomiary. O ile zadowalające geodetów są dokładności wyznaczenia współrzędnych poziomych  $B$  i  $L$ , o tyle dokładności wyznaczenia wysokości elipsoidalnych są niezadowalające.
- Niwelacja precyzyjna daje dokładności względne przewyższające wielokrotnie dokładności wyznaczeń satelitarnych GPS. Punkty POLREF posiadają również wysokości normalne, określone poprzez niwelację.
- Przyjęcie wysokości normalnych punktów POLREF za bezbłędne może również doprowadzić do mylnych wniosków.

## METODYKA OBLICZEŃ

Dane liczbowe, czyli wysokości reperów niwelacji precyzyjnej I i II klasy poddano wstępnej weryfikacji, polegającej na wyborze reperów podlegających wyrównaniu w latach 50. (tzw. Kronsztad'60) i 80. (tzw. Kronsztad'86). Sprawdzone podobieństwo sieci „Kronsztad 60” z siecią „Kronsztad 86”. Punkty odstające wyłączono z dalszego opracowania. Liczbowo punkty te stanowiły ok. 2% wszystkich reperów, przy założonej dokładności wpasowania  $\pm 3$  mm.

Następnym krokiem był wybór punktów POLREF jako punktów łącznych obejmujących i leżących w obszarze transformacji. Ze względu na wielkość obszaru poddanego eksperymentowi przyjęto w obliczeniach transformację wysokości normalnych do elipsoidalnych wielomianem stopnia drugiego. W ten sposób uzyskano wysokości elipsoidalne wszystkich z danego obszaru reperów niwelacji precyzyjnej. W rozważanym

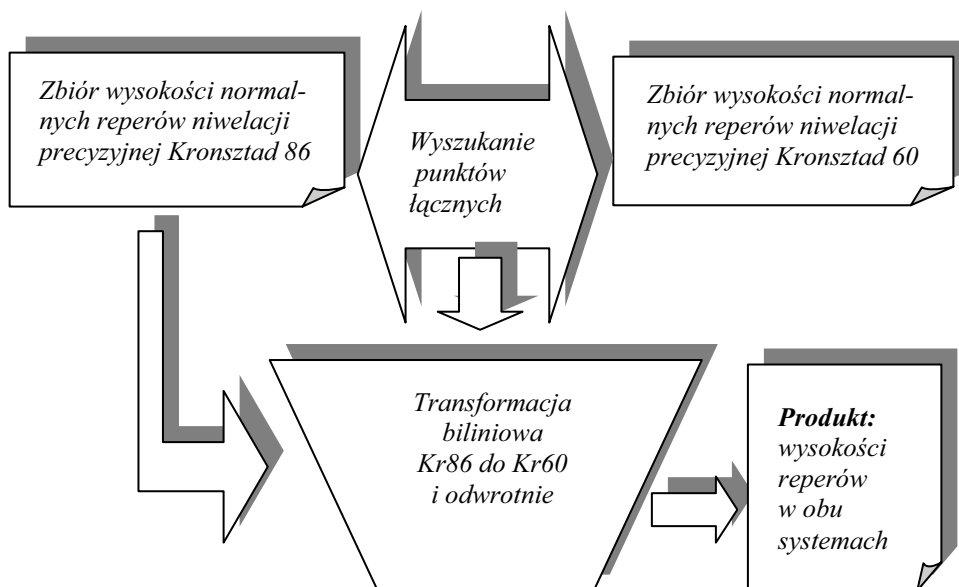
przypadku uzyskano wpasowanie 2 stopnia wysokości normalnych punktów POLREF w wysokości elipsoidalne z dokładnością mniejszą niż 1 cm.

Następnie wygenerowano dane, niezbędne do poprawienia danego modelu geoidy. Wyznaczono odstęp  $N$  w dostępnym modelu geoidy (Kadaż – 2001 – ETRF89, zwanym dalej „geoida 2002”) w węzłach siatki co 30". Dla wygody obliczeń przyjęto wirtualne wysokości normalne w węzłach siatki równe  $100.00 \text{ m} - N$ .

Przyjmując założenie, że punkty POLREF posiadają „pewne” z dokładnością  $\pm 1,5 \text{ cm}$  wysokości elipsoidalne, wykonano transformację 2 stopnia od wysokości normalnych reperów wraz ze wszystkimi wirtualnymi wysokościami punktów-węzłów siatki modelu geoidy danego obszaru do wysokości elipsoidalnych. Po wpasowaniu dokonano tzw. „korekty Hausbrandta”, zakładając, że wysokości elipsoidalne punktów POLREF nie mogą ulec zmianie.

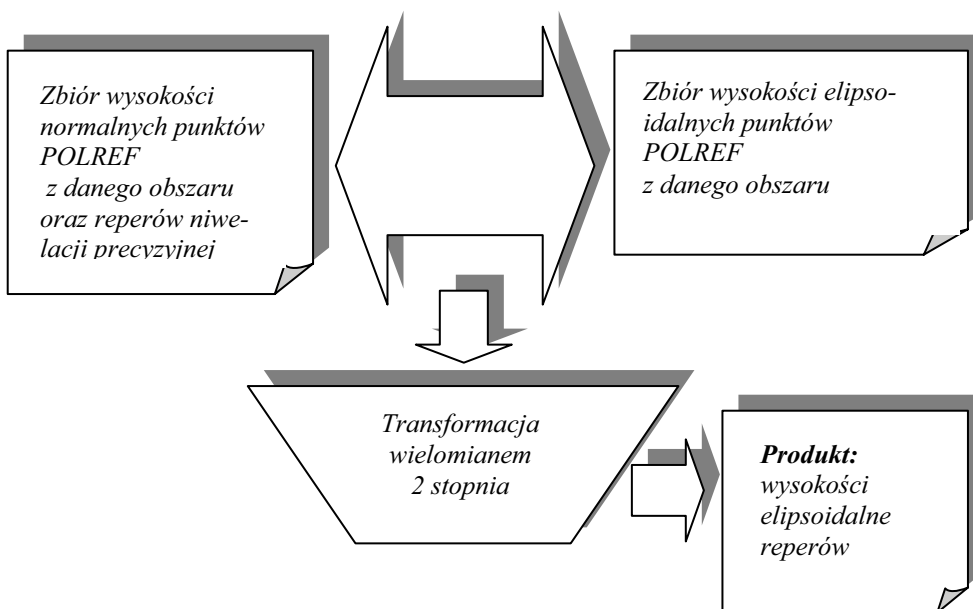
Dla kontroli obliczeń wykonano odwrotną procedurę obliczeniową, tym razem zakładając, że w korekcie Hausbrandta nie ulegną zmianie wysokości normalne reperów.

Obliczenia te można przedstawić za pomocą schematów (rys. 2, 3, 4).

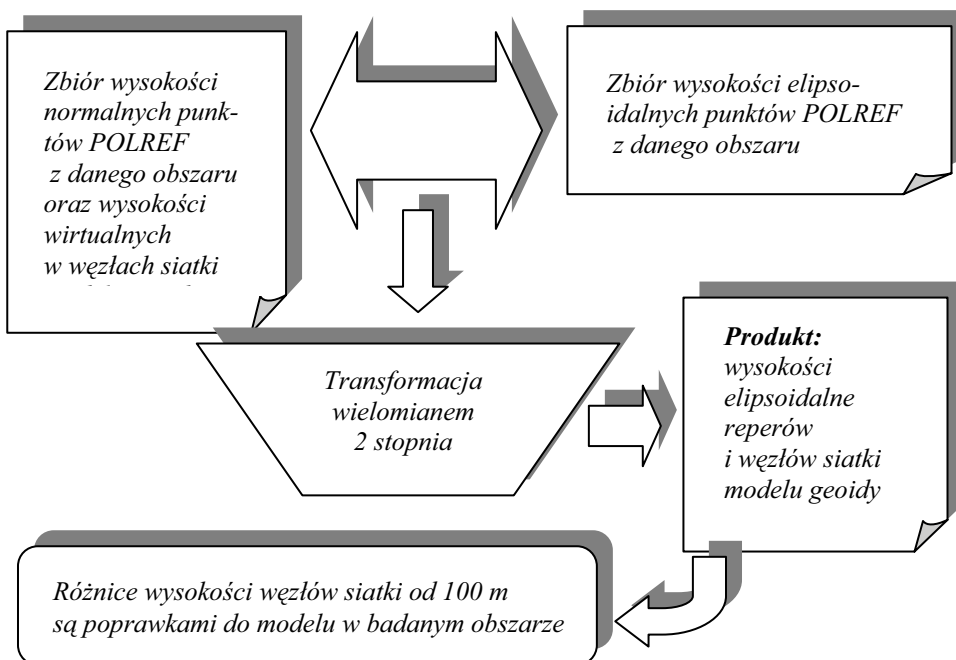


Rys. 2. Schemat transformacji między układami wysokościowymi

Fig. 2. Scheme of transformation between high normal systems



Rys. 3. Schemat transformacji między wysokościami normalnymi a elipsoidalnymi  
 Fig.3. Scheme transformation between normal and ellipsoidal height



Rys. 4. Schemat obliczenia poprawek do modelu geoidy  
 Fig. 4. Scheme calculation correction for the geoid model

## WERYFIKACJA ZAŁOŻEŃ TEORETYCZNYCH

Zweryfikowanie słuszności przyjętych założeń i przyjętych algorytmów obliczeniowych najlepiej oprzeć o konkretne pomiary w terenie i wyniki obliczeń. W niniejszej pracy analizie poddano dostępny materiał archiwalny (wysokości i współrzędne reperów) z terenu powiatu Olsztyn oraz wyniki prowadzonych w tych rejonach pomiarów GPS.

W celu wykonania analizy odstępów geoidy od elipsoidy GRS'80 dla modelu 2002 posłużono się zbiorem punktów, tworzących siatkę o rozdzielczości  $dB = dL = 30''$ . Zasięg siatki obejmuje obszar miasta Olsztyna – czyli obszar o wymiarach ok. 10 x 10 km. Granicę zachodnią i wschodnią wyznaczają odpowiednio południki  $L = 20^{\circ}22'00''$  oraz  $L = 20^{\circ}34'00''$ , granicę południową wyznacza równoleżnik  $B = 53^{\circ}43'00''$ , północną równoleżnik  $B = 53^{\circ}48'00''$ . Liczba punktów w tak przyjętym obszarze wyniosła 275. Określono współrzędne elipsoidalne  $B$  i  $L$  węzłów siatki, na podstawie których zostały obliczone odstępki quasi-geoidy od elipsoidy GRS'80 dla modelu „Geoidy niwelacyjnej 2002”. Odstępki quasi-geoidy od elipsoidy obliczono, korzystając z programu *geoida.exe* należącego do pakietu *Geonet Unitrans*.

Punktów łącznych niezbędnych do przeprowadzenia transformacji od wysokości normalnych do elipsoidalnych znaleziono wokół Olsztyna aż 12 – były to punkty POLREF oraz punkty I klasy. Przeprowadzono transformację 2 stopnia wysokości normalnych do elipsoidalnych. Otrzymano następujące odchyłki na punktach łącznych:

- POLREF 4601 Butryny 0.0044 m
- POLREF 4602 Durąg -0.0017 m
- POLREF 4603 Rozdroże -0.0022 m
- POLREF 4703 Rańsk 0.0012 m
- POLREF 5604 Łaniewo 0.0035 m
- POLREF 5605 Lekławki -0.0020 m
- EUREF 0302 Lamkówko -0.0019 m
- Punkt I klasy 13 Redykajny -0.0036 m
- Punkt I klasy 15 Olsztyn – kościół SJ -0.0031 m
- Punkt I klasy 16 Klebark Mały -0.0077 m
- Punkt I klasy 17 Unieszewo -0.0004 m
- Punkt I klasy 18 Białe Błota 0.0059 m
- Punkt I klasy 19 Tomaszkowo 0.0074 m

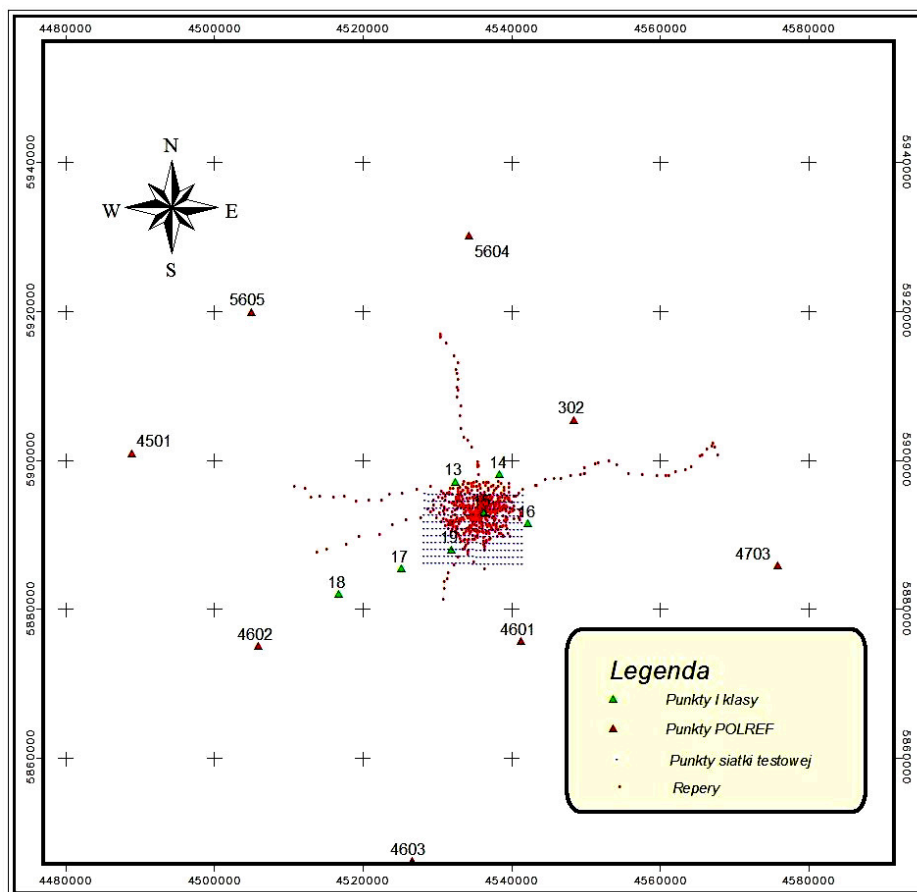
Średniokwadratowa odchyłka:

$$dH_s = 0.0041,$$

ilość elementów nadwymiarowych  $lu = 6,$

błąd średni jednostkowy  $mo = 0.0056.$

Rozmieszczenie punktów łącznych do transformacji przedstawiono na rys. 5. Są to punkty: klasy zerowej nr 0302 w Lamkówku oraz wszystkie punkty POLREF, znajdujące się w okolicach powiatu olsztyńskiego (6). Przyjęto także punkty I klasy, położone wokół miasta Olsztyna (5).



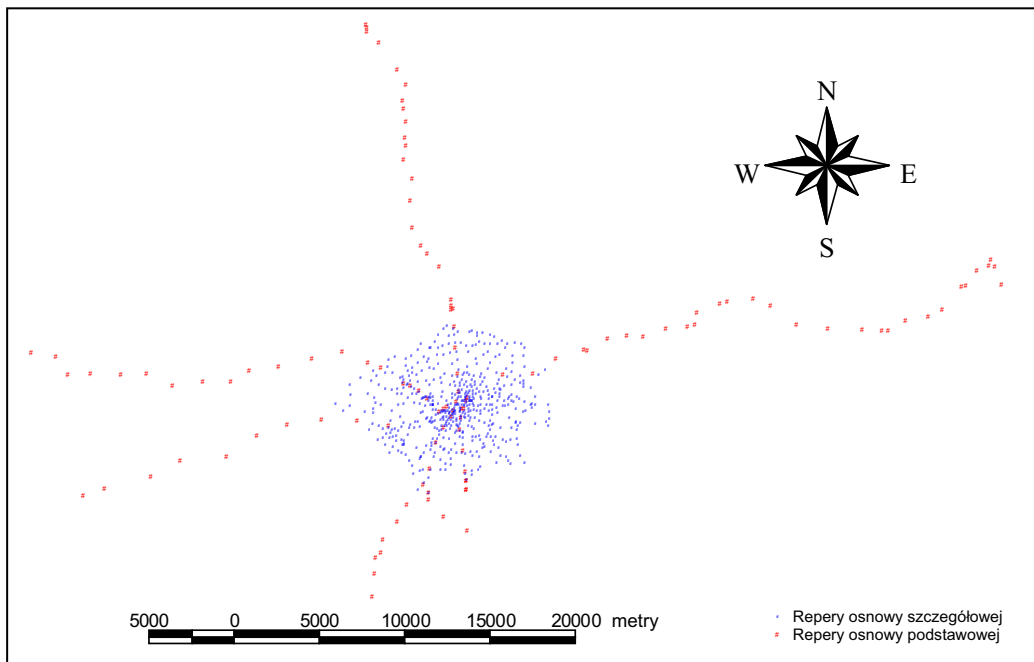
Rys. 5. Szkic rozmieszczenia punktów łącznych w transformacji wysokości normalnych do wysokości elipsoidalnych

Fig. 5. Sketch of common points from transformation normal heights to ellipsoidal heights

Na rys. 6 pokazano również linie niwelacyjne I i II klasy, zbiegające się w Olsztynie oraz wszystkie repery, położone w granicach administracyjnych miasta Olsztyna (ok. 600). Widoczna jest także regularna sieć punktów testowych, służących poprawieniu dostępnego modelu geoidy.

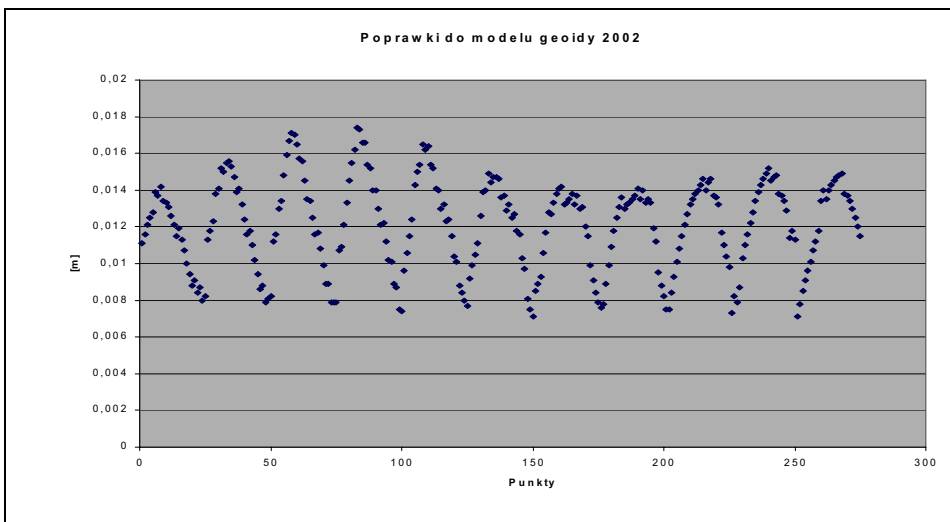
Czynnością, którą wykonano w celu sprawdzenia poprawności zapisu wysokości normalnych reperów, było wykonanie transformacji od układu Kronsztad 60 do układu wysokości Kronsztad 86. Znalaziono ponad 60 reperów, posiadających wysokości określone w obu układach. Posłużyły one do przeprowadzenia transformacji biliniowej między tymi układami.

Repery niwelacji precyzyjnej I i II klasy, użyte w procesie transformacji od układu Kronsztad 86 do układu Kronsztad 60, zaznaczono na poniższym rysunku kolorem czerwonym.



Rys. 6. Repery niwelacji precyzyjnej wokół Olsztyna i wszystkie repery w Olsztynie  
 Fig. 6. Bench-marks of technical and precise leveling around city Olsztyn)

Posługując się schematem obliczeń, przedstawionym na rys. 4, obliczono poprawki do odstępów  $N$  dla węzłów siatki testowej, pokazanej na rys. 5. Wyniki przedstawiono na rys. 7.



Rys. 7. Poprawki na punktach sieci testowej do modelu geoidy 2002 w obszarze miasta Olsztyna  
 Rys. 7. Corrections of the test point of the geoid model from city Olsztyn



## WNIOSKI

- Na podstawie przeprowadzonych analiz można sformułować następujące wnioski:
- transformacja liniowa i biliniowa jest odpowiednia tylko dla małych obszarów. Dla terenów o większej powierzchni należy stosować transformację kwadratową. Problem zasięgu transformacji wysokości 2 stopnia wymaga głębszej analizy;
  - przy stosowaniu każdego z modeli geoidy wymagane jest korzystanie z dokładnie wyznaczonych wysokości elipsoidalnych;
  - poprawianie modelu geoidy na niewielkich obszarach jest możliwe, ale konieczne jest wykonanie kampanii pomiarowych GPS, kontrolujących uzyskane wyniki.

## PIŚMIENNICTWO

- Kadaj R., 2001. Raport z pracy badawczej. Warszawa.  
Kryński J., 2005. Ku centymetrowej geoidzie w Polsce. *Geodeta* nr 12 (127).  
Lamparski J., 2001. *Navstar GPS od teorii do praktyki*. Wydawnictwo UWM. Olsztyn.  
Pażus R., Osada E., Olejnik S., 2002. Geoida niwelacyjna 2001. *Geodeta* nr 5.  
Praca zbiorowa. 1993. *Niwelacja precyzyjna. Niwelacja geometryczna, trygonometryczna, satelitarna i hydroniwelacja*. Wydanie II zmienione i uzupełnione, PPWK, Warszawa – Wrocław.  
Śledziński J., 2005. Niwelacja GPS. *Nawi* nr 4 (6).

## SUB-CENTIMETER GEOID OF OLSZTYN AND ADJACENT AREAS

**Summary.** Currently available model of the geoid on Poland's territory enable to compute normal heights on the basis of accurate ellipsoidal heights, with an average accuracy of the  $\pm 2$  cm. Only some chosen parts of Poland have been verified to now.

In this paper, a method of correcting of the model for a small region (about city Olsztyn) to sub-centimeter accuracy is given. Additional – but important product – effect of the method are accurate ellipsoidal heights of all the bench-marks located at the region of interest. However the corrected model of geoid is virtual, but it given correct results for the precise leveling network points. The limit of the methods is small size of the region where the model is suitable – in the exemple it is area of about 30 x 40 km.

**Key words:** geodety, satellite geodety, GPS

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 31.03.2008

Do cytowania – For citation: Lamparski J., 2008. Geoida milimetrowa miasta i okolic Olsztyna. *Acta Sci. Pol. Geod. Descr. Terr.* 7(1), 47-55.