

WPLYW WYBORU MODELU WYZNACZANIA PARAMETRÓW TRANSFORMACJI HELMERTA NA WYNIKI TRANSFORMACJI*

Józef Beluch

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Streszczenie. Parametry transformacji, w praktyce, wyznacza się z pominięciem wag współrzędnych punktów dostosowania. Postępowanie takie skłoniło autora do określenia wpływu pominięcia wag, w procedurze obliczeniowej, na wyniki wyznaczenia parametrów transformacji, a następnie na wyniki transformacji współrzędnych. Obliczenia porównawcze wykonano dla dwóch modeli funkcjonalnych wyznaczenia parametrów transformacji podanych w formie warunków: (6) i (12).

Rozważania prowadzono w oparciu o przykład liczbowy transformacji współrzędnych. Warianty obliczeń wykonano dla różnych założeń wartości średnich błędów współrzędnych, a stąd i wag współrzędnych (pseudoobserwacji). Między innymi stwierdzono, że wybór modelu funkcjonalnego nie ma wpływu na wyniki obliczeń, gdy macierze wag współrzędnych wtórnych w obu modelach będą jednakowe, a wagi współrzędnych pierwotnych w wydzielonych zbiorach punktów dostosowania spełnią warunek $P_{w_i} = k P_{W_i}$ gdzie: P_{w_i} – jednakowe wagi w zbiorze w_i współrzędnych pierwotnych, P_{W_i} – wagi tych samych współrzędnych w zbiorze wtórnym, k – współczynnik proporcjonalności, jednakowy dla wszystkich relacji między zbiorami.

Istotne zmiany w wynikach obliczeń pomiędzy obu modelami wystąpiły, gdy wyżej podana relacja wag pomiędzy zbiorami nie zachodzi, a średnie błędy współrzędnych pierwotnych są większe od średnich błędów współrzędnych wtórnych. W przypadku odwrotnym wpływ zróżnicowania średnich błędów na wyniki obliczeń jest bardzo nieznaczny. Zróżnicowanie wag w wariantach obliczeniowych w stosunku do wariantu 1, w którym wagi wszystkich współrzędnych są jednakowe, powoduje istotne zmiany w wynikach obliczeń zarówno w pierwszym, jak i drugim modelu funkcjonalnym.

Słowa kluczowe: transformacja Helmerta, modele funkcjonalne transformacji, transformacja z wagami

* Badania statutowe nr 11.11.150.478/07.

WPROWADZENIE

Transformacja współrzędnych należy do powszechnie stosowanych operacji obliczeniowych w geodezji. W praktyce stosowane są różne wzory transformacyjne, uwzględniające warunki optymalnego przeliczenia (dopasowania) współrzędnych punktów z układu pierwotnego x, y do układu wtórnego X, Y . W powszechnym zastosowaniu istnieją wzory transformacji czteroparametrowej Helmerta dla układów współrzędnych na płaszczyźnie. Parametry te, tj. dwa parametry translacji (c, d) oraz dwa parametry (a, b) związane funkcyjnie z rotacją o kąt φ i współczynnikiem skali s , wyznaczone są z układów równań, najczęściej równań poprawek wynikających ze wzorów na transformację, z uwzględnieniem warunku identyczności współrzędnych przed i po transformacji, w granicach dopuszczalnych wartości poprawek w punktach dostosowania. Równania poprawek, w praktyce, rozwiązywane są metodą pośredniczącą bez uwzględnienia wag, czyli przy założeniu jednakowych błędów współrzędnych punktów w obu układach. Często założenie takie odbiega od rzeczywistości.

Ścisłe podejście do problemu wyznaczenia parametrów transformacji zaprezentował Osada w swoim podręczniku [1998]. Parametry wyznaczał z układu równań warunkowych z niewiadomymi, rozpisanych na podstawie wzorów transformacyjnych. Układ ten rozwiązuje z uwzględnieniem wag współrzędnych punktów dostosowania układu pierwotnego i wtórnego.

W niniejszym opracowaniu przedstawione zostaną rezultaty badań związanych z wpływem wyboru modelu funkcjonalnego i stochastycznego na wyznaczone parametry transformacji i wyniki transformacji współrzędnych.

WYZNACZENIE PARAMETRÓW TRANSFORMACJI Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ BŁĘDÓW

Do transformacji współrzędnych sposobem Helmerta stosowane są wzory:

$$\begin{aligned} X_i &= c + bx_i - ay_i \\ Y_i &= d + ax_i + by_i \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

x_i, y – współrzędne układu pierwotnego,
 X_i, Y_i – współrzędne układu wtórnego,
 c, d – parametry translacji,
 a, b – parametry zależne od skali podobieństwa s i rotacji osi układu współrzędnych pierwotnych w stosunku do osi układu współrzędnych wtórnych, przy czym:

$$\begin{aligned} a &= s \sin\varphi \\ b &= s \cos\varphi \end{aligned} \quad (2)$$

stąd:

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3)$$

$$\varphi = \arctg \frac{a}{b} \quad (4)$$

Najprawdopodobniejsze wartości parametrów rozpatrywanej transformacji mogą być wyznaczone, gdy spełniona będzie nierówność:

$$2n > 4 \tag{5}$$

gdzie:

n – liczba punktów dostosowania.

Dla współrzędnych każdego punktu dostosowania napiszemy wówczas dwa warunki:

$$\begin{aligned} \bar{X}_i + v_{\bar{X}_i} &= \bar{X}_i^t \\ \bar{Y}_i + v_{\bar{Y}_i} &= \bar{Y}_i^t \end{aligned} \tag{6}$$

w których współrzędne \bar{X}_i^t, \bar{Y}_i^t liczone są wzorami (1) na podstawie danych współrzędnych pierwotnych \bar{x}_i, \bar{y}_i . Kreski nad współrzędnymi oznaczają, że są to współrzędne punktów dostosowania.

Z warunków (6), po uwzględnieniu wzorów (1), dochodzimy do równań błędów:

$$V = AX - \bar{W}_w \tag{7}$$

gdzie:

$$V = \begin{bmatrix} v_{\bar{X}_1} \\ v_{\bar{Y}_1} \\ \vdots \\ v_{\bar{X}_n} \\ v_{\bar{Y}_n} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -\bar{y}_1 & \bar{x}_1 & 1 & 0 \\ \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\bar{y}_n & \bar{x}_n & 1 & 0 \\ \bar{x}_n & \bar{y}_n & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad \bar{W}_w = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \\ \bar{Y}_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

Pseudoobserwacjom $\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \dots, \bar{X}_n, \bar{Y}_n$ możemy przypisać macierz wariancyjno-kowariancyjną $C_{\bar{W}_w}$, wówczas:

$$P_{\bar{W}_w} = C_{\bar{W}_w}^{-1} \tag{9}$$

Najczęściej jednak dysponujemy tylko średnimi błędami współrzędnych i w tym przypadku:

$$P_{\bar{W}_w} = \text{diag} \left[m \frac{2}{X_1} \ m \frac{2}{Y_1} \ \dots \ m \frac{2}{X_n} \ m \frac{2}{Y_n} \right]^{-1} \tag{10}$$

Niewiadome $X(a, b, c, d)$ wyznaczamy z układu równań normalnych:

$$X = \left(A^T P_{\bar{W}_w} A \right)^{-1} A^T P_{\bar{W}_w} \bar{W}_w \tag{11}$$

Jak już wspomniano, prezentowany model matematyczny zadania jest dokładniejszy od modelu, w którym pomijane są wagi, ale nie jest to model ścisły, gdyż wprowadzono wagi odnoszące się tylko do współrzędnych punktów dostosowania układu wtórnego.

WYZNACZENIE PARAMETRÓW TRANSFORMACJI Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ NORMALNYCH Z NIEWIADOMYMI

Biorąc pod uwagę współrzędne punktów dostosowania i wzory (1), napiszemy dla każdego punktu dwa równania warunkowe z niewiadomymi:

$$\begin{aligned}\bar{X}_i + v_{\bar{X}_i} &= (c_0 + dc) + (b_0 + db)(\bar{x}_i + v_{\bar{x}_i}) - (a_0 + da)(\bar{y}_i + v_{\bar{y}_i}) \\ \bar{Y}_i + v_{\bar{Y}_i} &= (d_0 + dd) + (a_0 + da)(\bar{x}_i + v_{\bar{x}_i}) + (b_0 + db)(\bar{y}_i + v_{\bar{y}_i})\end{aligned}\quad (12)$$

Po przekształceniach wykonanych w równaniach (12) i pominięciu $db \cdot v_{\bar{x}_i}$, $da v_{\bar{y}_i}$, $da \cdot v_{\bar{X}_i}$, $db v_{\bar{Y}_i}$ – jako małych wartości wyrazów w stosunku do pozostałych, otrzymamy:

$$\begin{aligned}v_{\bar{X}_i} - b_0 v_{\bar{x}_i} + a_0 v_{\bar{y}_i} + \bar{y}_i da - \bar{x}_i db - dc + \bar{X}_i - (c_0 + b_0 \bar{x}_1 - a_0 \bar{y}_1) &= 0 \\ v_{\bar{Y}_i} - a_0 v_{\bar{x}_i} - b_0 v_{\bar{y}_i} - \bar{x}_i da - \bar{y}_i db - dd + \bar{Y}_i - (d_0 + a_0 \bar{x}_1 + b_0 \bar{y}_1) &= 0\end{aligned}\quad (13)$$

Układ równań (13), rozpisany dla współrzędnych wszystkich punktów dostosowania, można przedstawić w następującej formie macierzowej:

$$E V_{\bar{W}_w} + B_p V_{\bar{W}_p} + A X + L = 0 \quad (14)$$

gdzie:

E – macierz jednostkowa,

$$B_p = \begin{bmatrix} -b_0 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_0 & -b_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & -b_0 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & -a_0 & -b_0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 - \bar{x}_1 - 1 & 0 \\ -\bar{x}_1 - \bar{y}_1 & 0 - 1 \\ \dots & \dots \\ \bar{y}_n - \bar{x}_n - 1 & 0 \\ -\bar{x}_n - \bar{y}_n & 0 - 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 - (c_0 + b_0 \bar{x}_1 - a_0 \bar{y}_1) \\ \bar{Y}_1 - (d_0 + a_0 \bar{x}_1 + b_0 \bar{y}_1) \\ \dots \\ \bar{X}_n - (c_0 + b_0 \bar{x}_n - a_0 \bar{y}_n) \\ \bar{Y}_n - (d_0 + a_0 \bar{x}_n + b_0 \bar{y}_n) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$V_{\bar{W}_w} = [v_{\bar{X}_i} \ v_{\bar{Y}_i} \ \cdots \ v_{\bar{X}_n} \ v_{\bar{Y}_n}]^T \quad (16)$$

$$V_{\bar{W}_p} = [v_{\bar{x}_i} \ v_{\bar{y}_i} \ \cdots \ v_{\bar{x}_n} \ v_{\bar{y}_n}]^T \quad (17)$$

$$X = [da \ db \ dc \ dd]^T \quad (18)$$

W wyniku rozwiązania układu (14) z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów otrzymamy:

$$X = - \left[A^T \left(P_{\bar{W}_w}^{-1} + B_p P_{\bar{W}_p}^{-1} B_p^T \right)^{-1} A^T \right] A^T \left(P_{\bar{W}_w}^{-1} + B_p P_{\bar{W}_p}^{-1} B_p^T \right)^{-1} L \quad (19)$$

$$K = \left(P_{\bar{W}_w}^{-1} + B_p P_{\bar{W}_p}^{-1} B_p^T \right)^{-1} (A X + L) \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} V_{\bar{W}_w} \\ V_{\bar{W}_p} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_{\bar{W}_w} & 0 \\ 0 & P_{\bar{W}_p} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E \\ B_p^T \end{bmatrix} K \quad (21)$$

gdzie:

$$\underline{P}_{\overline{W}_w} = \underline{C}_{\overline{W}_w}^{-1} \quad (22)$$

$$\underline{P}_{\overline{W}_p} = \underline{C}_{\overline{W}_p}^{-1} \quad (23)$$

$\underline{P}_{\overline{W}_w}, \underline{P}_{\overline{W}_p}$ – macierze wagowe współrzędnych punktów dostosowania $\overline{X}, \overline{Y}$ w układzie wtórnym oraz $\overline{x}, \overline{y}$ w układzie pierwotnym,

$\underline{C}_{\overline{W}_w}, \underline{C}_{\overline{W}_p}$ – macierze wariancyjno-kowariancyjne współrzędnych punktów dostosowania,

\underline{K} – wektor korelat.

WARIANTY OBLICZEŃ

Wyróżnimy dwa modele funkcjonalne:

I – z wykorzystaniem równań warunkowych z niewiadomymi,

II – z wykorzystaniem równań poprawek.

W zbiorze współrzędnych punktów dostosowania wydzielamy dwa podzbiory W_{w1} i W_{w2} w układzie wtórnym i dwa podzbiory W_{p1} i W_{p2} w układzie pierwotnym.

Zróznicowanie średnich błędów pomiędzy podzbiorami wyrazimy wielokrotnością n modułu średniego błędu m , czyli:

$$m_{\overline{W}} = n|m| \quad (24)$$

Warianty obliczeń zostały wykonane dla różnych układów średnich błędów współrzędnych punktów dostosowania zestawionych w tab. 1.

Tabela 1. Średnie błędy współrzędnych punktów dostosowania w wariantach obliczeń
Table 1. The mean square errors of coordinates of common points in the different variants of calculations

Lp. No.	Model funkcjonalny Functional model	Wariant Variants	Średnie błędy współrzędnych punktów dostosowania w układach: The mean square errors of coordinates of common points in the:			
			wtórnym secondary system		pierwotnym primary system	
			m_{W1}	m_{W2}	m_{w1}	m_{w2}
1	2	3	4	5	6	7
1	I	1	m	m	m	m
2		2/A	2 m	2 m	m	m
3		2/B	m	2 m	0,5 m	m
4		2/C	2 m	m	m	0,5 m
5		2/D	m	3 m	0,33 m	m
6		2/E	3 m	m	m	0,33 m
7		3/A	m	m	2 m	2 m
8		3/B	0,5 m	m	m	2 m
9		3/C	m	0,5 m	2 m	m
10		3/D	0,33 m	m	m	3 m
11		3/E	m	0,33 m	3 m	m
12		2/B/1	m	2 m	0,33 m	0,5 m
13		2/C/1	2 m	m	0,5 m	0,33 m
14		2/D/1	m	3 m	2 m	4 m
15		2/E/1	3 m	m	4 m	2 m

Tabela 1 cd.
Table 1 cont.

1	2	3	4	5	6	7
16	II	4	m	m	–	–
17		4/B	m	2 m	–	–
18		4/C	2 m	m	–	–
19		4/D	m	3 m	–	–
20		4/E	3 m	m	–	–
21		5/B	0,5 m	m	–	–
22		5/C	m	0,5 m	–	–
23		5/D	0,33 m	m	–	–
24		5/E	m	0,33 m	–	–

Wiadomo, że na wynik obliczenia niewiadomych X oraz poprawek $V_{\bar{w}}$ i V_w^- nie ma wpływu wartość średnich błędów, tylko wielokrotność modułu błędów w poszczególnych podzbiorach. Stąd w przykładzie liczbowym nie operowano konkretnymi wartościami średnich błędów, tylko wielokrotnościami.

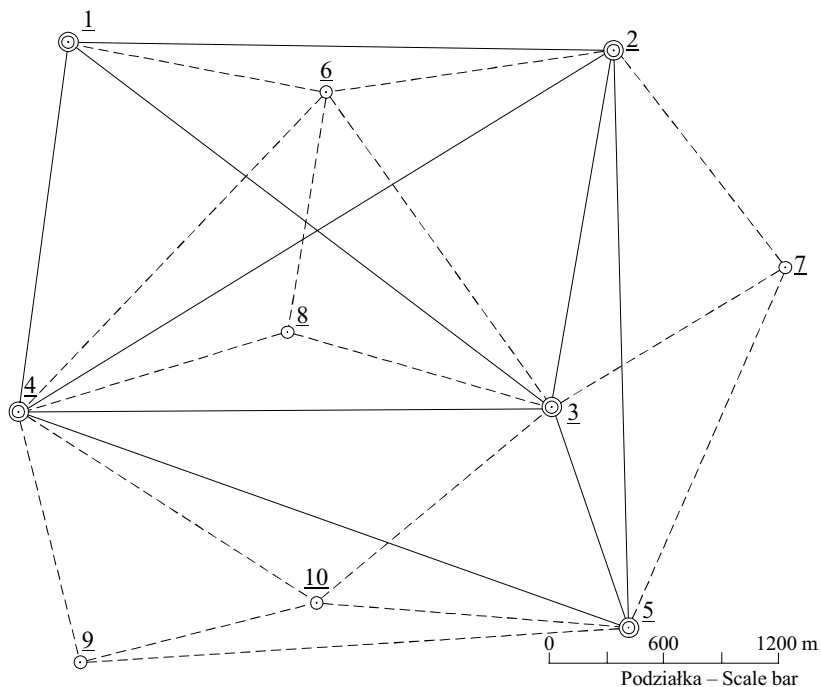
PRZYKŁAD LICZBOWY

W przykładzie liczbowym ograniczono się do określenia wpływu wagowania na parametry i wyniki transformacji. Pominięty zostanie problem oceny dokładności, gdyż wiązałby się on z zagadnieniem optymalnego doboru wag w konkretnym przykładzie liczbowym, a to wykracza poza zakres przyjętych tu rozważań.

W tab. 2 zestawiono współrzędne punktów w dwu układach. W rozpatrywanym przykładzie transformacja obejmuje współrzędne 10 punktów, w tym 5 punktów dostosowania rozmieszczonych w sieci przedstawionej na rys. 1. W obrębie punktów dostosowania: podzbiory W_1 i w_1 stanowią punkty 1, 2, natomiast podzbiory W_2 i w_2 stanowią punkty 3, 4, 5, z wyjątkiem wariantów 12÷15, w których $W_1 = \{1,2\}$, $W_2 = \{3,4,5\}$, $w_1 = \{1,2,3\}$, $w_2 = \{4,5\}$.

Tabela 2. Wykaz współrzędnych punktów w układzie pierwotnym i wtórnym
Table 2. List of coordinates of points in the primary and secondary system

Nr punktów Number of points	Współrzędne w układzie: Coordinates in the:			
	pierwotnym primary system		wtórnym secondary system	
1	2	3	4	5
	\bar{x}_i	\bar{y}_i	\bar{X}_i	\bar{Y}_i
1	18 836,47	18 834,09	4 358,45	2 306,88
2	18 803,34	21 650,43	4 110,02	5 112,42
3	16 936,95	21 326,25	2 273,88	4 646,48
4	16 905,60	18 570,03	2 453,46	1 895,95
5	15 803,06	21 714,48	1 113,69	4 946,80
	x_i	y_i		
6	18 580,90	20 153,69		
7	17 647,77	22 532,14		
8	17 336,00	19 949,95		
9	15 610,18	18 874,77		
10	15 942,73	20 095,94		



⊙ – punkty dostosowania – common points

○ – punkty o współrzędnych w układzie pierwotnym – points with coordinates in the primary system

Rys. 1. Szkic sieci punktów

Fig. 1. Network diagram

WYNIKI OBLICZEŃ

Wartości parametrów transformacji wyznaczonych dla założeń podanych w lp. 1 tab. 1 wynoszą:

$$a = 0,076\ 4807$$

$$b = 0,997\ 0580$$

$$c = -12\ 982,162$$

$$d = -17\ 912,408$$

W tab. 3 zestawimy różnice pomiędzy podstawowym wariantem 1 i pozostałymi wariantami, a także wybrane inne różnice istotne dla wprowadzenia wniosków. Należy przy tym zwrócić uwagę, że dla transformowanych współrzędnych układu pierwotnego, danych w tab. 2, uznano za istotne różnice parametrów δa i δb rzędu 10^{-7} .

Tabela 3. Różnice wartości parametrów transformacji między wariantami
 Table 3. Differences of values of transformation parameters between the variants

Lp. No.	Oznac. różnic Denotation of differences	Różnice parametrów transformacji między wariantami Differences of transformation parameters among the variants					
		3	4	5	6	7	8
1	2	1-2/A	1-2/B	1-2/C	1-2/D	1-2/E	
2		1-3/A	1-3/B	1-3/C	1-3/D	1-3/E	
3		1-4	1-4/B	1-4/C	1-4/D	1-4/E	
4			1-5/B	1-5/C	1-5/D	1-5/E	
5	δa	0	$8,3 \cdot 10^{-7}$	$-25,8 \cdot 10^{-7}$	$5,5 \cdot 10^{-7}$	$-40,4 \cdot 10^{-7}$	
6	δb	0	$-27,6 \cdot 10^{-7}$	$29,9 \cdot 10^{-7}$	$-42,1 \cdot 10^{-7}$	$43,9 \cdot 10^{-7}$	
7	δc [mm]	0	65,9	-102,5	87,6	-155,1	
8	δd [mm]	0	46,2	-21,7	82,5	-27,9	
9		2/B-2/C	2/D-2/E	3/B-3/C	3/D-3/E	4/B-4/C	4/D-4/E
10	δa	$-34,1 \cdot 10^{-7}$	$-45,9 \cdot 10^{-7}$	$-34,1 \cdot 10^{-7}$	$-45,9 \cdot 10^{-7}$	$-34,1 \cdot 10^{-7}$	$-45,9 \cdot 10^{-7}$
11	δb	$57,4 \cdot 10^{-7}$	$86,0 \cdot 10^{-7}$	$57,4 \cdot 10^{-7}$	$86,0 \cdot 10^{-7}$	$57,4 \cdot 10^{-7}$	$86,0 \cdot 10^{-7}$
12	δc [mm]	-168,4	-242,9	-168,4	-242,9	-168,4	-242,9
13	δd [mm]	-68,0	-110,4	-68,0	-110,4	-68,0	-110,4
14		4-4/B	4-4/C	4-4/D	4-4/E		
15	δa	$8,3 \cdot 10^{-7}$	$-25,8 \cdot 10^{-7}$	$5,5 \cdot 10^{-7}$	$-40,4 \cdot 10^{-7}$		
16	δb	$-27,6 \cdot 10^{-7}$	$29,9 \cdot 10^{-7}$	$-42,1 \cdot 10^{-7}$	$43,9 \cdot 10^{-7}$		
17	δc [mm]	65,9	-102,5	87,5	155,2		
18	δd [mm]	46,2	-21,7	82,5	27,9		
19		1-4	2/A-4	2/B-4/B	2/C-4/C	2/D-4/D	2/E-4/E
20	δa	0	0	0	0	0	0
21	δb	0	0	0	0	0	0
22	δc [mm]	0	0	0	0	0	0
23	δd [mm]	0	0	0	0	0	0
24		3/A-4	3/B-5/B	3/C-5/C	3/D-5/D	3/E-5/E	
25	δa	0	0	0	0	0	
26	δb	0	0	0	0	0	
27	δc [mm]	0	0	0	0	0	
28	δd [mm]	0	0	0	0	0	
29		2/B/1-4/B	2/C/1-4/C	2/D/1-4/D	2/E/1-4/E		
30	δa	$-0,1 \cdot 10^{-7}$	$-4,0 \cdot 10^{-7}$	$-4,5 \cdot 10^{-7}$	$-38,4 \cdot 10^{-7}$		
31	δb	$-0,1 \cdot 10^{-7}$	$-1,5 \cdot 10^{-7}$	$5,0 \cdot 10^{-7}$	$-9,4 \cdot 10^{-7}$		
32	δc [mm]	0	4,4	-19,8	-54,0		
33	δd [mm]	0,7	8,8	1,1	74,9		

Wyniki transformacji współrzędnych dla założeń wariantu 1 zestawiono w tab. 4.

Tabela 4. Wyniki transformacji dla założeń z pierwszego wariantu
 Table 4. Results of transformation under assumptions of the first variant

Oznac. współrz. Denotation of coordinates	Współrzędne punktów Coordinates of points									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X'_i [m]	4358,447	4110,018	2273,913	2453,453	1113,667	4002,705	2890,414	2777,049	1138,537	1376,713
Y'_i [m]	2306,898	5112,419	4646,450	1895,941	4946,817	3603,070	5903,156	3304,719	2100,710	3343,721

W tab. 5 zestawiono przedziały bezwzględnych wartości różnic współrzędnych przetransformowanych pomiędzy różnymi wariantami obliczeń.

Tabela 5. Przedziały bezwzględnych wartości różnic współrzędnych po transformacji pomiędzy wariantami obliczeń

Table 5. Intervals of the absolute values of coordinate differences after transformation between the variants of calculation

Lp. No.	Przedziały bezwzględnych wartości różnic współrzędnych po transformacji pomiędzy wariantami obliczeń [mm]					
No.	Intervals of the absolute values of coordinate differences after transformation, between the variants of calculation [mm]					
1	2	3	4	5	6	7
1	1-2/A	1-2/B	1-2/C	1-2/D	1-2/E	
2	1-3/A	1-3/B	1-3/C	1-3/D	1-3/E	
3	1-4	1-4/B	1-4/C	1-4/D	1-4/E	
4		1-5/B	1-5/C	1-5/D	1-5/E	
5	0	0,6 ÷ 9,8	0 ÷ 14,2	0,2 ÷ 13,7	0,3 ÷ 21,3	
6	2/B-2/C	2/D-2/E	3/B-3/C	3/D-3/E	4/B-4/C	4/D-4/E
7	0,9 ÷ 24,0	0,8 ÷ 34,9	0,9 ÷ 24,0	0,8 ÷ 34,9	0,9 ÷ 24,0	0,8 ÷ 34,9
8		4-4/B	4-4/C	4-4/D	4-4/E	
9		4-5/B	4-5/C	4-5/D	4-5/E	
10		0,6 ÷ 9,9	0 ÷ 14,2	0,2 ÷ 13,7	0,3 ÷ 21,3	
11	1-4	2/A-4	2/B-4/B	2/C-4/C	2/D-4/D	2/E-4/E
12	0	0	0	0	0	0
13	3/A-4	3/B-5/B	3/C-5/C	3/D-5/D	3/E-5/E	
14	0	0	0	0	0	
15	2/B/1-4/B	2/C/1-4/C	2/D/1-4/D	2/E/1-4/E		
16	0 ÷ 0,3	0,1 ÷ 1,8	0,5 ÷ 4,9	0,6 ÷ 17,5		

WNIOSKI

1. Z porównania danych zestawionych w tab. 3, poz. 19÷28 wynika, że wpływ wyboru modelu funkcjonalnego nie uwidacznia się w wartościach parametrów, jeśli przyjęta zostanie jednakowa macierz wag dla współrzędnych wtórnych punktów dostosowania i gdy współczynnik proporcjonalności k średnich błędów współrzędnych w podziorach $W_1 = w_1$ oraz $W_2 = w_2$ punktów dostosowania, dla modelu I, będzie jednakowy, czyli, gdy:

$$P_{w_1} = k P_{W_1} ; P_{w_2} = k P_{W_2}$$

Stąd też różnice wyników transformacji współrzędnych, w wariantach podanych w tab. 5, lp. 11÷14, są równe zeru.

2. Niewielkie zmiany parametrów a i b w przedziale $(0,1÷4,0) \cdot 10^{-7}$ oraz c i d w przedziale $(0÷8,8)$ mm wystąpiły pomiędzy wariantami obu modeli (tab. 3, lp. 29÷33, kol. 3 i 4), gdy średnie błędy współrzędnych pierwotnych są 3÷4 razy mniejsze od średnich błędów współrzędnych wtórnych punktów dostosowania (tab. 1, poz. 12 i 13). Różnice we współrzędnych przetransformowanych w obu modelach pomiędzy wariantami podanymi w tab. 5, lp. 15, kol. 2 i 3 są także niewielkie – obejmują przedział $0÷1,8$ mm (tab. 5, lp. 16, kol. 2 i 3).

3. Istotne zmiany wystąpiły w obu modelach, w wartościach parametrów a i b w przedziale $(4,5÷38,4) \cdot 10^{-7}$ oraz c i d , w przedziale $(1,1÷74,9)$ mm (tab. 3, lp. 29÷33,

kol. 5÷6), gdy średnie błędy współrzędnych pierwotnych punktów dostosowania są większe od średnich błędów współrzędnych wtórnych tych punktów. W przykładzie obliczeniowym wielokrotność zmian średnich błędów wynosiła 1,3÷2 (tab. 1, lp. 14 i 15). Różnice współrzędnych przetransformowanych pomiędzy wariantami podanymi w tab. 5, l.p. 15, kol. 4 i 5 mieszczą się w przedziale (0,5÷17,5) mm, a więc w praktyce nie powinny być zanedbywane. Należy zaznaczyć, że wnioski 2 i 3 są słuszne przy założeniu zróżnicowania współczynnika proporcjonalności wag współrzędnych pierwotnych i wtórnych w modelu I przynajmniej dla 2 podzbiorów współrzędnych obejmujących nieidentyczne punkty w obu układach.

4. Na podstawie wniosku 3 można stwierdzić, że wybór modelu może być istotny dla wyników transformacji współrzędnych, gdy występuje zróżnicowanie stosunku wag współrzędnych w podzbiórach punktów dostosowania dla układów pierwotnego i wtórnego. Szczególnie to zróżnicowanie uwidacznia się, gdy wagi współrzędnych pierwotnych są mniejsze od wag współrzędnych w układzie wtórnym.

5. Przy porównywaniu wyników obliczeń wariantu I z pozostałymi można stwierdzić, że zróżnicowanie wag współrzędnych ma wpływ na wartości parametrów transformacji (tab. 3, lp. 1÷8) i wartości przetransformowanych współrzędnych z wyjątkiem przypadków, gdy wielokrotności zmian wag są jednakowe dla wszystkich współrzędnych punktów dostosowania w obrębie zbioru wtórnego i pierwotnego (tab. 5, lp. 1÷5, kol. 2). W układzie pierwotnym wielokrotność zmiany wag może być inna w zbiorze wtórnym, ale wagi całego zbioru jednakowe. Można także zaobserwować, że jednakowe wyniki parametrów i przetransformowanych współrzędnych uzyskujemy dla porównywanych wariantów, w których wagi, w tych samych podzbiórach współrzędnych, zróżnicowane są w jednakowej proporcji, tj. $P_{\bar{w}_2}^{(q)} : P_{\bar{w}_1}^{(q)} = P_{\bar{w}_2}^{(q)} : P_{\bar{w}_1}^{(q)} = k_q$ – dla modelu I i $P_{\bar{w}_2}^{(q)} : P_{\bar{w}_1}^{(q)} = k_q$ – dla modelu II ($q = B, C, D, E$). Wniosek ten wynika

z porównania danych w kolumnach 3÷6 tab. 5 obejmujących lp. 1÷5, z uwzględnieniem błędów średnich podanych w tab. 1 dla analizowanych wariantów.

6. W prezentowanym przykładzie liczbowym zróżnicowanie wag, w stosunku do wariantu, w którym wagi wszystkich współrzędnych są jednakowe (wariant 1 i 4), powoduje maksymalną zmianę współrzędnych przetransformowanych rzędu 21,3 mm zarówno w pierwszym, jak i drugim modelu funkcjonalnym (por. lp. 5 i 10 w tab. 5).

7. Wyniki obliczeń zamieszczone w tab. 3 lp. 10÷13 oraz w tabeli 5 lp. 7 pozwalają na określenie wpływu zamiany wag w podzbiórach współrzędnych, w dwu wariantach obliczeń i oraz j , na zmianę wartości parametrów transformacji i przetransformowane współrzędne. Jeśli średnie błędy współrzędnych w podzbiórach, brane do obliczenia wag, spełniają proporcję:

$$m_{\bar{w}_1}^i : m_{\bar{w}_1}^j = m_{\bar{w}_1}^i : m_{\bar{w}_1}^j = m_{\bar{w}_2}^i : m_{\bar{w}_2}^j = m_{\bar{w}_2}^i : m_{\bar{w}_2}^j = q \text{ – dla modelu I}$$

$$\text{i } m_{\bar{w}_1}^i : m_{\bar{w}_1}^j = m_{\bar{w}_2}^i : m_{\bar{w}_2}^j = q \text{ – dla modelu II}$$

to dla $q = 2$ maksymalne różnice współrzędnych wynoszą 24 mm, natomiast dla $q = 3$ różnice w przetransformowanych współrzędnych w obu wariantach dochodzą do 34,9 mm. Wyniki te mogą także wskazywać na wpływ niedokładnego oszacowania średnich błędów współrzędnych w poszczególnych podzbiórach, na rezultaty transformacji.

8. Jeśli do transformacji współrzędnych stosujemy model II i przyjmujemy jednakowe wagi dla wszystkich punktów dostosowania, to w przypadku, gdy w rzeczywistości,

przynajmniej w jednym podzbiornie średnie błędy różnią się dwukrotnie, wtedy maksymalne różnice współrzędnych dochodzą do 14,2 mm (tab. 5, lp. 10, kol. 3.4), natomiast przy trzykrotnym zróżnicowaniu średnich błędów maksymalne różnice współrzędnych dochodzą do 21,3 mm (tab. 5, lp. 10, kol. 5.6). Wynika z tego, że przy stosowaniu w transformacji modelu II wagi współrzędnych wtórnych mają wpływ na wyniki przetworzonych współrzędnych.

PIŚMIENNICTWO

Osada E., 1998. Analiza, wyrównanie i modelowanie geo-danych. Wydawnictwo Akademii Rolniczej we Wrocławiu.

THE EFFECT OF SELECTION OF MODELS FOR DETERMINING HELMERT TRANSFORMATION PARAMETERS ON CALCULATION RESULTS

Abstract. In practice, the transformation parameters are determined without taking into consideration the weights of coordinates of common points. Such practice has encouraged the author to determine the effect of disregarding such weights in the calculation procedures on determining the transformation parameters and, further on, the results of coordinate transformations. The comparative calculations have been performed for two functional models for determining the transformation parameters, provided as conditions (6) and (12).

The study has been based on a numerical example of coordinates transformation. The calculation variants have been provided for various assumptions as regards the mean square errors of coordinates, and consequently, the coordinate (pseudo-observation) weights. It has been found that the selection of the functional model does not affect the calculation results, when the matrixes of secondary coordinate weights in both models are identical, while the primary coordinate weights in separated sets of adjustment points satisfy the condition $P_{w_i} = k P_{W_i}$ where: P_{w_i} – identical weights in w_i set of primary coordinates,

P_{W_i} – weights of the same primary coordinates in the secondary set, k – proportionality factor, identical for all relations between the sets. Considerable variations in the calculation results between both models have become apparent when the above-mentioned weight relation between sets is not present, and the mean square errors of primary coordinates are greater than those of the secondary coordinates. In the opposite case, the effects of variation of mean square errors on the calculation results are very slight. The variety of weights in calculation variants in relation to variant 1, in which weights of all coordinates are identical, leads to considerable variations in the calculation results, both in the first and second functional model.

Key words: Helmert transformation, functional models of transformation, transformation with weights

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 31.03.2008

Do cytowania – For citation: Beluch J., 2008. Wpływ wyboru modelu wyznaczania parametrów transformacji Helmerta na wyniki transformacji. *Acta Sci. Pol. Geod. Descr. Terr.* 7(1), 3-13.