

## **ZNACZENIE DANYCH GRAWIMETRYCZNYCH, NUMERYCZNEGO MODELU TERENU ORAZ GLOBALNEGO MODELU GEOPOTENCJAŁU EGM96 W ZAGADNIENIU INTERPOLACJI WYSOKOŚCI QUASI-GEOIDY NA PRZYKŁADZIE DOLNEGO ŚLĄSKA**

Marek Trojanowicz

Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

**Streszczenie.** Punkty o znanych wysokościach normalnych oraz elipsoidalnych (uzyskanych technikami satelitarnymi) pozwalają na budowę tzw. satelitarno-niwelacyjnych modeli quasi-geoidy. Dokładność takich modeli jest uzależniona od lokalnych zmian anomalii wysokości pomiędzy punktami znanymi. W pracy przedstawiono oszacowania błędów spowodowanych nieuwzględnieniem w budowie takich prostych modeli dodatkowych danych w postaci anomalii grawimetrycznych, informacji o rzeźbie terenu oraz globalnego modelu geopotencjału. Obliczenia odniesione do obszaru Dolnego Śląska dotyczą terenów górskich (Sudety), podgórskich i nizinnych. W analizach przyjęto odległość pomiędzy znanymi punktami wynoszącą 30 km (przybliżona, średnia odległość pomiędzy punktami sieci POLREF). Przeprowadzone prace wskazują na istotne znaczenie analizowanych składowych dla wyznaczanych anomalii wysokości także dla terenów nizinnych.

**Słowa kluczowe:** interpolacja wysokości quasi-geoidy

### **WSTĘP**

Wykorzystanie technik satelitarnych do wyznaczania wysokości punktów w obowiązującym w danym kraju systemie wysokości stwarza konieczność budowy dokładnych modeli geoidy lub quasi-geoidy. Jest wiele metod wyznaczania tych powierzchni. Ich ogólny opis znaleźć można w opracowaniach [Heiskanen, Moritz 1967], [Sansò, Rummel (Eds.) 1997], [Torge 2001] oraz [Hofmann-Wellenhof, Moritz 2005]. Ogólnie metody te podzielić można na dwie grupy [Tscherning 2001]: metody oparte na rozwiązaniu Stokesa oraz aproksymacje oparte na metodzie najmniejszych kwadratów (najbardziej popularną w tej grupie jest kolokacja metodą najmniejszych kwadratów). Niezależnie od zastosowanej metody, podstawą dokładnych lokalnych wyznaczeń geoidy i quasi-geoidy są powierzchniowe dane grawimetryczne.

---

Adres do korespondencji – Corresponding author: Marek Trojanowicz, Instytut Geodezji i Geoinformatyki; Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu, ul. Grunwaldzka 53, 50-357 Wrocław, e-mail: marek.trojanowicz@up.wroc.pl

Wyznaczając wysokości elipsoidalne  $h$  na podstawie pomiarów satelitarnych dla punktów o znanych wysokościach ortometrycznych  $H^o$  lub normalnych  $H^n$ , można określić tzw. satelitarno-niwelacyjne wysokości geoidy ( $N = h - H^o$ ) lub quasi-geoidy ( $\zeta = h - H^n$ ). Porównanie tych wysokości z wysokościami geoidy i quasi-geoidy wyznaczonymi na podstawie danych grawimetrycznych wskazuje na pewną systematyczną różnicę polegającą na przesunięciu i pochyleniu względem siebie powierzchni wyznaczonych za pomocą obu podejść. Wykorzystanie praktyczne grawimetrycznych wysokości geoidy lub quasi-geoidy do wykonywania niwelacji satelitarnej wymaga więc dodatkowo ich dostosowania do danych satelitarno-niwelacyjnych. Na dane satelitarno-niwelacyjne patrzeć więc można jako na dane uzupełniające grawimetryczne wyznaczenia geoidy i quasi-geoidy. Z drugiej strony, coraz większe zagęszczenie punktów o znanych, satelitarno-niwelacyjnych wysokościach geoidy lub quasi-geoidy może pozwolić na potraktowanie tych danych jako podstawy do wyznaczenia modelu geoidy i quasi-geoidy, z pominięciem żmudnych obliczeń wykorzystujących dane grawimetryczne (takim modelem quasi-geoidy dla obszaru polski jest opracowany w 2001 r. model QGEOID'PL01). Korzystając z tak zbudowanych modeli, należy przede wszystkim oszacować wielkości błędów wynikających z nieuwzględnienia nieregularności w przebiegu geoidy i quasi-geoidy pomiędzy punktami znanymi. Dokładną analizę dotyczącą tego zagadnienia od strony wymagań ilościowych i jakościowych danych wykorzystywanych do grawimetrycznego wyznaczenia geoidy znaleźć można w publikacji Łyszkowicza [1991]. Praca niniejsza jest próbą oszacowania wielkości tych błędów dla konkretnego obszaru. Obliczenia przeprowadzono z wykorzystaniem techniki usunięcia i odtworzenia zarówno mas topograficznych, jak i globalnego modelu geopotencjału. Stąd, oszacowane błędy zostały rozdzielone na odpowiednie składowe wynikające z zastosowanej techniki obliczeniowej.

W tym miejscu warto zaznaczyć, iż wspomniany wyżej model quasi-geoidy QGEOID'PL01 jest jednym z kilku modeli opracowanych dla obszaru Polski. Prace nad budową regionalnego modelu geoidy dla Polski rozpoczęto jeszcze w latach pięćdziesiątych dwudziestego wieku. Zaowocowały one pierwszym modelem geoidy opracowanym na podstawie astronomiczno-geodezyjnych odchyłań pionu oraz anomalii grawimetrycznych w 1961 r. [Bokun 1961]. Pierwszy model quasi-geoidy grawimetrycznej, o nazwie GEOID92 i dokładności ok. 10 cm, dla obszaru Polski został opracowany w CBK w 1992 r. [Łyszkowicz 1993]. Do budowy tego modelu wykorzystano kombinację kolokacji z metodą całkową. Kolejny model opracowany na bazie danych grawimetrycznych o większej rozdzielczości ( $1' \times 1'$ ) charakteryzował się dokładnością ok. 2.8 cm [Kryński 2007]. Model ten o nazwie quasi97b został opracowany z wykorzystaniem techniki FFT [Łyszkowicz 1998]. Model quasi97b był podstawą zaleconego w 2001 roku do stosowania w praktyce geodezyjnej, przez Głównego Geodetę Kraju, modelu quasi-geoidy o nazwie „geoida niwelacyjna 2001” [Pażusz 2001]. W ostatnich latach podjęto działania nad wyznaczeniem nowego modelu quasi-geoidy dla obszaru Polski. Przeprowadzone przez zespół naukowców pod kierunkiem profesora Kryńskiego z Instytutu Geodezji i Kartografii w Warszawie prace pozwoliły przede wszystkim na ocenę całego zbioru danych niezbędnych do wyznaczenia modelu quasi-geoidy oraz stworzyły możliwość lepszej weryfikacji budowanych modeli (oszacowana w ramach tych prac dokładność modelu quasi-geoidy „geoida niwelacyjna 2001” wynosi 1.8 cm [Kryński 2007]). Opracowano także kilka nowych modeli quasi-geoidy wyznaczonych

za pomocą różnych, także nowych rozwiązań [Kryński 2007]. Żaden z nowych modeli nie został jeszcze wprowadzony do praktycznego stosowania.

## TECHNIKA OBLICZENIOWA

Punktem wyjścia przeprowadzanych analiz jest rozkład wysokości quasi-geoidy na trzy składowe:

$$\zeta = \zeta_{GM} + \zeta_t + \zeta_{\Delta g} \quad (1)$$

gdzie:  $\zeta_{GM}$  oznacza składową wyznaczoną na podstawie globalnego modelu potencjału,  $\zeta_t$  – to składowa wynikająca z wpływu mas topograficznych oraz  $\zeta_{\Delta g}$  – to składowa wyznaczana na podstawie danych grawimetrycznych.

Rozkład ten jest w zasadzie klasyczną postacią techniki remove-restore [np. Torge 2001, s. 286] zastosowanej do wyznaczenia wysokości quasi-geoidy. Warto zaznaczyć, że w tej technice składowa  $\zeta_{\Delta g}$  może być wyznaczona na podstawie różnych rozwiązań zagadnienia Mołodeńskiego. W pracy niniejszej posłużono się rozwiązaniem znanym jako „*analytical continuation*” [Hofmann-Wellenhof, Moritz 2005, s. 303]. Sposób realizacji obliczeń zapiszemy następująco:

- Anomalie wolnopoietrzne  $\Delta g$  odniesione do powierzchni terenu są redukowane ze względu na składową globalnego modelu potencjału  $\Delta g_{GM}$  oraz masy topograficzne  $\Delta g_t$  zalegające ponad geoidą (redukcja topograficzna):

$$\Delta g^c = \Delta g - \Delta g_{GM} - \Delta g_t \quad (2)$$

Składową globalnego modelu geopotencjału wyznaczymy na podstawie równania [np. Torge 2001, s. 272]:

$$\Delta g_{GM} = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \left( \overline{\Delta C}_{nm} \cos m\lambda + \overline{\Delta S}_{nm} \sin m\lambda \right) \overline{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (3)$$

gdzie:  $r, \theta, \lambda$  są współrzędnymi sferycznymi punktu, w którym anomalię wyznaczamy ( $r$  – odległość od środka sfery,  $\theta$  – odległość biegunowa,  $\lambda$  – długość geograficzna),  $GM$  jest geocentryczną stałą grawitacyjną,  $a$  – dłuższą półosią elipsoidy,  $\overline{P}_{nm}$  jest znormalizowaną stowarzyszoną funkcją Legendre’a o stopniu  $n$  i rzędu  $m$  oraz  $\overline{\Delta C}_{nm}, \overline{\Delta S}_{nm}$  to różnice znormalizowanych współczynników harmonicznych sferycznych pola rzeczywistego i normalnego.

W obliczeniach przykładowych zrealizowanych w niniejszej pracy wykorzystano model EGM96 do stopnia i rzędu  $n_{max} = m_{max} = 360$ .

Redukcję topograficzną  $\Delta g_t$  określić można, wychodząc z potencjału mas topograficznych  $V_{top}$  zapisanego w postaci [np. Hofmann-Wellenhof, Moritz 2005, s. 6]:

$$V_{top} = G \iiint_{top} \frac{dm}{l} \quad (4)$$

gdzie:  $G$  jest stałą grawitacji,  $l$  – odległością pomiędzy elementem masy  $dm$  a punktem przyciąganym.

Wprowadzając prostokątny układ współrzędnych z osiami  $X, Y$  leżącymi w płaszczyźnie horyzontu oraz osią  $Z$  skierowaną ku zenitowi, równanie (4) zapiszemy w postaci:

$$V_{top}(x_p, y_p, z_p) = G \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho}{l} dx dy dz \quad (5)$$

gdzie:  $\rho = \frac{dm}{dxdydz}$  jest gęstością mas topograficznych, współrzędne  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$

definiują obszar całkowania oraz  $l = \sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-z_p)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ .

Wykorzystując do obliczeń numeryczny model terenu (NMT) w postaci prostopadłościennych bloków oraz przyjmując stałą gęstość mas topograficznych, równanie (5) zapiszemy w postaci:

$$V_{top} = G\rho \sum_{i=1}^n \left( \int_{z_{i1}}^{z_{i2}} \int_{y_{i1}}^{y_{i2}} \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \frac{1}{\sqrt{(x_i-x_p)^2 + (y_i-y_p)^2 + (z_i-z_p)^2}} dx_i dy_i dz_i \right) \quad (6)$$

gdzie:  $n$  jest liczbą bloków NMT, a współrzędne  $x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}, x_{i2}, y_{i2}, z_{i2}$  definiują blok  $i$ .

Praktyczna realizacja obliczeń wymaga rozwiązania całki (6). Rozwiązanie to jest dobrze znane i zapiszemy je jako [Nagy, Papp, Benedyk 2000, s. 553]:

$$\int_{z_{i1}}^{z_{i2}} \int_{y_{i1}}^{y_{i2}} \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \frac{1}{l} dx dy dz = \left\| \left\| \Delta x \Delta y \ln |\Delta z + l| + \Delta y \Delta z \ln |\Delta x + l| + \Delta x \Delta z \ln |\Delta y + l| \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \Delta x^2 \arctan \left[ \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x l} \right] - \frac{1}{2} \Delta y^2 \arctan \left[ \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y l} \right] - \frac{1}{2} \Delta z^2 \arctan \left[ \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z l} \right] \right\|_{x_{i1}}^{x_{i2}} \left\| \right\|_{y_{i1}}^{y_{i2}} \left\| \right\|_{z_{i1}}^{z_{i2}} \quad (7)$$

W powyższym równaniu przyjęto oznaczenia  $\Delta x^2 = (x_i - x_p)^2$ ,  $\Delta y^2 = (y_i - y_p)^2$ ,  $\Delta z^2 = (z_i - z_p)^2$  oraz  $l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ .

Różniczkując równania (6) i (7) względem zmiennej  $z_p$ , otrzymamy odpowiednie wyrażenia służące obliczeniu redukcji  $\Delta g_i$ . Zapiszemy więc:

$$\Delta g_t = G\rho \sum_{i=1}^n \left( \int_{z_{i1}}^{z_{i2}} \int_{y_{i1}}^{y_{i2}} \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \frac{\Delta z}{l^3} dx_i dy_i dz_i \right) \quad (8)$$

Przy czym [Nagy, Papp, Benedyk 2000, s. 554]:

$$\int_{z_{i1}}^{z_{i2}} \int_{y_{i1}}^{y_{i2}} \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \frac{\Delta z}{l^3} dx_i dy_i dz_i = \left\| \left\| \Delta x \ln |\Delta y + l| + \Delta y \ln |\Delta x + l| - \Delta z \arctan \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z l} \right\| \right\|_{x_{i1}}^{x_{i2}} \Big|_{y_{i1}}^{y_{i2}} \Big|_{z_{i1}}^{z_{i2}} \quad (9)$$

- Po usunięciu mas topograficznych zmianie uległo położenie telluroidy, na której zgodnie z definicją potencjał normalny musi być równy potencjałowi rzeczywistemu w punkcie na powierzchni Ziemi. Do anomalii  $\Delta g^c$  wprowadzamy więc poprawkę ze względu na efekt odwrotny usunięcia [Hofmann-Wellenhof, Moritz 2005, s. 318]

$$\Delta g_c = \Delta g^c - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} V_{top} \quad (10)$$

- Anomalie  $\Delta g_c$  są redukowane na geoidę [Hofmann-Wellenhof, Moritz 2005, s. 303]

$$\Delta g_c^* = \Delta g_c - \frac{\partial \Delta g_c}{\partial h} H \quad (11)$$

przy czym gradient pionowy anomalii  $\Delta g_c$  dany jest równaniem [Torge 2001, s. 291]:

$$\frac{\partial \Delta g_c}{\partial h} = \frac{R^2}{2\pi \sigma} \iint_{\sigma} \frac{\Delta g_c - \Delta g_{c,p}}{l_o^3} d\sigma \quad (12)$$

gdzie:  $R$  jest promieniem Ziemi,  $\sigma$  oznacza sferę jednostkową,  $p$  jest punktem, w którym  $\frac{\partial \Delta g_c}{\partial h}$  obliczamy oraz  $l_o = 2R \sin \frac{\psi}{2}$ ,  $\psi$  to odległość sferyczna pomiędzy punktem  $p$  i elementem powierzchni  $d\sigma$ ,  $H$  jest wysokością punktu ponad powierzchnię odniesienia.

Jądro całki (12) bardzo szybko maleje wraz z rosnącą odległością sferyczną  $\psi$ . Biorąc dodatkowo pod uwagę, że całkowane są anomalie rezydualne  $\Delta g_c$ , możemy ograniczyć obszar całkowania do najbliższego otoczenia anomalii podlegającej redukcji, a otoczenie to przybliżyć płaszczyzną. Jeżeli przyjmiemy zdefiniowany wyżej prostokątny układ współrzędnych, to równanie (12) zapiszemy w postaci:

$$\frac{\partial \Delta g_c}{\partial h} = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\Delta g_c - \Delta g_{c,p}}{l_o^3} dx dy \quad (13)$$

gdzie:  $l_o = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  oraz  $x_1, y_1, x_2, y_2$  definiują obszar całkowania.

Wykorzystując do obliczeń numeryczny model anomalii grawimetrycznych w postaci regularnej siatki kwadratów, równanie (13) przyjmie postać:

$$\frac{\partial \Delta g_c}{\partial h} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n (\Delta g_{ci} - \Delta g_{cp}) \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \int_{y_{i1}}^{y_{i2}} \frac{1}{l_o^3} dx_i dy_i \quad (14)$$

gdzie:  $n$  jest liczbą oczek siatki numerycznego modelu anomalii, a współrzędne  $x_{i1}, y_{i1}, x_{i2}, y_{i2}$  definiują oczko  $i$ .

Praktyczna realizacja obliczeń wymaga rozwiązania całki (14). Rozwiązanie to zapiszemy w postaci:

$$\int_{y_{i1}}^{y_{i2}} \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \frac{1}{l_o^3} dx dy = \left\| -\frac{l_o}{\Delta x \Delta y} \right\|_{x_{i1}}^{x_{i2}} \Big|_{y_{i1}}^{y_{i2}} \quad (15)$$

- Na podstawie anomalii  $\Delta g_c^*$  obliczane są wysokości quasi-geoidy w punktach na powierzchni terenu (składowa  $\zeta_{\Delta g}$ ) [Torge 2001, s. 291]:

$$\zeta_{\Delta g} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g_c^* S(\psi) d\sigma + \frac{\partial \zeta_{\Delta g}}{\partial H} H \quad (16)$$

gdzie:  $S(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - \sin \psi + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos^3 \psi \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right)$  jest funkcją Stokesa

$$\text{oraz } \frac{\partial \zeta_{\Delta g}}{\partial H} = -\frac{\Delta g_c^*}{\gamma}$$

Wprowadzając biegunowy układ współrzędnych na powierzchni sfery, w którym punkt wyznaczany znajduje się w biegunie układu, natomiast anomalie grawimetryczne mają współrzędne: odległość biegunową  $\psi$  oraz azymut  $\alpha$ , równanie (16) zapiszemy w postaci:

$$\zeta_{\Delta g} = \frac{R}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta g_c^* S(\psi) \sin \psi d\psi d\alpha + \frac{\partial \zeta_{\Delta g}}{\partial H} H \quad (17)$$

Przyjmując, że anomalie grawimetryczne dane są w postaci siatki biegunowej oraz zakładając stałą ich wartość w każdym oczku takiej siatki, równanie (17) zapiszemy jako:

$$\zeta_{\Delta g} = \frac{R}{2\pi\gamma} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i^1}^{\alpha_i^2} \int_{\psi_i^1}^{\psi_i^2} \Delta g_{ci}^* S(\psi_i) \sin \psi_i d\psi_i d\alpha_i + \frac{\partial \zeta_{\Delta g}}{\partial H} H \quad (18)$$

gdzie:  $n$  jest liczbą oczek siatki,  $\alpha_i^1, \alpha_i^2, \psi_i^1, \psi_i^2$  są współrzędnymi definiującymi oczko  $i$ .

Rozwiązując całkę równania (18), otrzymamy praktyczny wyrażenie umożliwiające realizację obliczeń:

$$\zeta_{\Delta g} = \frac{R}{2\pi\gamma} \sum_{i=1}^n \Delta g_{ci}^* \Delta \alpha_i K_i + \frac{\partial \zeta_{\Delta g}}{\partial H} H \quad (19)$$

przy czym wyrażenie  $K_i$  jest rozwiązaniem podanym przez Lamberta i Darlinga, przytoczonym tutaj za Łyszkowiczem [Łyszkowicz 1991, s. 171]:

$$\begin{aligned}
 K_i &= \int_{\psi_i^1}^{\psi_i^2} \frac{1}{2} S(\psi) \sin \psi d\psi \\
 &= \left| 1 + 4 \sin \frac{\Psi}{2} - \cos \psi - 6 \sin^3 \frac{\Psi}{2} - 7 \sin^2 \frac{\Psi}{2} - \frac{3}{2} \left( \sin^2 \psi \ln \left( \sin \frac{\Psi}{2} + \sin^2 \frac{\Psi}{2} \right) \right) \right|_{\psi_i^1}^{\psi_i^2} \quad (20)
 \end{aligned}$$

Obliczenia prowadzone według równania (19) wymagają generowania siatki biegunowej dla każdego punktu oraz obliczenia poprawki  $\frac{\partial \zeta_{\Delta g}}{\partial H} H$  będącej przeniesieniem anomalii wysokości obliczonej na powierzchni odniesienia do powierzchni terenu. Alternatywnym rozwiązaniem może być zastosowanie prostokątnego, jednakowego dla wszystkich punktów układu współrzędnych oraz rozwiązania zadania Stokesa dla przestrzeni zewnętrznej – rozwiązanie Pizzettiego. Zastosowanie układu prostokątnego wiąże się z lokalnym przybliżeniem sfery płaszczyzną oraz ograniczeniem obszaru całkowania. W przypadku uprzedniego usunięcia z wartości anomalii grawimetrycznych składowej globalnego modelu potencjału, modyfikacji podlega również funkcja Stokesa, która w zależności od stopnia usuniętego modelu globalnego, znacznie szybciej przyjmuje wartości bliskie zeru niż funkcja oryginalna. Pozwala to na ograniczenie obszaru całkowania i zmniejszenie błędów związanych z przybliżeniem sfery płaszczyzną.

Przyjmując prostokątny układ współrzędnych oraz rozwiązanie zagadnienia Stokesa dla przestrzeni wewnętrznej w postaci wzoru Pizzettiego [Hofmann-Wellenhof, Moritz 2005, s. 103], równanie (16) dla przybliżenia płaskiego zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned}
 \zeta_{\Delta g} &= \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{y^1}^{y^2} \int_{x^1}^{x^2} \frac{\Delta g_c^*}{\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-z_p)^2}} dx dy \\
 &= \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{y^1}^{y^2} \int_{x^1}^{x^2} \frac{\Delta g_c^*}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} dx dy \quad (21) \\
 &= \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{y^1}^{y^2} \int_{x^1}^{x^2} \frac{\Delta g_c^*}{l} dx dy
 \end{aligned}$$

gdzie:  $x^1, x^2, y^1, y^2$  definiują obszar całkowania,  $x, y, z$  są współrzędnymi punktu o anomalii  $\Delta g_c^*$  (przy czym  $z=0$ ),  $x_p, y_p, z_p$  są współrzędnymi punktu obliczanego ( $Z=H$ ).

Zakładając, że anomalie grawimetryczne dane są w postaci regularnej siatki prostokątnej, o stałej wartości anomalii w każdym jej oczku, równanie (21) zapiszemy jako:

$$\begin{aligned}\zeta_{\Delta g} &= \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{i=1}^n \left( \Delta g_{ci}^* \int_{y_i^1}^{y_i^2} \int_{x_i^1}^{x_i^2} \frac{1}{\sqrt{(x-x_P)^2 + (y-y_P)^2 + (z-z_P)^2}} dx_i dy_i \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{i=1}^n \left( \Delta g_{ci}^* \int_{y_i^1}^{y_i^2} \int_{x_i^1}^{x_i^2} \frac{1}{l} dx_i dy_i \right)\end{aligned}\quad (22)$$

gdzie:  $n$  jest liczbą oczek siatki,  $\Delta g_{ci}^*$  jest wartością anomalii grawimetrycznej w oczku  $i$  oraz współrzędne  $x_i^1, x_i^2, y_i^1, y_i^2$  definiują oczko  $i$ .

Rozwiązanie całki występującej w równaniu (22) ma postać następującą:

$$\int_{y_i^1}^{y_i^2} \int_{x_i^1}^{x_i^2} \frac{1}{l} dx_i dy_i = \left| \Delta x \ln |\Delta y + l| + \Delta y \ln |\Delta x + l| - \Delta z \arctan \left[ \frac{\Delta y \Delta x}{\Delta z l} \right] \right|_{x_i^1}^{x_i^2} \Big|_{y_i^1}^{y_i^2} \quad (23)$$

Uproszczenie, jakiemu podlega funkcja Stokesa w przypadku zastąpienia sfery płaszczyzną  $S(\psi) \cong \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \cong \frac{2}{\psi}$ , pozwala również na uproszczenie obliczeń realizowanych

w układzie biegunowym. Równanie (19) zapiszemy w tym wypadku jako:

$$\zeta_{\Delta g} = \frac{R}{2\pi\gamma} \sum_{i=1}^n \Delta g_{ci}^* \Delta \alpha_i \Delta \psi_i + \frac{\partial \zeta_{\Delta g}}{\partial H} H \quad (19a)$$

- Ostateczne wysokości quasi-geoidy obliczamy poprzez przywrócenie wpływu modelu globalnego oraz mas topograficznych (1)  $\zeta = \zeta_{GM} + \zeta_t + \zeta_{\Delta g}$ .

Przy czym składową  $\zeta_t$  obliczymy na podstawie równania (6) oraz formuły Brunsza:

$$\zeta_t = \frac{V_{top}}{\gamma} \quad (24)$$

natomiast składową  $\zeta_{GM}$  na podstawie zależności [Torge 2001, s. 271]:

$$\zeta_{GM} = \frac{GM}{r\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \left( \overline{\Delta C}_{nm} \cos m\lambda + \overline{\Delta S}_{nm} \sin m\lambda \right) \overline{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (25)$$

Jak zaznaczono we wstępie, obliczone według równania (1) anomalie wysokości zwykłe różnią się od satelitarno-niwelacyjnych anomalii wysokości ( $\zeta_{SN}$ ). Uwzględniając te różnice, satelitarno-niwelacyjne wysokości quasi-geoidy zapiszemy w postaci:

$$\zeta_{SN} = \zeta_{GM} + \zeta_t + \zeta_{\Delta g} + \zeta_L \quad (26)$$

gdzie: składowa  $\zeta_L$  jest resztową wartością anomalii wysokości, która podlega interpolacji.

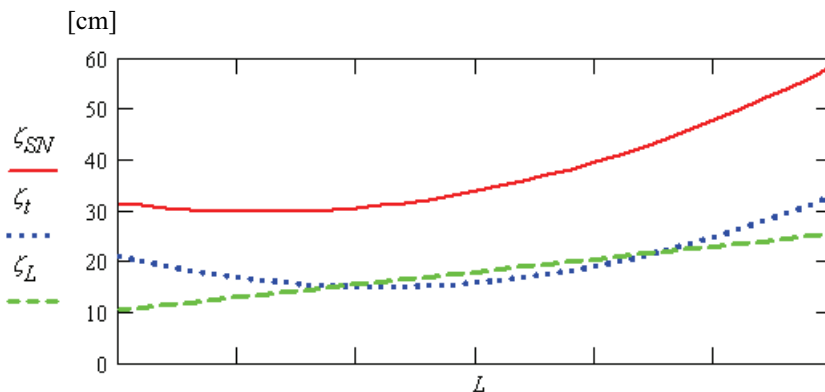


W dalszej części analizowany będzie wpływ składowych  $\zeta_{GM}$ ,  $\zeta_t$  i  $\zeta_{Ag}$  równania (26) na wynik interpolacji satelitarno-niwelacyjnych anomalii wysokości  $\zeta_{SN}$ , przy czym analizie będą podlegały profile o długości 30 km (przybliżona średnia odległość punktów sieci POLREF).

Sposób wyznaczenia tych wpływów przedstawiono, posługując się następującym przykładem. Załóżmy, że dwa punkty o pomierzonych wartościach  $\zeta_{SN}$  są oddalone od siebie o odległość  $L$ . Pomiedzy tymi punktami, w linii prostej znajduje się  $n$  punktów, w których chcemy wyznaczyć satelitarno-niwelacyjne anomalie wysokości z wykorzystaniem równania (26). Aby zrealizować takie zadanie, posługujemy się następującym schematem obliczeniowym:

- obliczamy składowe  $\zeta_{GM}$ ,  $\zeta_t$  i  $\zeta_{Ag}$  według odpowiednich równań (1)–(25) dla wszystkich punktów (zarówno danych, jak i nowych),
- usuwamy wpływ tych składowych na punktach danych, obliczając składowe  $\zeta_L$ ,
- interpolujemy składowe  $\zeta_L$  dla  $n$  punktów nowych,
- korzystając z równania (26) obliczamy wartości  $\zeta_{SN}$  dla  $n$  punktów nowych.

Założmy na chwilę, że składowe  $\zeta_{GM}$  i  $\zeta_{Ag}$  są równe zero. Satelitarno-niwelacyjne anomalie wysokości będą więc sumą składowych  $\zeta_t$  oraz  $\zeta_L$ . Ustalmy dalej, że pomiędzy punktami A i B oddalonymi od siebie o odległość  $L$  quasi-geoida satelitarno-niwelacyjna oraz składowe  $\zeta_t$  i  $\zeta_L$  mają przebieg jak na rysunku 1.

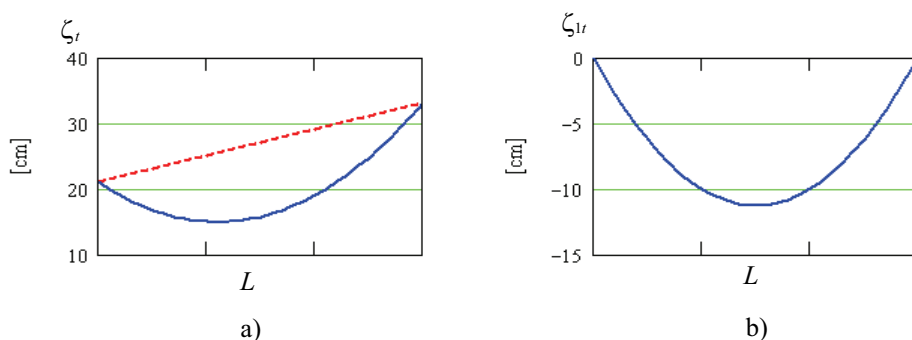


Rys. 1. Przykładowy przebieg wysokości quasi-geoidy satelitarno-niwelacyjnej oraz składowych  $\zeta_t$  i  $\zeta_L$  na odcinku o długości  $L$

Fig. 1. The course of satellite-leveling quasi-geoid heights and components  $\zeta_t$  and  $\zeta_L$  on a line segment  $L$

Wartości składowej  $\zeta_t$  wahają się w granicach od 15 do ok. 33 cm. Jednak wpływ tej składowej na wynik interpolacji nie będzie taki duży, a zależał będzie przede wszystkim od odchyżeń składowej  $\zeta_t$  od funkcji przyjętej do interpolacji składowej  $\zeta_L$ .

Jeżeli nie mamy żadnych wskazań co do postaci tej funkcji, to można założyć, że przebieg składowej  $\zeta_L$  jest dany równaniem prostej. Przy takim założeniu prosta łącząca końce wykresu składowej  $\zeta_r$  będzie prostą odniesienia dla analizy wpływu tej składowej na wynik interpolacji. Przedstawia to rysunek 2.



Rys. 2. Składowa  $\zeta_r$  (a) oraz oznaczony jako  $\zeta_{lr}$ , wpływ tej składowej na wynik interpolacji składowej  $\zeta_L$  (b)

Fig. 2. The component  $\zeta_r$  (a) and, signed as  $\zeta_{lr}$ , its influence on result of interpolation of the component  $\zeta_L$  (b)

Różnice pomiędzy wartościami składowej  $\zeta_r$  i odpowiednią wartością na prostej odniesienia oznaczone jako  $\zeta_{lr}$  stanowią rzeczywisty wpływ tej składowej na wynik interpolacji. W przytoczonym przykładzie wpływ ten nie przekracza  $-12$  cm.

W taki sam sposób określimy wpływ składowych  $\zeta_{GM}$  i  $\zeta_{\Delta g}$ , który oznaczony zostanie jako  $\zeta_{1GM}$  i  $\zeta_{1\Delta g}$ .

Podsumowując, sposób wyznaczania wartości  $\zeta_{lr}$ ,  $\zeta_{1GM}$  i  $\zeta_{1\Delta g}$  można krótko opisać w następujących punktach:

1. Obliczamy wartości składowych  $\zeta_{GM}$ ,  $\zeta_r$  i  $\zeta_{\Delta g}$  dla wszystkich punktów analizowanego profilu.
2. Dla każdej składowej definiujemy prostą odniesienia łączącą punkty końcowe profilu.
3. Wyznaczamy wartości  $\zeta_{lr}$ ,  $\zeta_{1GM}$  i  $\zeta_{1\Delta g}$  jako różnice pomiędzy składową obliczoną i „teoretyczną” wartością tej składowej obliczoną na prostej odniesienia.

## OBLICZENIA TESTOWE

Obszar obliczeń testowych obejmuje rejon Dolnego Śląska (rys. 3). Jest to teren w przeważającej części równinny. W południowo-zachodniej jego części rozpościera się pasmo górskie Sudetów.

Obliczenia testowe wykonano w oparciu o numeryczny model terenu o rozdzielczości 300 m dla najbliższego (do odległości 33 km) otoczenia punktów testowych oraz 1000 m dla stref dalszych (do 167 km). Dane te posłużyły do wyznaczenia składowych  $\zeta_r$ . Do obliczeń wykorzystano także dane grawimetryczne w systemie IGSN 71, w postaci gęstej (ok. 3 pkt/km<sup>2</sup>) sieci punktów grawimetrycznych udostępnionych przez Państwowy Instytut Geologiczny dla obszaru Dolnego Śląska, siatkę uśrednionych anomalii wolnopowietrznych o rozdzielczości 5'×5', w systemie Poczdam dla pozostałej części Polski oraz siatkę uśrednionych anomalii Bouguera o rozdzielczości 7.5'×5' w systemie IGSN 71 dla obszaru Czech. Uśrednione anomalie zarówno z obszaru Polski, jak i Czech są odniesione do elipsoidy GRS 80 i dostępne na stronie internetowej Bureau Gravimétrique International<sup>1</sup>. Anomalie w systemie Poczdam zostały przeliczone do systemu IGSN 71 według zależności  $\Delta g_{IGSN71} = \Delta g_{Poczdam} - 14 \text{ mGal}$ . Na podstawie takich danych grawimetrycznych wyznaczone zostały siatki anomalii  $\Delta g_c^*$  będące podstawą obliczenia składowych  $\zeta_{\Delta g}$ . Dla przybliżenia płaskoziemnego i siatki prostokątnej wyznaczono metodą triangulacji siatkę o boku 1 km. Dla przybliżenia sferycznego, dla każdego punktu przyjęto siatkę biegunową o parametrach<sup>2</sup>:

$$\Delta\alpha = 5^\circ \text{ oraz } \Delta\psi = \begin{cases} 1 \text{ km} & \text{dla } 0 \leq \psi \leq 10 \text{ km} \\ 2 \text{ km} & \text{dla } 10 < \psi \leq 70 \text{ km} \\ 5 \text{ km} & \text{dla } 70 < \psi \leq 210 \text{ km} \\ 10 \text{ km} & \text{dla } 210 < \psi \leq 220 \text{ km} \end{cases}$$

Średnie wartości anomalii w każdym oczku wygenerowanej siatki biegunowej wyznaczono na podstawie dodatkowych dwóch siatek pomocniczych o rozdzielczościach 500 m dla stref do 10 km oraz 2000 m dla stref dalszych. Siatki pomocnicze zostały wyznaczone metodą triangulacji. Wartość anomalii w każdym oczku siatki biegunowej była średnią z wartości anomalii w węzłach siatek pomocniczych leżących wewnątrz oczka siatki biegunowej.

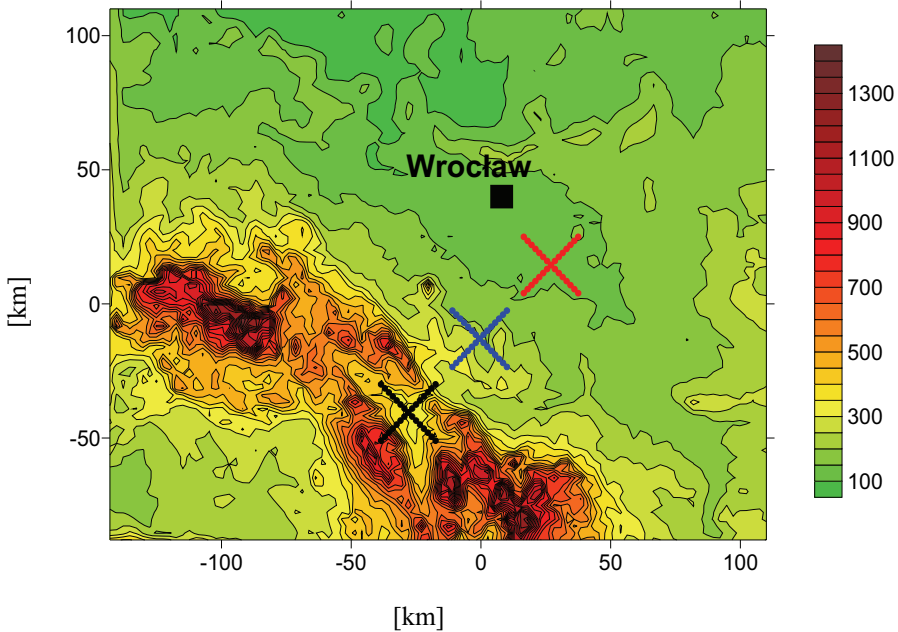
Obliczenia składowych  $\zeta_r$  zrealizowano, wykorzystując lokalny, prostokątny układ współrzędnych. Początek układu zaczepiony jest w punkcie  $B = 50.8^\circ$ ,  $L = 17^\circ$  (przybliżony środek obszaru opracowania). Oś  $Z$  tego układu pokrywa się z linią pionu, oś  $X, Y$  leżą w płaszczyźnie horyzontu, przy czym oś  $X$  skierowana jest w przybliżeniu na północ, natomiast oś  $Y$  na wschód.

Składową  $\zeta_{\Delta g}$  obliczono w trzech wariantach. Jako wariant podstawowy przyjęto obliczenia według równania (19), a więc dla układu biegunowego na sferze. Dodatkowo dla porównania, te same obliczenia przeprowadzono, wykorzystując lokalne przybliżenie sfery płaskoziemną. Przy czym do obliczeń wykorzystano siatkę biegunową – równanie (19a) oraz prostokątną – równanie (22).

<sup>1</sup> [http://bgi.cnes.fr:8110/bgi\\_service\\_a.html](http://bgi.cnes.fr:8110/bgi_service_a.html)

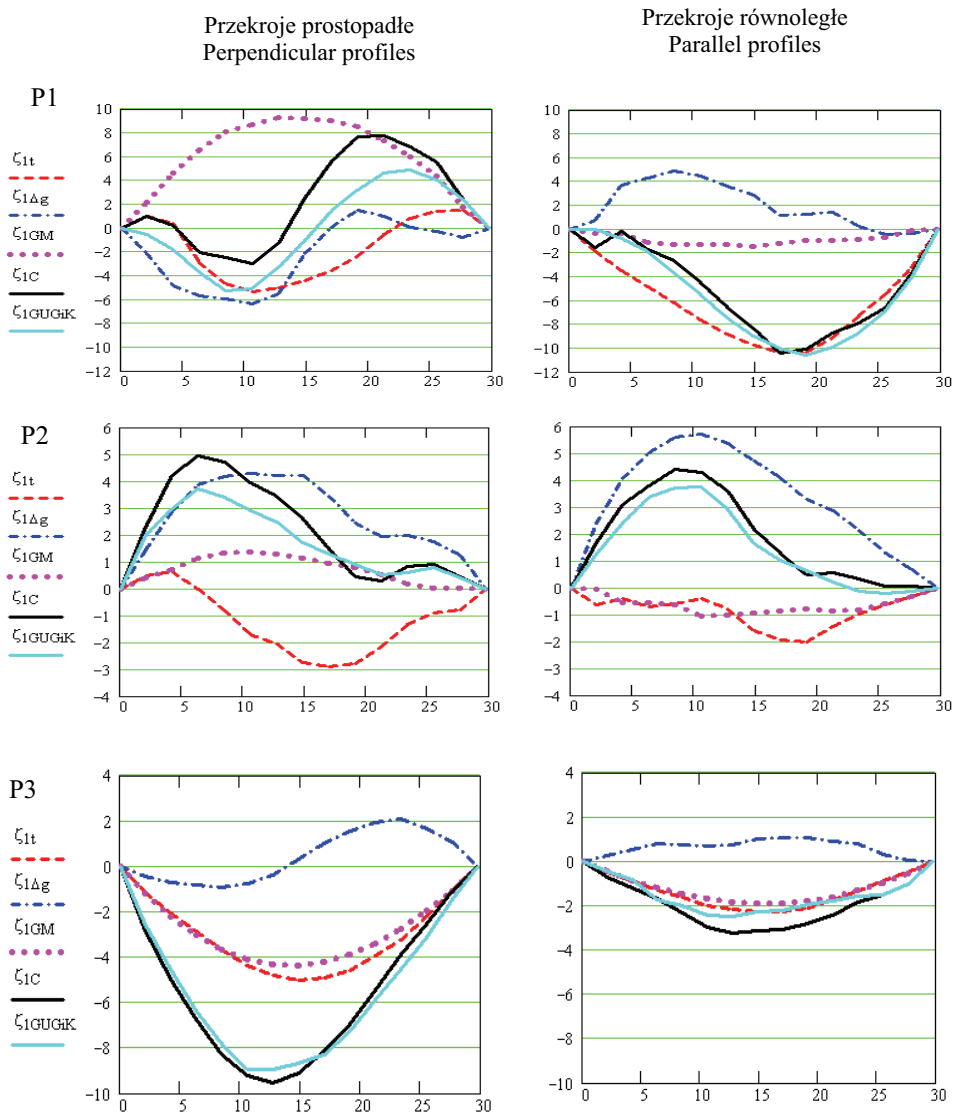
<sup>2</sup> W ramach prac testowych dla wybranych punktów zrealizowano obliczenia, przyjmując także większą rozdzielczość siatek, lecz nie miało to istotnego wpływu na rezultat końcowy.

Korzystając z przedstawionych wyżej danych, obliczono składowe  $\zeta_{GM}$ ,  $\zeta_t$  i  $\zeta_{\Delta g}$  dla szeregu punktów testowych. Punkty te tworzą swego rodzaju przekroje o długości 30 km, które można podzielić na dwie grupy. Grupę pierwszą tworzą przekroje położone w przybliżeniu równoległe do głównego pasma Sudetów, natomiast grupę drugą – przekroje prostopadłe. Zarówno przekroje równoległe, jak i prostopadłe umieszczone są w różnych odległościach od głównego pasma Sudetów. Przekroje te zaznaczone są na rysunku 3. W dalszej części pracy wyniki obliczeń odnoszące się do przekrojów (prostopadłego i równoległego) położonych na terenie Sudetów (Kotlina Kłodzka) i zaznaczonych na rys. 3 kolorem czarnym będą oznaczone jako P1, dla przekrojów środkowych (kolor niebieski) oznaczone będą jako P2 oraz dla przekrojów położonych najdalej od Sudetów (kolor czerwony) jako P3. Dla poszczególnych przekrojów wyznaczone zostały wartości  $\zeta_t$ ,  $\zeta_{IGM}$  i  $\zeta_{\Delta g}$  oraz ich suma oznaczona jako  $\zeta_{IC}$ . Wyniki tych obliczeń prezentują wykresy zamieszczone na rysunku 4. Niezależną kontrolę przeprowadzonych obliczeń stanowi porównanie składowej  $\zeta_{IC}$  z obliczonymi na podstawie modelu quasi-geoidy „geoida niwelacyjna 2001” składowych  $\zeta_{IGUGIK}$ .



Rys. 3. Mapa wysokościowa z zaznaczonymi przekrojami, dla których wykonano obliczenia testowe

Fig. 3. The test area with marked test profiles



Rys. 4. Wykresy składowych  $\zeta_{1t}$ ,  $\zeta_{1GM}$ ,  $\zeta_{1\Delta g}$ ,  $\zeta_{1C}$  oraz  $\zeta_{1GUGIK}$  w przekrojach prostopadłych (po stronie lewej) i równoległych (po stronie prawej) – w centymetrach

Fig. 4. Diagrams of the components  $\zeta_{1t}$ ,  $\zeta_{1GM}\sqrt{b^2 - 4ac}$ ,  $\zeta_{1\Delta g}$ ,  $\zeta_{1C}$  and  $\zeta_{1GUGIK}$  for perpendicular profiles (left side) and parallel profiles (right side) – in centimeters

Wartości maksymalne, minimalne oraz odchylenia standardowe składowej  $\zeta_{1C}$  i odchylenie standardowe różnicy  $\zeta_{1C} - \zeta_{1GUGIK}$  w poszczególnych przekrojach przedstawia tabela 1.

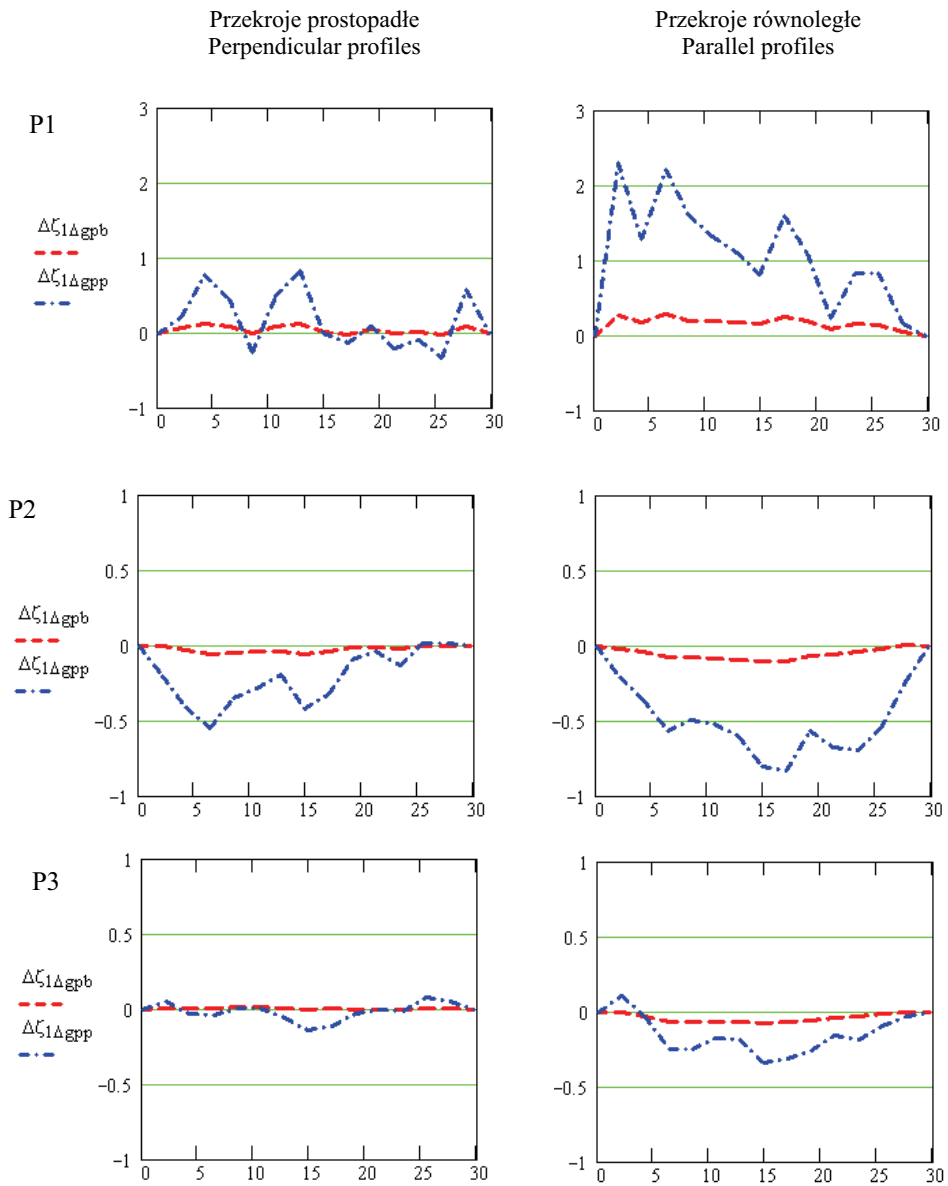
Tabela 1. Wybrane statystyki składowej  $\zeta_{1C}$ Table 1. Selected statistics of  $\zeta_{1C}$ 

statystyka	Profile prostopadłe Perpendicular profiles			Profile równoległe Parallel profiles		
	1	2	3	1	2	3
	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]
$\max(\zeta_{1C})$	7.8	4.0	0.0	0.0	4.4	0.0
$\min(\zeta_{1C})$	-3.0	0.0	-9.5	-10.4	0.0	-3.2
$\text{stdev}(\zeta_{1C})$	3.7	1.7	3.3	3.6	1.6	1.1
$\text{stdev}(\zeta_{1C} - \zeta_{1GUGIK})$	1.4	0.6	0.4	0.7	0.3	0.3

Wyżej przedstawione wyniki dotyczą wariantu, dla którego składową  $\zeta_{\Delta g}$  obliczono według równania (19), a więc dla układu biegunowego na sferze. Dla porównania obliczono tę składową przy wykorzystaniu lokalnego przybliżenia sfery płaszczyzną. Przy czym do obliczeń wykorzystano siatkę biegunową – równanie (19a) i prostokątną – równanie (22). Składowe te oznaczymy jako  $\zeta_{\Delta gpb}$  dla siatki biegunowej oraz  $\zeta_{\Delta gpp}$  dla siatki prostokątnej. Na podstawie tych składowych obliczono różnice  $\Delta\zeta_{\Delta gpb} = \zeta_{\Delta gpb} - \zeta_{\Delta g}$ , a także  $\Delta\zeta_{\Delta gpp} = \zeta_{\Delta gpp} - \zeta_{\Delta g}$  w poszczególnych przekrojach oraz wartości  $\Delta\zeta_{1\Delta gpb}$  dla składowej  $\Delta\zeta_{\Delta gpb}$  i  $\Delta\zeta_{1\Delta gpp}$  dla składowej  $\Delta\zeta_{\Delta gpp}$ , których wykresy dla poszczególnych przekrojów zamieszczono na rysunku 5. Wybrane statystyki tych wielkości zawiera tabela 2.

Tabela 2. Wybrane statystyki składowych  $\Delta\zeta_{1\Delta gpb}$  oraz  $\Delta\zeta_{1\Delta gpp}$ Table 2. Selected statistics of  $\Delta\zeta_{1\Delta gpb}$  and  $\Delta\zeta_{1\Delta gpp}$ 

statystyka	Profile prostopadłe Perpendicular profiles			Profile równoległe Parallel profiles		
	1	2	3	1	2	3
	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]
$\max(\Delta\zeta_{1\Delta gpb})$	0.12	0.00	0.01	0.28	0.00	0.00
$\min(\Delta\zeta_{1\Delta gpb})$	-0.03	-0.06	-0.01	0.00	-0.11	-0.08
$\text{stdev}(\Delta\zeta_{1\Delta gpb})$	0.05	0.02	0.01	0.08	0.04	0.03
$\max(\Delta\zeta_{1\Delta gpp})$	0.84	0.01	0.08	2.30	0.00	0.11
$\min(\Delta\zeta_{1\Delta gpp})$	-0.34	-0.55	-0.14	0.00	-0.83	-0.34
$\text{stdev}(\Delta\zeta_{1\Delta gpp})$	0.36	0.18	0.06	0.70	0.25	0.13



Rys. 5. Wykresy składowych  $\Delta\zeta_{1\Delta gpb}$  oraz  $\Delta\zeta_{1\Delta gpp}$  w przekrojach prostopadłych (po stronie lewej) i równoległych (po stronie prawej) – w centymetrach

Fig. 5. Diagrams of the components  $\Delta\zeta_{1\Delta gpb}$  and  $\Delta\zeta_{1\Delta gpp}$  for perpendicular profiles (left side) and parallel profiles (right side) – in centimeters

Analizując powyższe wyniki, zauważyć należy bardzo wyraźną zgodność pomiędzy rozwiązaniem sferycznym i przybliżeniem płaszczyznowym dla siatki biegunowej – równanie (19a). Różnice sięgające zaledwie pojedynczych milimetrów wskazują na możliwość stosowania przybliżenia płaszczyznowego w omawianym zagadnieniu, bez istotnej zmiany wyników. Znaczące są natomiast różnice rozwiązania sferycznego oraz przybliżenia płaszczyznowego dla siatki prostokątnej – równanie (22). Przyczyny takich różnic mogą wynikać zarówno z zastosowania różnych siatek, jak i z niedokładności wyznaczenia gradientu pionowego anomalii wysokości – równanie (16) (w równaniu (22) nie wykorzystywano tego gradientu). W celu weryfikacji drugiej z wymienionych przyczyn wykonano obliczenia składowej  $\zeta_{\Delta g}$  dla przybliżenia płaszczyznowego i siatki prostokątnej, z wykorzystaniem gradientu pionowego anomalii wysokości. Na podstawie równań (16) i (22) zapiszemy:

$$\begin{aligned} \zeta_{\Delta g} &= \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{i=1}^n \left( \Delta g_{ci}^* \int_{y_i^j}^{y_i^k} \int_{x_i^j}^{x_i^k} \frac{1}{\sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2}} dx_i dy_i \right) + \frac{\partial \zeta_{\Delta g}}{\partial H} H \\ &= \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{i=1}^n \left( \Delta g_{ci}^* \int_{y_i^j}^{y_i^k} \int_{x_i^j}^{x_i^k} \frac{1}{l_o} dx_i dy_i \right) + \frac{\partial \zeta_{\Delta g}}{\partial H} H \end{aligned} \quad (27)$$

Wybrane statystyki różnic pomiędzy składowymi  $\zeta_{\Delta g}$  obliczonymi na podstawie równań (22) i (27) oznaczonych jako  $\Delta \zeta_{\Delta g 22-27}$  dla poszczególnych profili zawiera tabela 3.

Tabela 3. Wybrane statystyki różnic  $\Delta \zeta_{\Delta g 22-27}$

Table 3. Selected statistics of  $\Delta \zeta_{\Delta g 22-27}$

statystyka	Profile prostopadłe Perpendicular profiles			Profile równoległe Parallel profiles		
	1	2	3	1	2	3
	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]
$max(\Delta \zeta_{\Delta g 22-27})$	0.21	0.07	0.06	0.37	0.09	0.03
$min(\Delta \zeta_{\Delta g 22-27})$	-0.06	-0.06	-0.04	-0.01	-0.04	-0.04
$stdev(\Delta \zeta_{\Delta g 22-27})$	0.07	0.04	0.02	0.12	0.04	0.02

Zaznaczyć należy, że analizowany tutaj – dany wzorem (16) i wynikający z gradientu pionowego anomalii wysokości składnik  $-\frac{\Delta g_c^*}{\gamma} H$  – przyjmuje wartości znaczne. Dla analizowanych profili testowych wybrane statystyki tych wartości prezentuje tabela 4.



Tabela 4. Wybrane statystyki wartości składowych  $-\frac{\Delta g_c^*}{\gamma} H$ Table 4. Selected statistics of  $-\frac{\Delta g_c^*}{\gamma} H$ 

statystyka	Profile prostopadłe Perpendicular profiles			Profile równoległe Parallel profiles		
	1	2	3	1	2	3
	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]
$\max\left(-\frac{\Delta g_c^*}{\gamma} H\right)$	6.1	0.9	0.4	2.9	1.0	0.3
$\min\left(-\frac{\Delta g_c^*}{\gamma} H\right)$	0.9	0.3	0.2	1.0	0.1	0.2
$stdev\left(-\frac{\Delta g_c^*}{\gamma} H\right)$	1.6	0.2	0.1	0.5	0.3	0.03

Przedstawione w tab. 3 i 4 wyniki potwierdzają poprawność przeprowadzonych obliczeń dla siatki prostokątnej. Maksymalne różnice dla obu rozwiązań nie przekraczają 4 mm, a największe odchylenie standardowe tych różnic wynosi 1.2 mm. Wartości samej poprawki  $-\frac{\Delta g_c^*}{\gamma} H$ , szczególnie dla terenów wyżynnych i górskich, są znaczące, dla terenów nizinnych nie przekraczają 1cm.

Wracając do różnic anomalii wysokości pomiędzy rozwiązaniem sferycznym oraz przybliżeniem płaskoziemnym dla siatki prostokątnej (tab. 2 i rys. 4), stwierdzić należy, iż ich główną przyczyną jest zastosowanie różnych siatek uśrednionych anomalii. Wskazuje to na ogromną wagę przyjętej metodyki wyznaczania uśrednionych anomalii. Chociaż w analizowanym podejściu do wyznaczania anomalii wysokości korzystamy z anomalii Bouguera, które charakteryzują się mniejszą zmiennością od np. anomalii Faye'a lub anomalii wolnopowietrznych, to jednak sposób obliczania anomalii uśrednionych ma istotny wpływ na końcowy wynik obliczeń.

## OSZACOWANIE DOKŁADNOŚCI WYZNACZONYCH SKŁADOWYCH

W zastosowanym do obliczeń rozwiązaniu globalny model geopotencjału jest traktowany jako model odniesienia, stąd w ocenie dokładności nie oszacowano błędów składowej  $\zeta_{IGM}$ .

Ocenę dokładności składowych  $\zeta_{lr}$  i  $\zeta_{1\Delta g}$  przeprowadzono zgodnie z metodyką zrealizowaną w pracy [Baran, Duchnowski 2005]. Postępowanie zmierzające do określenia wpływu błędów numerycznego modelu terenu oraz błędów anomalii grawimetrycznych na wyznaczone składowe polega więc na zakłóceniu danych służących do wyznaczenia odpowiedniej składowej o wartości błędów i dokonaniu powtórnych obliczeń na podstawie zmienionych danych. Nowe wartości składowych są porównywane z wyjściowymi, a różnice służą do oceny wpływu błędów danych na wyznaczone składowe.

Dokładność składowej  $\zeta_{1r}$  zależy w zasadzie jedynie od dokładności numerycznego modelu terenu przyjętego do obliczeń. Obliczenia przeprowadzono w oparciu o dwie siatki NMT o rozdzielczościach 300 m i 1000 m. Obydwa numeryczne modele terenu porównano z wysokościami punktów grawimetrycznych traktowanych jako pikiety pomiarowe, uzyskując różnice  $dh = H_P - H_{NMT}$  pomiędzy wysokością punktu grawimetrycznego i NMT. Na podstawie tych wartości określono błędy obu modeli jako

błędy RMS ( $m_{NMT} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n dh_i^2}{n}}$ , gdzie  $n$  jest liczbą punktów pomiarowych). Wartości te wyznaczone dla trzech stref wysokościowych zawiera tabela 5.

Tabela 5. Błędy numerycznych modeli terenu  
Table 5. DTM errors

Rozdzielczość [m]	300×300	1000×1000
Wysokości terenu H	$m_{NMT}$ [m]	$m_{NMT}$ [m]
0<H<200	5.8	9.43
200<H<700	33.5	35.0
700<H	86.36	93.5

Wysokości NMT zostały następnie zmienione tak, aby odchylenie standardowe zmian odpowiadało wyznaczonym błędom NMT. Zgodnie z opisaną procedurą wyznaczono z kolei różnice  $\Delta\zeta_{1r} = \zeta_{1r} - \zeta_{1r}^*$  (gdzie  $\zeta_{1r}^*$  jest składową uzyskaną na podstawie zmienionych danych), których ważniejsze statystyki zawiera tabela 6.

Tabela 6. Wybrane statystyki składowych  $\Delta\zeta_{1r}$   
Table 6. Selected statistics of  $\Delta\zeta_{1r}$

statystyka	Profile prostopadłe Perpendicular profiles			Profile równoległe Parallel profiles		
	1	2	3	1	2	3
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
$max(\Delta\zeta_{1r})$	3.4	1.6	0.5	1.3	1.4	0.9
$min(\Delta\zeta_{1r})$	-1.4	-1.4	-0.7	-1.1	-1.6	-0.2
$RMS(\Delta\zeta_{1r})$	1.9	0.8	0.3	0.6	0.7	0.5

Aby oszacować dokładność składowej  $\zeta_{1\Delta g}$ , należy w pierwszej kolejności oszacować dokładność zredukowanych do poziomu odniesienia i uśrednionych anomalii grawimetrycznych. Na tę dokładność będą miały wpływ zarówno błędy pomiarowe, jak i wszystkie etapy redukcji i wyznaczania anomalii uśrednionych. Wyróżnimy tu więc:

- błędy pomiaru przyspieszenia siły ciężkości;
- błędy spowodowane usunięciem wpływu mas topograficznych;
- błędy wywołane redukcją anomalii do poziomu odniesienia na podstawie wyznaczonych gradientów pionowych anomalii;
- błędy spowodowane wyznaczeniem anomalii uśrednionych.

Dokładność danych grawimetrycznych w punktach pomiarowych oszacowana została na  $\pm 0.075 \text{ mGal}$  [Kryński 2007]. Opisaną wyżej techniką oceniono wpływ niedokładności numerycznego modelu terenu na redukcję topograficzną, otrzymując błędy  $m_{\Delta g_t}$ :

- dla punktów o wysokości równej i mniejszej od 200 m  $m_{\Delta g_t} = \pm 0.36 \text{ mGal}$
- dla punktów o wysokości większej od 200 m  $m_{\Delta g_t} = \pm 1.44 \text{ mGal}$ .

Na podstawie tak określonych błędów oszacowano, stosując tę samą technikę, wartości błędów redukcji anomalii grawimetrycznych do poziomu morza  $m_{\Delta g_{red}}$ , uzyskując następujące rezultaty:

- dla punktów o wysokości równej i mniejszej od 200 m  $m_{\Delta g_{red}} = \pm 0.10 \text{ mGal}$
- dla punktów o wysokości większej od 200 m  $m_{\Delta g_{red}} = \pm 0.79 \text{ mGal}$ .

Błędy  $m_{\Delta g_t}$  oraz  $m_{\Delta g_{red}}$  wyznaczono, zakładając, że są one równe odpowiednim błędom RMS.

Ostatecznie przyjęto, że anomalie grawimetryczne w punktach pomiarowych, zredukowane do poziomu morza  $\Delta g_c^*$ , wyznaczono z dokładnością:

- dla punktów o wysokości równej i mniejszej od 200 m  $m_{\Delta g_c^*} = \pm 0.38 \text{ mGal}$
- dla punktów o wysokości większej od 200 m  $m_{\Delta g_c^*} = \pm 1.64 \text{ mGal}$ .

Porównując wartości anomalii w punktach pomiarowych z anomaliami uśrednionymi w siatce  $1000 \times 1000 \text{ m}$  wyznaczono błąd anomalii uśrednionych na poziomie:

- dla terenu o wysokości równej i mniejszej od 200 m  $\pm 0.7 \text{ mGal}$
- dla terenu o wysokości większej od 200 m  $\pm 2.3 \text{ mGal}$ .

Powyższe analizy odnoszą się do punktowych danych grawimetrycznych. Dokładność danych w postaci uśrednionych anomalii w siatkach rozdzielczości  $5' \times 5'$  oraz  $7.5' \times 5'$  oszacowano, korzystając z danych o błędach RMS zawartych na stronie internetowej Bureau Gravimétrique International oraz opierając się na szacunkowych formułach zawartych w pracy [Łyszczowicz 1999, s. 169]. Ostatecznie przyjęto do obliczeń średni błąd tych anomalii wynoszący  $\pm 2.3 \text{ mGal}$ .

Zgodnie z opisaną wcześniej procedurą wyznaczono różnice  $\Delta \zeta_{1\Delta g} = \zeta_{1\Delta g} - \zeta_{1\Delta g}^*$  (gdzie  $\zeta_{1\Delta g}^*$  jest składową wyznaczoną na podstawie zmienionych danych), których ważniejsze statystyki zawiera tabela 7.

Tabela 7. Wybrane statystyki składowych  $\Delta \zeta_{1\Delta g}$

Table 7. Selected statistics of  $\Delta \zeta_{1\Delta g}$

statystyka	Profile prostopadłe Perpendicular profiles			Profile równoległe Parallel profiles		
	1	2	3	1	2	3
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
$\max(\Delta \zeta_{1\Delta g})$	15.7	1.0	0.6	4.6	1.6	0.4
$\min(\Delta \zeta_{1\Delta g})$	-1.8	-3.5	-0.6	-12.0	-0.3	-0.4
$\text{RMS}(\Delta \zeta_{1\Delta g})$	7.4	1.3	0.4	4.3	0.6	0.2

Niżej zestawione są dodatkowo wybrane statystyki różnic  $\Delta\zeta_{\Delta g} = \zeta_{\Delta g} - \zeta_{\Delta g}^*$  (gdzie  $\zeta_{\Delta g}^*$  jest składową wyznaczoną na podstawie zmienionych danych) dla każdego profilu.

Tabela 8. Wybrane statystyki składowych  $\Delta\zeta_{\Delta g}$

Table 8. Selected statistics of  $\Delta\zeta_{\Delta g}$

statystyka	Profile prostopadłe Perpendicular profiles			Profile równoległe Parallel profiles		
	1	2	3	1	2	3
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
$\max(\Delta\zeta_{\Delta g})$	8.2	4.2	6.9	10.2	3.1	6.9
$\min(\Delta\zeta_{\Delta g})$	-9.4	-1.7	5.3	-6.3	1.5	4.8
$RMS(\Delta\zeta_{\Delta g})$	5.9	2.7	6.2	6.6	2.1	5.8

Zaprezentowane w tabelach 6 i 7 oszacowania błędów wyznaczonych składowych wydają się bardzo optymistyczne. Porównując jednakże wyniki zawarte w tabelach 7 i 8, zauważyć należy, że bardzo małe wartości błędów składowych  $\Delta\zeta_{1\Delta g}$  są w dużej mierze skutkiem znoszenia się błędów anomalii wspólnych dla punktów profilu. Szczegółową analizę tego problemu, jak i pełną analizę dokładności wyznaczanych różnic wysokości geoidy grawimetrycznej znaleźć można w pracy Łyszkowicz [1991].

## PODSUMOWANIE

Zaprezentowane w niniejszej pracy wyniki przeprowadzonych analiz skłaniają do następujących wniosków:

- W procesie interpolacji wysokości quasi-geoidy satelitarno-niwelacyjnej, jeżeli odległość punktów danych wynosi ok. 30 km, niezbędne jest wykorzystanie dodatkowych danych zarówno grawimetrycznych, jak i o topografii terenu. Brak tych danych może prowadzić do znacznych niedokładności wyników interpolacji (w przeprowadzonych obliczeniach testowych, nawet dla terenu płaskiego wykazano niedokładności sięgające 10 cm – profil P3 prostopadły).
- Dla analizowanych długości profili udowodniono zgodność przybliżenia sferycznego oraz płaskiego przy realizacji wzoru całkowego Stokesa. Biorąc pod uwagę nakład prac obliczeniowych, preferowane jest więc zastosowanie rozwiązania dla przybliżenia płaskiego w prostokątnym układzie współrzędnych. W przypadku obliczeń uwzględniających zaprezentowaną w pracy metodykę wykorzystania globalnego modelu geopotencjału, danych o topografii terenu oraz danych grawimetrycznych, wskazane jest wprowadzenie rozwiązania Pizzettiego, z pominięciem przeniesienia anomalii wysokości z powierzchni odniesienia do poziomu terenu.
- Chociaż wykorzystywane w niniejszej pracy anomalie grawimetryczne nie charakteryzują się dużą zmiennością, to wyznaczone na ich podstawie składowe obliczone z użyciem siatki biegunowej i prostokątnej różnią się mało (poniżej 0.5 cm) tylko dla profili P3 – najbardziej oddalonych od obszaru górskiego. Bliżej obszaru górskiego różnice te sięgają 1 cm, a w obszarze górskim nawet przekraczają 2 cm

(profil P1 – równoległy). Świadczy to o ogromnym znaczeniu sposobu wyznaczania siatki uśrednionych anomalii grawimetrycznych w procesie określania wpływu danych grawimetrycznych na wynik interpolacji wysokości quasi-geoidy.

- Przedstawiona w pracy metodyka wykorzystania globalnego modelu geopotencjału, danych o topografii terenu oraz danych grawimetrycznych pozwoliła na oszacowanie wpływu każdej z tych składowych na wynik interpolacji. Zgodność uzyskanych rezultatów z modelem quasi-geoidy „geoida niwelacyjna 2001”, wyznaczonym inną techniką, świadczy o poprawności zrealizowanych obliczeń.

## PIŚMIENNICTWO

- Baran L.W., Duchnowski R., 2005. Evaluation of the effect of systematic and random errors in gravity data on the quality of geoid model. Workshop II, Summary of the project on a cm geoid in Poland, Warszawa 2005.
- Bokun J., 1961. Zagadnienie wyznaczenia odstępów geoidy w Polsce od elipsoidy Krasowskiego biorąc pod uwagę posiadane materiały astronomiczno-geodezyjne i grawimetryczne. Prace Instytutu geodezji i Kartografii, Warszawa.
- Forsberg, Tscherning C., 1997. Topographic effects in gravity field modelling for BVP. Geodetic Boundary Value Problems in view of the one centimetre geoid. Lecture notes in earth science, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Heiskanen W.A., Moritz H., 1967. Physical geodesy. Freeman, San Francisco.
- Hofmann-Wellenhof B., Moritz H., 2005. Physical geodesy. SpringerWienNewYork 2005
- Kryński J., 2007. Precyzyjne modelowanie quasi-geoidy na obszarze Polski – wyniki i ocena dokładności. Instytut Geodezji i Kartografii, seria monograficzna nr 13. Warszawa.
- Kryński J., Osada E., Figurski M., 2005. GPS/Levelling data in Poland in view of precise geoid modelling, Workshop II: Summary of the project on a cm geoid in Poland 16-17 November 2005, Warsaw.
- Łyszkowicz A., 1991. Wyznaczanie różnic wysokości z wyników pomiarów GPS i odstępów geoidy od elipsoidy. Geodezja i Kartografia, T. XL, z. 2. Warszawa.
- Łyszkowicz A., 1993. The geoid for the area of Poland. Artificial satellites, Vol 28, No 2.
- Łyszkowicz A., 1998. The Polish gravimetric quasi-geoid QGEOID97 versus vertical reference system Kronsztad 86, Reports of the Finish Geodetic Institute, 98:4.
- Pażus R., Osada E., Olejnik S., 2002. Geoida niwelacyjna 2001. Magazyn Geoinformacyjny Geodeta, Nr 5(84), maj 2002.
- Sansò F. Rummel (Eds.), 1997. Lecture Notes in Earth Sciences. Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Sjöberg L.E., 2000. Topographic effects by the Stokes-Helmert method of geoid and quasi-geoid determination. Journal of Geodesy 74; Springer-Verlag, 255–268.
- Torge W., 1989. Gravimetry. Walter de Gruyter, Berlin, New York 1989.
- Torge W., 2001. Geodesy. Walter de Gruyter, Berlin, New York 2001.
- Tscherning C.C., 2001. Geoid determination after first satellite gravity missions. Paper prepared at the occasion of the 70 birthday of Wolfgang Torge.

**THE IMPORTANCE OF GRAVITY DATA, DIGITAL ELEVATION MODEL AND GLOBAL GEOPOTENTIAL MODEL EGM96 IN THE QUASI-GEOID HEIGHT INTERPOLATION PROBLEM CASE STUDY AT LOWER SILESIA**

**Abstract.** Points with known normal and ellipsoidal (obtained by satellite techniques) heights provides so-called satellite-leveling quasi-geoid models. An accuracy of the model depends on local disturbances of the quasi-geoid course between known points. In the paper there are estimated the disturbances produced by omission in such simple models an additional data like digital elevation model, gravity data and global geopotential model. Test calculations are related to the are of Lower Silesia and concerns mountains, mountains foreland and low-lying area. The analyses was made for the distance of 30 *km* between known points (approximate, mean distance between POLREF network points). Results of the performed calculations pointed to significant values of examined components for height anomaly interpolation even for low-lying area.

**Key words:** quasi-geoid height interpolation

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 25.09.2008

Do cytowania – For citation:.. Trojanowicz M., Znaczenie danych grawimetrycznych, numerycznego modelu terenu oraz globalnego modelu geopotencjału EGM96 w zagadnieniu interpolacji wysokości quasi-geoidy na przykładzie Dolnego Śląska. *Acta Sci. Pol. Geod. Descr. Terr.* 7(3), 15–36.