

MODELOWANIE PRZEPIYU CIEPŁA W PRZEGRODACH Z INSTALACJAMI CENTRALNEGO OGRZEWANIA METODĄ BRZEGOWYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

Tomasz Janusz TELESZEWSKI*, Sławomir Adam SORKO

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 A, 15-351 Białystok

Streszczenie: W artykule zaprezentowano algorytm obliczeń i wyniki obliczeń pól temperatury i przepływu ciepła w przegrodach budowlanych z instalacjami przewodów centralnego ogrzewania metodą brzegowych równań całkowych. Dla zobrazowania dokładności obliczeń zagadnień przepływu ciepła przy użyciu metody elementów brzegowych przedstawiono przykładowe wyniki obliczeń przenikania ciepła w ścianie zewnętrznej jednowarstwowej, porównując je z rezultatem rozwiązania analitycznego. W opracowaniu przedstawiono graficzne wyniki obliczeń pól temperatury, izoterm i adiabat oraz strumienia ciepła w przegrodach, w których znajdują się instalacje c.o. Dokonano porównania grafów cieplnych charakterystyk analizowanych elementów budowlanych z termogramami wykonanymi kamerą termowizyjną.

Słowa kluczowe: izolacje termiczne, metoda elementów brzegowych.

1. Wprowadzenie

Symulacje przepływu ciepła oraz rozkłady temperatury w przegrodach budowlanych pozwalają optymalnie zaprojektować izolacje cieplne oraz prawidłowo wyznaczyć charakterystykę cieplną budynku. Obecnie coraz częściej stosowane są metody numeryczne w projektowaniu, które pojawiają się w normach oraz wytycznych do projektowania. Istotny wpływ na charakterystykę energetyczną budynku mają instalacje centralnego ogrzewania, które są prowadzone w przegrodach budowlanych. Znajomość rozkładów temperatury w przegrodach, w których znajdują się instalacje centralnego ogrzewania, umożliwia właściwą ocenę izolacyjności przewodów przechodzących przez ściany i stropy oraz określenie i minimalizację strat ciepła.

Metody analityczne nie pozwalają na wyznaczenie pól temperatur dla skomplikowanych brzegów, natomiast metody siatkowe MRS, MES (Zienkiewicz i Taylor, 2000; Mitchell i Griffiths, 1980) wymagają przy złożonych kształtach analizowanych obiektów, dyskretyzacji obszarów, co istotnie komplikuje bardziej powszechne zastosowanie tych metod do analizy i optymalizacji zagadnień przepływu ciepła w instalacjach i urządzeniach ogrzewczych i klimatyzacyjnych w powiązaniu z właściwościami geometrycznymi i konstrukcyjnymi struktur budowlanych.

Metoda brzegowych równań całkowych (elementów brzegowych) jest pozbawiona wad metod siatkowych, bowiem nie wymaga dyskretyzacji obszaru rozwiązania, a jedynie jego brzegu, co zmniejsza o rząd wymiar zagadnienia obliczeniowego oraz pozwala na formułowanie złożonych warunków brzegowych i modelowanie obiektów o skomplikowanej geometrii.

2. Brzegowe równanie całkowe opisujące ustalone pole temperatury w obszarze płaskim

W wielu przypadkach przewodzenia ciepła, zagadnienia przestrzenne można uprościć do przepływów płaskich. Ustalone, bezźródłowe pole temperatury $T = T(V)$ w substancji jednorodnej jest opisane równaniem Laplace'a:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (1)$$

- z warunkiem brzegowym Dirichleta w postaci zadanej na brzegu obszaru wartości temperatury:

$$T(V)|_{V \equiv P} = T_L(P); \quad (P) \in L_q \quad (1.1)$$

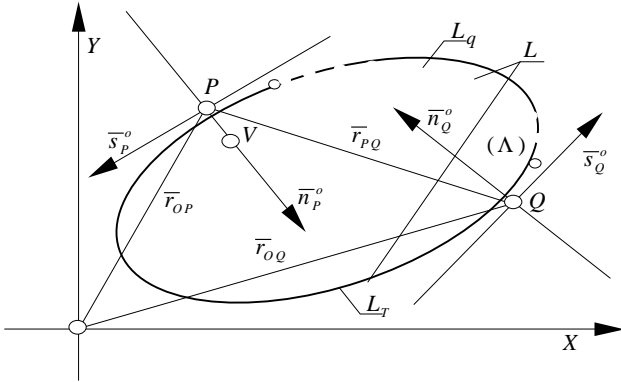
- z warunkiem brzegowym Neumanna z zadaną wartością normalnej do brzegu pochodnej temperatury, czyli

* Autor odpowiedzialny za korespondencję. E-mail: tjt@pb.edu.pl

wartością strumienia ciepłego:

$$-\lambda \frac{\partial T(V)}{\partial \bar{n}} \Big|_{V \equiv P} = q_L(P); \quad (V) \in L_q \quad (1.2)$$

gdzie λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła.



Rys. 1. Szkic do analizy zagadnień brzegowych w obszarze płaskim

Zakładając (rys. 1), że w obszarze płaskim (A) ograniczonym zamkniętym brzegiem (L) jest dane ustalone pole temperatury opisane równaniem różniczkowym (1) z warunkami brzegowymi (1.1, 1.2) przy założeniu, że na części (L_T) linii brzegowej (L) jest zadana funkcja $T(P)$; ($P \in (L_T)$), a na części (L_q) linii brzegowej (L) jest zadana funkcja $q(P) = -\lambda \frac{\partial T(P)}{\partial n} \Big|_P$ ($P \in (L_T)$) to przy zastosowaniu

kryterium odchyłek ważonych (Majchrzak, 2001; Brebbia i in., 1984), dla tak sformułowanego zagadnienia brzegowego dla równania Laplace'a w obszarze płaskim, otrzymuje się równanie całkowite:

$$-\chi(P)T(P) + \int_{(L_q)} q(Q)K(P,Q)dL_q - \int_{(L_t)} q(Q)E(P,Q)dL_T \quad (2)$$

gdzie

$$K(P,Q) = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \left(\frac{1}{r_{PQ}} \right); \quad r_{PQ} = |P-Q| \quad (2.1)$$

$(P) \in (L), (Q) \in (L)$

$$E(P,Q) = \frac{\partial (K(P,Q))}{\partial n_P} = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(\bar{n}_P; r_{PQ})}{r_{PQ}} = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_Q - x_P)n_x + (y_Q - y_P)n_y}{r_{PQ}} \quad (2.2)$$

$(P) \in (L), (Q) \in (L)$

Współczynnik $\chi(P)$ jest zależny od krzywizny krzywej

(L) w punkcie (P) i dla gładkiego fragmentu brzegu jest on równy $\chi(P) = 1/2$.

Po wyznaczeniu niewiadomych wartości temperatury $T(P)$ i gęstości strumienia ciepła $q(P)$ odpowiednio na częściach linii brzegowej (L_T) i (L_q) po rozwiązaniu równania całkowitego (2) temperaturę $T(V)$ w dowolnym punkcie $V \equiv \{x_V, y_V\}$ $V \in (A)$, obszaru płaskiego (A) wyznacza się ze związku:

$$T(V) = \int_{(L_T)} T(Q)E(V,Q)dL_T + \int_{(L_q)} q(Q)K(V,Q)dL_Q \quad (3)$$

$(Q) \in (L), (V) \in (A)$

Strumień ciepły jest równy:

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (4)$$

Składowe strumienia ciepłego $q_x(V)$; $q_y(V)$ we wnętrzu rozpatrywanego obszaru można wyznaczyć ze związków:

$$\left. \begin{aligned} q_x(V) &= \int_{(L_T)} T(Q) \frac{\partial E(V,Q)}{\partial x} dL_T + \int_{(L_q)} q(Q) \frac{\partial K(V,Q)}{\partial x} dL_Q \\ q_y(V) &= \int_{(L_T)} T(Q) \frac{\partial E(V,Q)}{\partial y} dL_T + \int_{(L_q)} q(Q) \frac{\partial K(V,Q)}{\partial y} dL_Q \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

gdzie:

$$\frac{\partial K(V,Q)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{x_Q - x_V}{r_{VQ}}; \quad r_{VQ} = |V-Q| \quad (5.1a)$$

$$\frac{\partial K(V,Q)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{y_Q - y_V}{r_{VQ}} \quad (5.1b)$$

$$\frac{\partial E(V,Q)}{\partial x_V} = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \left[\left[(y_Q - y_V)^2 - (x_Q - x_V)^2 \right] n_y + 2(x_Q - x_V)(y_Q - y_V)n_x \right] \quad (5.2a)$$

$$\frac{\partial E(V,Q)}{\partial y_V} = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \left[\left[(y_Q - y_V)^2 - (x_Q - x_V)^2 \right] n_x + 2(x_Q - x_V)(y_Q - y_V)n_y \right] \quad (5.2b)$$

gdzie n_x, n_y są wersorami normalnej \mathbf{n}_Q .

Moduł gęstości strumienia ciepłego jest równy:

$$q(V) = \sqrt{(q_x(V))^2 + (q_y(V))^2} \quad (6)$$

Wprowadzając równanie linii prądowych przepływu ciepła-adiabat:

$$d\Xi = q_x(V)dy - q_y(V)dx \quad (7)$$

z warunku ortogonalności układów adiabat i izoterm pola temperatury:

$$\frac{\partial T(V)}{\partial x} = \frac{\partial \Xi(V)}{\partial y} ; \quad \frac{\partial T(V)}{\partial y} = -\frac{\partial \Xi(V)}{\partial x} \quad (8)$$

otrzymuje się równanie adiabat:

$$\Xi(V) = \int_{(L_T)} T(Q)W(V, Q)dL_T + \int_{(L_Q)} q(Q)S(V, Q)dL_Q \quad (9)$$

gdzie:

$$S(V, Q) = \frac{1}{2\pi\lambda} \arctan\left(\frac{x_Q - x_V}{y_Q - y_V}\right) \quad (9.1)$$

$$W(V, Q) = \frac{1}{2\pi r_{VQ}^2} \left[(x_Q - x_V)n_y + (y_Q - y_V)n_x \right] \quad (9.2)$$

$$r_{VQ} = |V - Q| ; (V) \in (\Lambda), (Q) \in (L)$$

3. Ocena dokładności metody elementów brzegowych

W celu oceny dokładności metody brzegowych równań całkowych wykonano porównania rezultatów rozwiązania zagadnienia jednowymiarowego przenikania ciepła w ścianie zewnętrznej jednowarstwowej z betonu komórkowego o grubości $d = 40$ cm i współczynnika przewodzenia ciepła $\lambda = 0,075$ W/mK metodą brzegowych równań całkowych z wynikami obliczeń teoretycznych.

Na powierzchni zewnętrznej ściany przyjęto temperaturę $T_e = -22^\circ\text{C}$, a na powierzchni wewnętrznej $T_i = 20^\circ\text{C}$.

Rozkład temperatury w ścianie jest opisany zależnością liniową (Staniszewski, 1962):

$$T_{TH}(x) = T_e + (T_i - T_e) \frac{x}{d} \quad (10)$$

W przypadku metody brzegowych równań całkowych wykonano podział na 40 i 80 elementów brzegowych.

Błąd rozwiązania MEB dla wybranych punktów zestawiono w tabeli 1.

Względne błędy obliczeń poszczególnych temperatur do przedstawionych niżej zestawień graficznych i tabelarycznych wyznaczono z zależności:

$$\Delta T_{MEB} = \left| \frac{T_{TH} - T_{MEB}}{T_{TEO}} \right| * 100\% \quad (11)$$

Tab. 1. Jednowymiarowe przenikanie ciepła w ścianie zewnętrznej jednowarstwowej - błąd rozwiązania BEM

Współrzędne węzłów		Rozwiązanie teoretyczne	Rozwiązanie num. MEB	Błąd metody MEB
		40 el.		40 el.
X	Y	T_{TH}	T_{MEB}	ΔT_{MEB}
[cm]	[cm]	[°C]	[°C]	[%]
0,00E+00	0,00E+00	-2,2000000E+01	-2,1986000E+01	6,3636364E-02
0,00E+00	1,00E+01	-1,1500000E+01	-1,1526000E+01	2,2608696E-01
0,00E+00	2,00E+01	-1,0000000E+00	-9,9920000E-01	8,0000000E-02
0,00E+00	3,00E+01	9,5000000E+00	9,5251000E+00	2,6421053E-01
0,00E+00	4,00E+01	2,0000000E+01	1,9986000E+01	7,0000000E-02
Współrzędne węzłów		Rozwiązanie teoretyczne	Rozwiązanie num. MEB	Błąd metody MEB
		80 el.		40 el.
X	Y	T_{TH}	T_{MEB}	ΔT_{MEB}
[cm]	[cm]	[°C]	[°C]	[%]
0,00E+00	0,00E+00	-2,2000000E+01	-2,2004000E+01	1,8181818E-02
0,00E+00	1,00E+01	-1,1500000E+01	-1,1502000E+01	1,7391304E-02
0,00E+00	2,00E+01	-1,0000000E+00	-9,9999000E-01	1,0000000E-03
0,00E+00	3,00E+01	9,5000000E+00	9,5017000E+00	1,7894737E-02
0,00E+00	4,00E+01	2,0000000E+01	2,0004000E+01	2,0000000E-02

Błąd metody MEB w przypadku brzegu składającego się z 40 elementów nie przekracza 2,64210E-01 %, natomiast w przypadku brzegu złożonego z 80 elementów nie przekracza 2,00000E-02 %. Wraz ze wzrostem liczby elementów brzegowych zwiększa się dokładność metody.

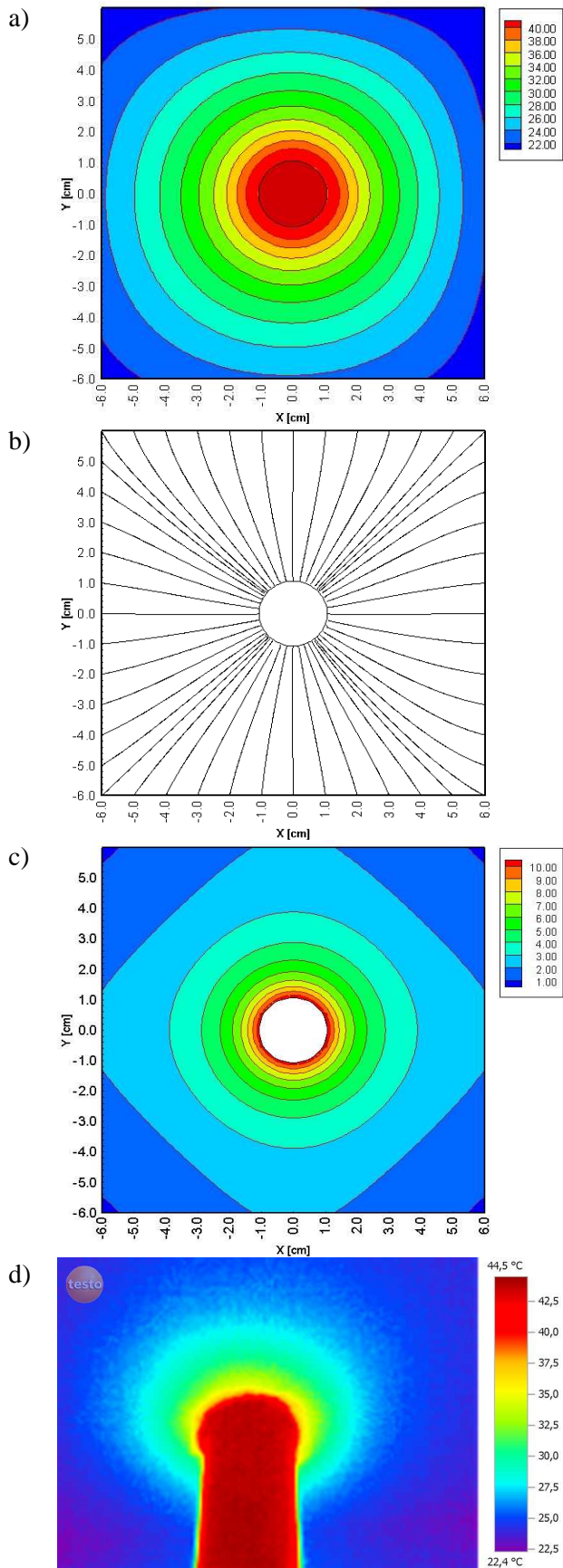
Niewielkie różnice pomiędzy rozwiązaniem analitycznym i MEB w odniesieniu do wyznaczanego rozkładu temperatury wskazują, że proponowane algorytmy obliczeniowe metody brzegowych równań całkowych charakteryzują się dużą dokładnością obliczeń.

4. Obliczenia pól temperatury i przepływu ciepła w przegrodach budowlanych z instalacjami c.o. metodą elementów brzegowych

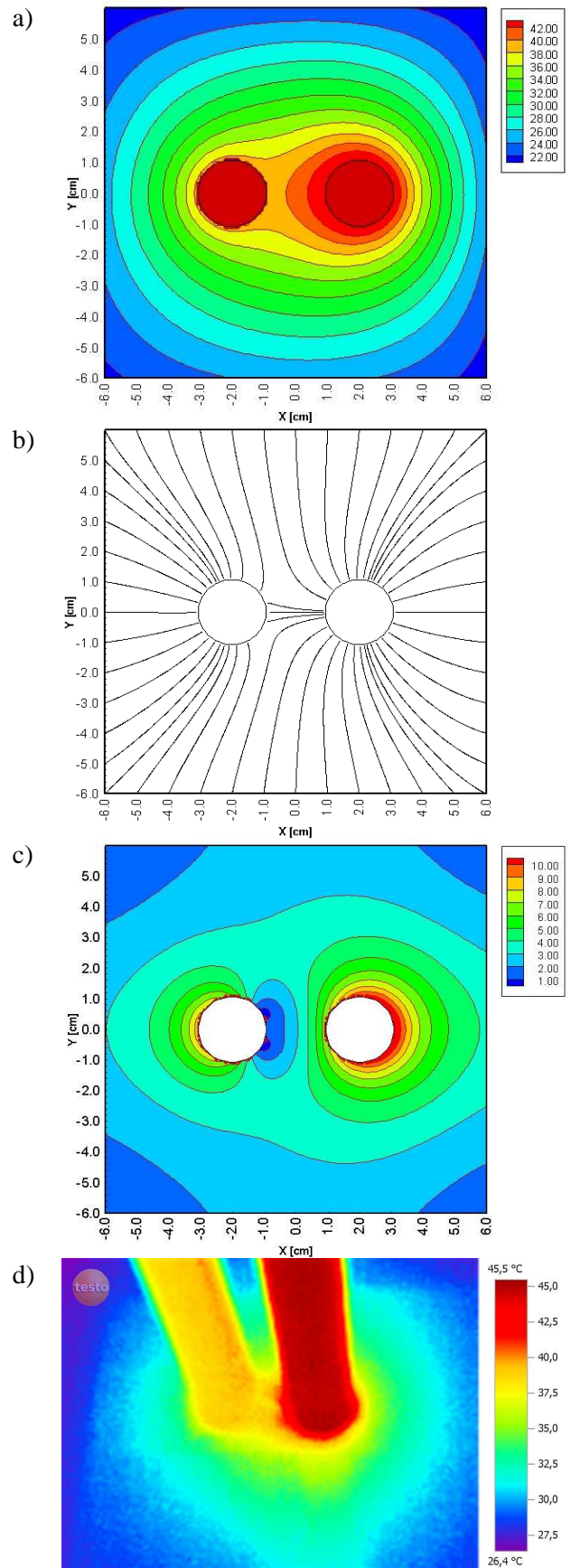
Niżej przedstawiono rezultaty obliczeń pól temperatury i linii przepływu ciepła w przegrodach, w których znajdują instalacje centralnego ogrzewania oraz ciepłej wody użytkowej. Obliczenia zostały przeprowadzone dla temperatury wewnątrz pomieszczeń równej 19°C .

Pierwszy przypadek dotyczy rozkładu temperatury w stropie żelbetowym o współczynnika przewodzenia ciepła $\lambda = 1,70$ W/mK przez który przechodzi stalowy pionowy przewód centralnego ogrzewania wodnego jednorurowego bez izolacji termicznej o średnicy zewnętrznej 21,3 mm. przy temperaturze na ścianie zewnętrznej przewodu 44°C .

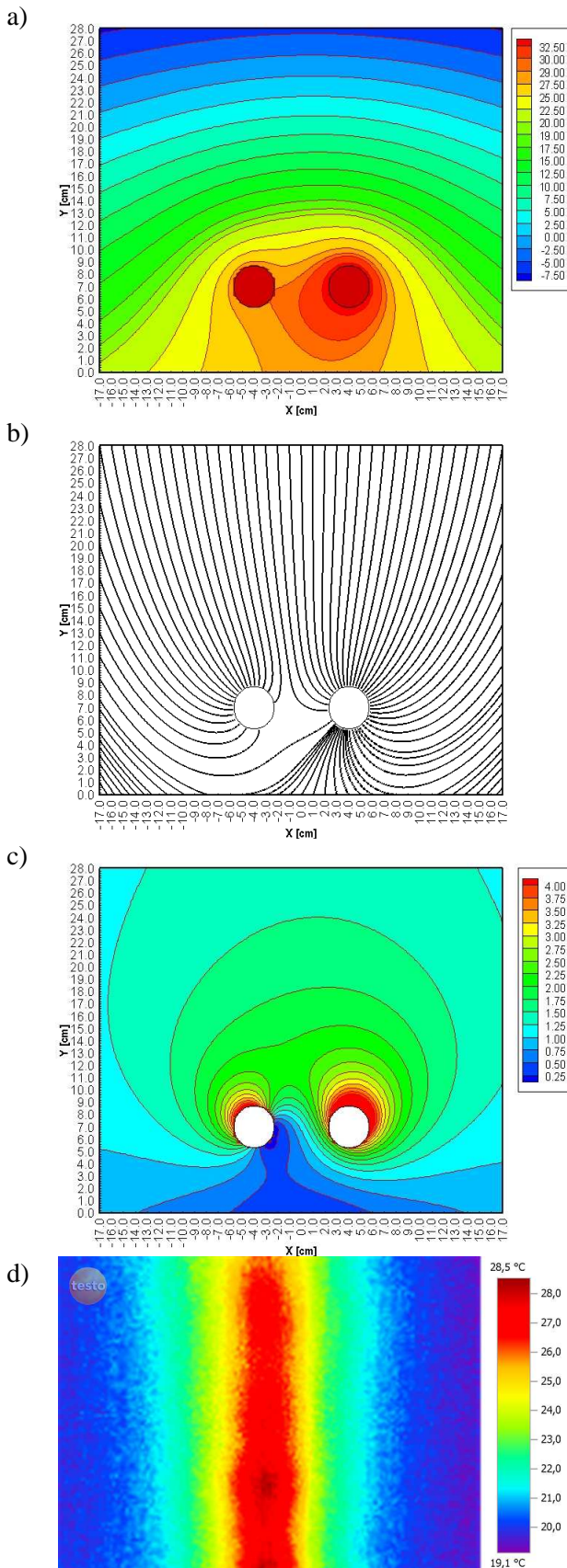
Rysunek 2a przedstawia izotermy wyznaczone metodą elementów brzegowych, na rysunku 2b wykreślono adiabatę, natomiast na rysunku 2c wyznaczono moduł gęstości strumienia ciepła. W celu sprawdzenia trendów izoterm, wykonano zdjęcie termowizyjne stropu w miejscu gdzie pion przechodzi w przez strop (rys. 2d).



Rys. 2. Przenikanie ciepła przez strop – pion instalacji centralnego ogrzewania wodnego jednorurowego przechodzący przez strop: a) izotermy, b) adiabaty, c) moduł gęstości strumienia ciepła, d) termogram powierzchni stropu



Rys. 3. Przenikanie ciepła przez strop – pion instalacji centralnego ogrzewania wodnego dwururowego przechodzący przez strop: a) izotermy, b) adiabaty, c) moduł gęstości strumienia ciepła, d) termogram powierzchni stropu



Rys. 4. Przenikanie ciepła przez ścianę – pion centralnego ogrzewania dwururowego prowadzony w bruździe: a) izotermy, b) adiabaty, c) moduł gęstości strumienia ciepła, d) termogram powierzchni wewnętrznej ściany zewnętrznej w miejscu położenia instalacji c.o. w bruździe.

W drugim przypadku wyznaczono rozkład temperatury w stropie żelbetowym z pionem ogrzewania wodnego dwururowego wykonanego z przewodów stalowych o średnicach wewnętrznych 21,3 mm, w którym temperatura powierzchni przewodu zasilającego wynosi 45°C, natomiast temperatura powierzchni przewodu powrotnego wynosi 39°C. Na rysunkach 3a-c wykreślono graficzne rezultaty obliczeń izoterm, adiabat oraz modułu gęstości strumienia ciepła metodą brzegowych równań całkowitych. Rysunek 3d przedstawia termogram rozkładu temperatury na powierzchni stropu. Adiabaty na rysunku 3b wskazują na wymianę ciepła między przewodem zasilającym i przewodem powrotnym instalacji centralnego ogrzewania.

Niżej przedstawiono rozwiązanie pola temperatury w przekroju poprzecznym ściany zewnętrznej murowanej z gazobetonu ($\lambda = 0.35 \text{ W/mK}$) o grubości 24 cm obustronnie otynkowanej tynkiem cementowo-wapiennym ($d = 0.02 \text{ m}$, $\lambda = 0.35 \text{ W/mK}$), w której znajduje się pion centralnego ogrzewania dwururowego prowadzony w bruździe. Przewody c.o. o średnicach zewnętrznych 21,3 mm, mają izolację z pianki polietylenowej o grubości 6 mm laminowanej z zewnątrz folią polietylenową. Zmierzona temperatura na powierzchni izolacji wynosi 34°C dla przewodu zasilającego oraz 29°C dla powrotu, natomiast temperatura zewnętrzna wyniosła -11°C.

Rysunki 4a-c zawierają graficzne rezultaty obliczeń metodą brzegowych równań całkowitych izoterm, adiabat oraz modułu gęstości strumienia ciepła. Rysunek 4d przedstawia termogram ściany wewnątrz budynku w miejscu, gdzie prowadzony jest pion w bruździe. Trendy izoterm przepływu ciepła otrzymane kamerą termowizyjną (rys. 4d) są zbliżone z wynikami otrzymanymi metodą brzegowych równań całkowitych.

5. Podsumowanie

Przedstawione w pracy przykłady obliczeniowe wskazują na znaczny wpływ temperatury instalacji centralnego ogrzewania na temperaturę wewnątrz przegrody oraz pokazują, jak ważne jest prawidłowe wykonanie izolacji termicznej przewodów c.o. przechodzących przez przegrody budowlane. W przypadku instalacji dwururowych również następuje wymiana ciepła między przewodem zasilającym i przewodem powrotnym. Znajomość pól temperatur, strumieni ciepła w warunkach pracy instalacji centralnego ogrzewania pozwala na określenie wpływu tych instalacji na bilans cieplny budynku.

Zaprojektowany algorytm pozwala rozwiązywać zagadnienie przewodnictwa cieplnego o bardzo złożonej geometrii. Zaletą MEB jest możliwość rozwiązywania zagadnień dla obszarów półskończonych i nieskończonych. Metoda elementów brzegowych stanowi alternatywę, wobec najczęściej stosowanych metod siatkowych, tj. metody elementów skończonych oraz metody różnic skończonych w zagadnieniach inżynierskich. Główną zaletą metody brzegowych równań całkowitych jest pominięcie budowania pracobłonnnych

siatek numerycznych, które są stosowane w metodach obszarowych. Duża dokładność MEB świadczy o tym, że jest to metoda bardzo atrakcyjna i trwają prace nad jej doskonaleniem.

Literatura

- Brebbia C.A., Telles J.F.C., Wrobel L.C. (1984). Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering. *Springer-Verlag*, NY.
- Majchrzak E. (2001). Metoda elementów brzegowych w przepływie ciepła. *Wyd. Pol. Częstochowskiej*.
- Mitchell A.R., Griffiths D.F. (1980). The finite difference method in partial differential equations. *Wiley-Interscience*, Chichester, Sussex, England and New York, Wiley-Interscience.
- Staniszewski B. (1962). Termodynamika. *PWN*.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L (2000). The Finite Element Method. Daniel D.E. (Ed.). *Butterworth-Heinemann*, NY.

MODELLING OF TRANSIENT HEAT CONDUCTION IN WALLS WITH HEATING INSTALLATIONS BY MEANS OF THE BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS METHOD

Abstract: The paper aim was to present a solution concerning heat conduction problem using boundary element method in walls with central heating. The boundary integral equation method is a numerical method for solving partial differential equations encountered in mathematical physics and engineering. Only the boundary distributions of the unknown functions or one of its derivatives were solved in this method. The boundary integral equation method is the reduction of the dimension of the solution space with respect to physical space by one unit. The boundary element method is an alternative to the finite difference method and the finite element method. Numerical solutions were compared with the results of the theoretical solutions. Examples of heat calculations were presented.

Pracę wykonano w ramach pracy statutowej S/WBiŚ/23/08
Praca współfinansowana ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
nr umowy WIEM/POKL/MD/II/2010/6