

ZASTOSOWANIE TEORII ZBIORÓW ROZMYTYCH W HARMONOGRAMOWANIU ROBÓT BUDOWLANYCH METODĄ ŁAŃCUCHA KRYTYCZNEGO

Janusz KULEJEWSKI*, Nabi IBADOV, Bogdan ZIELIŃSKI

Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska, Al. Armii Ludowej 16, 00-637 Warszawa

Streszczenie: W referacie przedstawiono nowe podejście do problemu harmonogramowania robót budowlanych metodą łańcucha krytycznego. Nowością przedstawionego podejścia jest uwzględnienie nieprecyzyjnie określonych parametrów rozkładu prawdopodobieństwa czasów wykonania robót. W celu identyfikacji łańcucha krytycznego oraz wyznaczenia buforów w harmonogramie budowy, wykorzystano teorię zbiorów rozmytych oraz zmodyfikowane zasady arytmetyki liczb rozmytych. Dla wyznaczenia buforowanego harmonogramu nierozmytego, wykorzystano koncepcję α -przekrojów liczby rozmytej. Poprawność przyjętych założeń wykazano na podstawie wyników przeprowadzonych symulacji.

Słowa kluczowe: łańcuch krytyczny, buforowanie harmonogramu, zbiory rozmyte.

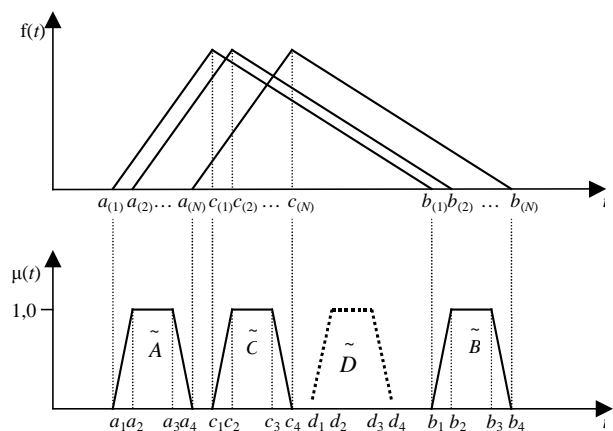
1. Wstęp

Coraz częściej w zarządzaniu projektami stosuje się metodę łańcucha krytycznego, wprowadzoną przez Goldratta (1997). Charakterystyczną cechą projektów budowlanych jest niepowtarzalność warunków realizacji robót. Dlatego, opinie ekspertów o wpływie różnych czynników na czas wykonania danej roboty mogą być zróżnicowane. Wtedy, parametry rozkładów prawdopodobieństwa czasu wykonania tej roboty nie zostają precyzyjnie określone. Teoria zbiorów rozmytych umożliwia wykorzystanie nieprecyzyjnych informacji w procesach zarządzania projektami (Kuchta, 2001). Celem artykułu jest przedstawienie możliwości wykorzystania teorii zbiorów rozmytych w metodzie łańcucha krytycznego.

2. Ustalenie rozmytych parametrów rozkładów prawdopodobieństwa czasów wykonania poszczególnych robót

Założmy, że N ekspertów szacuje nieznaną czas wykonania pewnej roboty. Zgadzą się, że czas jej wykonania jest zmienną losową o trójkątnym rozkładzie prawdopodobieństwa z parametrami a (czas optymistyczny), b (czas pesymistyczny) i c (czas najbardziej prawdopodobny). Natomiast, różnią się

w ocenach wartości liczbowych parametrów tego rozkładu (rys. 1).



Rys. 1. Modelowanie opinii ekspertów – transformacja kształtu opinii

Niech A oznacza zbiór możliwych wartości parametru a . Jeżeli, w opinii ekspertów, każda z wartości $a(1), a(2), \dots, a(N)$ w jednakowym stopniu przynależy do zbioru A , to nieprecyzyjnie określoną wartość parametru a modeluje liczba przedziałowa $\tilde{A} = [a(1), a(N)]$. Natomiast, jeżeli niektóre z wartości $a(1), a(2), \dots, a(N)$ parametru a przynależą, w opinii ekspertów, do zbioru A w wyższym stopniu niż pozostałe, to nieprecyzyjnie

* Autor odpowiedzialny za korespondencję. E-mail: j.kulejewski@il.pw.edu.pl

określoną wartość parametru a modeluje liczba rozmyta \tilde{A} .

Założmy, że eksperci oceniają, iż do zbioru A w najwyższym stopniu przynależy wartość parametru a , wyznaczona jako:

$$a_{sr} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n, \quad (1)$$

gdzie: N jest liczbą ekspertów, a a_n jest wartością oceny według n -tego eksperta.

W takim przypadku, nieprecyzyjnie określoną wartość parametru a modeluje trójkątna liczba rozmyta $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$, gdzie $a_1 = a_{(1)}$, $a_2 = a_{sr}$, $a_3 = a_{(N)}$. Z kolei, gdy eksperci oceniają, iż wartości parametru a z pewnego podprzedziału $[a_2, a_3] \in [a_{(1)}, a_{(N)}]$ przynależą do zbioru A w stopniu wyższym, niż inne wartości parametru a z przedziału $[a_{(1)}, a_{(N)}]$, to nieprecyzyjnie określoną wartość parametru a modeluje liczba rozmyta trapezowa $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ gdzie $a_1 = a_{(1)}$, $a_4 = a_{(N)}$. W podobny sposób można modelować nieprecyzyjnie określone wartości parametrów b oraz c .

W referacie, zajmujemy się przypadkiem modelowania wartości parametrów a , b i c za pomocą liczb rozmytych

$$\tilde{A} = \tilde{T}_{jopt}, \quad \tilde{C} = \tilde{T}_{jnp}, \quad \tilde{B} = \tilde{T}_{jpes} \quad \text{o trapezowych}$$

funkcjach przynależności. Mediany $\tilde{T}_{j0,5}$ rozkładów prawdopodobieństwa czasów wykonania poszczególnych robót wyznaczamy na podstawie opinii ekspertów, modelowanych za pomocą funkcji przynależności jak na rysunku 1.

Korzystając z właściwości rozkładu trójkątnego, można wyznaczyć liczby rzeczywiste w uporządkowanej czwórce tworzącej rozmytą medianę

$$\tilde{T}_{j0,5} = \tilde{D} = (d_{j,1}, d_{j,2}, d_{j,3}, d_{j,4}):$$

$$d_{j,k} = \begin{cases} a_{j,k} + \frac{\sqrt{(b_{j,k} - a_{j,k})(c_{j,k} - a_{j,k})}}{\sqrt{2}}; & k=1, \dots, 4 \mid c_{j,k} > \frac{b_{j,k} - a_{j,k}}{2} \\ b_{j,k} - \frac{\sqrt{(b_{j,k} - a_{j,k})(b_{j,k} - c_{j,k})}}{\sqrt{2}}; & k=1, \dots, 4 \mid c_{j,k} \leq \frac{b_{j,k} - a_{j,k}}{2} \end{cases} \quad (2)$$

3. Wyznaczenie harmonogramu rozmytego dla pesymistycznych oszacowań czasów wykonania robót

Prade (1979) oraz Chanas i Kamburowski (1981) wykazali możliwość wyznaczania najwcześniejszych terminów rozmytych rozpoczynania \tilde{ES}_j i zakończenia \tilde{EF}_j poszczególnych robót na podstawie poniższych zależności:

$$\tilde{ES}_j = \max_{i \in \text{Prec}\{j\}} \{\tilde{ES}_i \oplus \tilde{T}_i\}, \quad (3)$$

$$\tilde{EF}_j = \tilde{ES}_j \oplus \tilde{T}_j, \quad j=1, 2, \dots, J, \quad (4)$$

gdzie $\text{Prec}\{j\}$ jest zbiorem poprzedników czynności j w modelu sieciowym budowy.

Rozmyty termin \tilde{T} zakończenia realizacji budowy można ustalić jako (Lorterapong i Moselhi, 1996):

$$\tilde{T} = \tilde{EF}_J. \quad (5)$$

Z kolei, do wyznaczania rozmytych terminów najpóźniejszych można wykorzystać następujące zależności (np. Hapke i Słowiński, 1996):

1) dla wyznaczenia terminu najpóźniejszego zakończenia

$$\tilde{LF}_i \text{ roboty } i:$$

$$\tilde{LF}_i = \min_{j \in \text{Succ}\{i\}} \{\tilde{LF}_j \oplus (-\tilde{T}_j)\} \text{ gdy } \text{Succ}\{i\} \neq \emptyset, \quad (6)$$

$$\tilde{LF}_i = \tilde{T} \text{ gdy } \text{Succ}\{i\} = \emptyset, \quad (7)$$

gdzie $\text{Succ}\{i\}$ jest zbiorem następników czynności i w modelu sieciowym budowy;

2) dla wyznaczenia terminu najpóźniejszego rozpoczęcia \tilde{LS}_i roboty i :

$$\tilde{LS}_i = \tilde{LF}_i \oplus (-\tilde{T}_i). \quad (8)$$

Jednak, dla dwóch liczb rozmytych $\tilde{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ i $\tilde{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ nie zachodzą zależności, oczywiste dla dwóch liczb rzeczywistych x i y . Dlatego, jeżeli operację odejmowania liczb rozmytych przeprowadza się zgodnie z zależnością podaną przez Dubois i Prade (1978):

$$\tilde{X} \oplus (-\tilde{Y}) = (x_1 - y_4, x_2 - y_3, x_3 - y_2, x_4 - y_1), \quad (9)$$

to liczba $\tilde{Z} = \tilde{X} \oplus (-\tilde{Y})$ może zawierać składniki ujemne. Utrudnia to analizę rozmytego modelu sieciowego budowy. W celu usunięcia tej trudności, można wykorzystać modyfikację odejmowania trapezowych liczb rozmytych, podaną przez Ramika i Rommelfangera (1995). Zgodnie z tą modyfikacją, składniki uporządkowanej czwórki tworzącej liczbę $\tilde{Z} = \tilde{X} \oplus (-\tilde{Y})$ wyznacza się następująco:

$$z_1 = \max\{0, (x_1 - y_1)\} - \max\{0, ((x_2 - y_2) - (x_3 - y_3))\} - \max\{0, (y_4 - x_4)\}, \quad (10)$$

$$z_2 = \min\{(x_2 - y_2), (x_3 - y_3)\} - \max\{0, (y_4 - x_4)\}, \quad (11)$$

$$z_3 = x_3 - y_3 - \max\{0, (y_4 - x_4)\}, \quad (12)$$

$$z_4 = \max\{0, (x_4 - y_4)\}. \quad (13)$$

Jeżeli pesymistyczny czas wykonania roboty j jest wyrażony przez liczbę $\tilde{T}_{j\text{pes}} = (b_{j,1}, b_{j,2}, b_{j,3}, b_{j,4})$, a najpóźniejszy termin zakończenia roboty j jest wyrażony przez liczbę $\tilde{LF}_{j\text{pes}} = (lf_{j,1}, lf_{j,2}, lf_{j,3}, lf_{j,4})$, to na podstawie wzorów (10) - (13) można wyznaczyć składniki uporządkowanej czwórki tworzącej liczbę $\tilde{LS}_{j\text{pes}} = \tilde{LF}_{j\text{pes}} \oplus (-\tilde{T}_{j\text{pes}})$. Dzięki temu, można opracować rozmyty harmonogram budowy dla najpóźniejszych terminów realizacji robót o czasach wykonania $\tilde{T}_{j\text{pes}}$.

4. Identyfikacja łańcucha krytycznego i wyznaczenie buforów

W celu identyfikacji łańcucha krytycznego i wyznaczenia buforów, najpierw ustalamy długość \tilde{L}_k każdej ścieżki p_k w modelu sieciowym budowy. Do obliczeń przyjmujemy czasy wykonania $\tilde{T}_{j\text{pes}}$ poszczególnych robót. Wykorzystując metodę porównywania liczb rozmytych podaną przez Kuchtę (2001), wyznaczamy stopień możliwości $\Pi(\tilde{L}_k \geq \tilde{L}_n); k \neq n$, że ścieżka p_k nie okaże się krótsza od ścieżki p_n . Niech $L_k^t = [l_{kL}^t, l_{kU}^t]$, $L_n^t = [l_{nL}^t, l_{nU}^t]$ będą t -poziomami liczb \tilde{L}_k i $\tilde{L}_n, t \in [0, 1]$. Wówczas:

$$\Pi(\tilde{L}_k \geq \tilde{L}_n) = \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \sup\{t: l_{kU}^t \geq l_{nL}^t, t \in [0, 1]\}. \quad (14)$$

Z kolei, wykorzystując metodę podaną przez Changa (1996), wyznaczamy stopień możliwości, że ścieżka p_k nie okaże się krótsza od żadnej z pozostałych ścieżek w modelu sieciowym budowy:

$$\Pi(\tilde{L}_k \geq \tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_n) = \min \Pi(\tilde{L}_k \geq \tilde{L}_i); \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; k \in \mathbf{P}; n \in \mathbf{P}; k \neq n,$$

gdzie \mathbf{P} jest zbiorem ścieżek w modelu sieciowym.

Jako łańcuch krytyczny (CC), wybieramy ścieżkę p_k o maksymalnej wartości stopnia możliwości

$$\Pi(\tilde{L}_k \geq \tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_n); k \in \mathbf{P}; n \in \mathbf{P}; k \neq n.$$

Jednocześnie, identyfikujemy łańcuchy zasilające (FC).

Następnie, wyznaczamy rozmytą rezerwę \tilde{R}_j czasu wykonania każdej roboty:

$$\tilde{R}_j = \tilde{T}_{j\text{pes}} - \tilde{T}_{j0,5}. \quad (16)$$

Do operacji odejmowania liczb rozmytych, wykorzystujemy wzory (10)-(13).

Należy zwrócić uwagę, że ze względu na sposób wyznaczenia rozmytych parametrów trójkątnego rozkładu prawdopodobieństwa czasu wykonania roboty budowlanej, każda rezerwa R_j okazuje się być singletonem: $\tilde{R}_j = (r_j, r_j, r_j, r_j)$. Na tej podstawie, wyznaczamy:

– bufor projektu PB :

$$PB = \sqrt{\sum_{k \in CC} r_k^2}, \quad (17)$$

gdzie k jest indeksem danej czynności w łańcuchu krytycznym,

– buforzy zasilające FB_n :

$$FB_n = \sqrt{\sum_{m \in FC_n} r_m^2}, \quad (18)$$

gdzie: n jest indeksem danego łańcucha zasilającego, a m jest indeksem kolejnej czynności w tym łańcuchu.

5. Wyznaczenie zbuforowanego harmonogramu nierozmytego

W celu wyznaczenia zbuforowanego harmonogramu nierozmytego, sporządzamy harmonogram rozmyty dla najpóźniejszych terminów realizacji czynności o czasach

wykonania zredukowanych z $\tilde{T}_{j\text{pes}}$ do $\tilde{T}_{j0,5}$.

Do uzyskanego harmonogramu rozmytego, wprowadzamy buforzy zasilające (FB). Następnie, wyznaczamy terminy

rozpoczynania \tilde{S}_j i zakończenia \tilde{F}_j poszczególnych robót, wynikające z redukcji czasów wykonania czynności i wprowadzenia buforów zasilających. Zbuforowany harmonogram nierozmyty uzyskujemy, dokonując przekroju zbuforowanego harmonogramu rozmytego na określonym poziomie pewności oszacowań czasów wykonania robót α i przyjmując określoną wartość wskaźnika akceptacji ryzyka β . Wartości α i β są dobierane subiektywnie przez planistę.

$$\text{Niech } S_j^\alpha = [s_{jL}^\alpha, s_{jU}^\alpha], \quad F_j^\alpha = [f_{jL}^\alpha, f_{jU}^\alpha] \text{ będą}$$

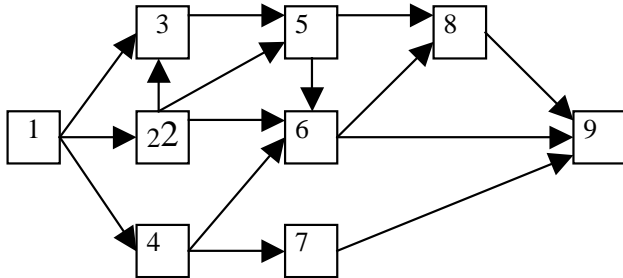
α -przekrojami liczb \tilde{S}_j i $\tilde{F}_j, \alpha \in [0, 1]$. Wówczas, terminy realizacji robót w zbuforowanym harmonogramie nierozmytym ustalamy na podstawie zależności:

$$s_j = \beta s_{jL}^\alpha + (1 - \beta) s_{jU}^\alpha, \quad (19)$$

$$f_j = \beta f_{jL}^\alpha + (1-\beta) f_{jU}^\alpha. \quad (20)$$

6. Przykład liczbowy

Rozpatrujemy przykładowy model sieciowy budowy jak na rysunku 2.



Rys. 2. Przykładowy model sieciowy budowy

W tabeli 1 zestawiono wyniki modelowania opinii ekspertów o parametrach trójkątnego rozkładu prawdopodobieństwa czasu wykonania każdej roboty (rys. 1). Na tej podstawie, można wyznaczyć najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy realizacji

czynności o czasach wykonania \tilde{T}_{jpes} . Wyniki zestawiono w tabeli 2.

Tab. 1. Rozmyte parametry trójkątnego rozkładu prawdopodobieństwa czasów wykonania robót w modelu sieciowym według rysunku 2; dane w dniach roboczych

Czynność, j	$\tilde{A} = \tilde{T}_{jopt}$	$\tilde{C} = \tilde{T}_{jnp}$	$\tilde{B} = \tilde{T}_{jpes}$	$\tilde{D} = \tilde{T}_{j0,5}$
1	(2, 4, 6, 8)	(5, 7, 9, 11)	(6, 8, 10, 12)	(4.4, 6.4, 8.4, 10.4)
2	(4, 7, 8, 11)	(7, 10, 11, 14)	(8, 11, 12, 15)	(6.4, 9.4, 10.4, 13.4)
3	(3, 4, 5, 6)	(7, 8, 9, 10)	(9, 10, 11, 12)	(6.5, 7.5, 8.5, 9.5)
4	(6, 7, 8, 9)	(8, 9, 10, 11)	(13, 14, 15, 16)	(8.6, 9.6, 10.6, 11.6)
5	(4, 5, 7, 8)	(6, 7, 9, 10)	(9, 10, 12, 13)	(6.2, 7.2, 9.2, 10.2)
6	(2, 3, 4, 5)	(6, 7, 8, 9)	(7, 8, 9, 10)	(5.2, 6.2, 7.2, 8.2)
7	(2, 3, 5, 6)	(6, 7, 9, 10)	(9, 10, 12, 13)	(5.7, 6.7, 8.7, 9.7)
8	(4, 5, 6, 7)	(7, 8, 9, 10)	(9, 10, 11, 12)	(6.7, 7.7, 8.7, 9.7)
9	(3, 4, 6, 7)	(4, 5, 7, 8)	(8, 9, 11, 12)	(4.6, 5.6, 7.6, 8.6)

Tab. 2. Najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy realizacji czynności w modelu sieciowym według rysunku 2 dla pesymistycznych czasów wykonania robót

Czynność, j	\tilde{ES}_{jpes}	\tilde{EF}_{jpes}	\tilde{LS}_{jpes}	\tilde{LF}_{jpes}
1	(0, 0, 0, 0)	(6, 8, 10, 12)	(0, 0, 0, 0)	(6, 8, 10, 12)
2	(6, 8, 10, 12)	(14, 19, 22, 27)	(6, 8, 10, 12)	(14, 19, 22, 27)
3	(14, 19, 22, 27)	(23, 29, 33, 39)	(14, 19, 22, 27)	(23, 29, 33, 39)
4	(6, 8, 10, 12)	(19, 22, 25, 28)	(19, 25, 30, 36)	(32, 39, 45, 52)
5	(23, 29, 33, 39)	(32, 39, 45, 52)	(23, 29, 33, 39)	(32, 39, 45, 52)
6	(32, 39, 45, 52)	(39, 47, 54, 62)	(32, 39, 45, 52)	(39, 47, 54, 62)
7	(19, 22, 25, 28)	(28, 32, 37, 41)	(39, 47, 53, 61)	(48, 57, 65, 74)
8	(39, 47, 54, 62)	(48, 57, 65, 74)	(39, 47, 54, 62)	(48, 57, 65, 74)
9	(48, 57, 65, 74)	(56, 66, 76, 86)	(48, 57, 65, 74)	(56, 66, 76, 86)

Dla czasów wykonania \tilde{T}_{jpes} , wyznaczamy możliwe ścieżki krytyczne w modelu sieciowym budowy według rysunku 2:

$$p_1 = 1-2-3-5-6-8-9, \tilde{L}_1 = (56, 66, 76, 86);$$

$$p_2 = 1-4-6-8-9, \tilde{L}_2 = (43, 49, 56, 62);$$

$$p_3 = 1-4-7-9, \tilde{L}_3 = (36, 41, 48, 53).$$

Wykorzystując zależność (14), wyznaczamy stopień możliwości $\Pi(L_k \geq \tilde{L}_n); k=1,2,3; n=1,2,3; k \neq n$, że ścieżka p_k nie okaże się krótsza od ścieżki p_n :

$$\Pi(\tilde{L}_1 \geq \tilde{L}_2) = 1, \Pi(\tilde{L}_1 \geq \tilde{L}_3) = 1;$$

$$\Pi(\tilde{L}_2 \geq \tilde{L}_1) = 0.375, \Pi(\tilde{L}_2 \geq \tilde{L}_3) = 1;$$

$$\Pi(\tilde{L}_3 \geq \tilde{L}_1) = 0, \Pi(\tilde{L}_3 \geq \tilde{L}_2) = 0,909.$$

Na podstawie zależności (15), wyznaczamy stopień możliwości, że ścieżka p_k nie okaże się krótsza od żadnej z pozostałych ścieżek w modelu sieciowym budowy:

$$\Pi(\tilde{L}_1 \geq \tilde{L}_2, \tilde{L}_3) = \min(1, 1) = 1;$$

$$\Pi(\tilde{L}_2 \geq \tilde{L}_1, \tilde{L}_3) = \min(0.375, 1) = 0,375;$$

$$\Pi(\tilde{L}_3 \geq \tilde{L}_1, \tilde{L}_2) = \min(0, 0.909) = 0.$$

Jako łańcuch krytyczny (CC) w modelu sieciowym budowy według rysunku 2, wybieramy ścieżkę p_1 . Ustalamy również, że do pierwszego łańcucha zasilającego (FC_I) należy czynność $j = 4$, a do drugiego łańcucha zasilającego (FC_{II}) – czynność $j = 7$.

Dla każdej czynności, wyznaczamy rezerwę czasu \tilde{R}_j . Wyniki zestawiono w tabeli 3.

Na tej podstawie, wyznaczamy bufor projektu:

$$PB = \sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_5^2 + r_6^2 + r_8^2 + r_9^2)} = 6.3,$$

oraz buforzy zasilające:

$$FB_I = \sqrt{(r_4^2)} = 4.4,$$

$$FB_{II} = \sqrt{(r_7^2)} = 3.3.$$

Następnie, redukujemy czasy wykonania czynności i wprowadzamy buforzy zasilające. Wyniki zestawiono w tabeli 4.

Tab. 3. Rezerwy czynności w modelu sieciowym według rysunku 2

Czynność, j	\tilde{T}_{jpes}	$\tilde{T}_{j0,5}$	$\tilde{R}_j = \tilde{T}_{jpes} - \tilde{T}_{j0,5}$	r_j
1	(6, 8, 10, 12)	(4.4, 6.4, 8.4, 10.4)	(1.6, 1.6, 1.6, 1.6)	1,6
2	(8, 11, 12, 15)	(6.4, 9.4, 10.4, 13.4)	(1.6, 1.6, 1.6, 1.6)	1,6
3	(9, 10, 11, 12)	(6.5, 7.5, 8.5, 9.5)	(2.5, 2.5, 2.5, 2.5)	2,5
4	(13, 14, 15, 16)	(8.6, 9.6, 10.6, 11.6)	(4.4, 4.4, 4.4, 4.4)	4,4
5	(9, 10, 12, 13)	(6.2, 7.2, 9.2, 10.2)	(2.8, 2.8, 2.8, 2.8)	2,8
6	(7, 8, 9, 10)	(5.2, 6.2, 7.2, 8.2)	(1.8, 1.8, 1.8, 1.8)	1,8
7	(9, 10, 12, 13)	(5.7, 6.7, 8.7, 9.7)	(3.3, 3.3, 3.3, 3.3)	3,3
8	(9, 10, 11, 12)	(6.7, 7.7, 8.7, 9.7)	(2.3, 2.3, 2.3, 2.3)	2,3
9	(8, 9, 11, 12)	(4.6, 5.6, 7.6, 8.6)	(3.4, 3.4, 3.4, 3.4)	3,4

Tab. 4. Najpóźniejsze terminy realizacji czynności w modelu sieciowym według rysunku 2 po redukcji czasów wykonania czynności i po wprowadzeniu buforów zasilających

Czynność, j	Po redukcji czasów wykonania czynności		Po wprowadzeniu buforów zasilających	
	$\tilde{LS}_{j0,5}$	$\tilde{LF}_{j0,5}$	$\tilde{LS}_{j0,5}$	$\tilde{LF}_{j0,5}$
1	(0, 0, 0, 0)	(4.4, 6.4, 8.4, 10.4)	(0, 0, 0, 0)	(4.4, 6.4, 8.4, 10.4)
2	(4.4, 6.4, 8.4, 10.4)	(10.8, 15.8, 18.8, 23.8)	(4.4, 6.4, 8.4, 10.4)	(10.8, 15.8, 18.8, 23.8)
3	(10.8, 15.8, 18.8, 23.8)	(17.3, 23.3, 27.3, 33.3)	(10.8, 15.8, 18.8, 23.8)	(17.3, 23.3, 27.3, 33.3)
4	(14.9, 20.9, 25.9, 31.9)	(23.5, 30.5, 36.5, 43.5)	(10.5, 16.5, 21.5, 27.5)	(19.1, 26.1, 32.1, 39.1)
5	(17.3, 23.3, 27.3, 33.3)	(23.5, 30.5, 36.5, 43.5)	(17.3, 23.3, 27.3, 33.3)	(23.5, 30.5, 36.5, 43.5)
6	(23.5, 30.5, 36.5, 43.5)	(28.7, 36.7, 43.7, 51.7)	(23.5, 30.5, 36.5, 43.5)	(28.7, 36.7, 43.7, 51.7)
7	(29.7, 37.7, 43.7, 51.7)	(35.4, 44.4, 52.4, 61.4)	(26.4, 34.4, 40.4, 48.4)	(32.1, 41.1, 49.1, 58.1)
8	(28.7, 36.7, 43.7, 51.7)	(35.4, 44.4, 52.4, 61.4)	(28.7, 36.7, 43.7, 51.7)	(35.4, 44.4, 52.4, 61.4)
9	(35.4, 44.4, 52.4, 61.4)	(40, 50, 60, 70)	(35.4, 44.4, 52.4, 61.4)	(40, 50, 60, 70)

Zbuforowane harmonogramy nierozmyte budowy sporządzamy, przyjmując na przykład $\alpha = 0,3$ i $\beta = 0,7$ lub $\alpha = 0,7$ i $\beta = 0,3$. Terminy realizacji robót, wyznaczone na podstawie zależności (19) i (20), zestawiono w tabeli 5.

Zakończenie budowy, planowane z uwzględnieniem buforu projektu *PB*, ustala się następująco:

- dla $\alpha = 0,3$ i $\beta = 0,7$: po $50 + 6 = 56$ dniach roboczych od dnia rozpoczęcia budowy,
- dla $\alpha = 0,7$ i $\beta = 0,3$: po $58 + 6 = 64$ dniach roboczych od dnia rozpoczęcia budowy.

Uzyskane harmonogramy nierozmyte podano na rysunkach 3 i 4.

Poprawność przedstawionej metody sprawdzono symulacyjnie, zgodnie z poniższym schematem:

1) Generujemy losowo:

- α -przekroje liczb rozmytych, modelujących parametry trójkątnych rozkładów prawdopodobieństwa czasów wykonania poszczególnych robót,

- wartość współczynnika β , charakteryzującego stosunek planisty do ryzyka.

2) Wyznaczamy parametry trójkątnego rozkładu prawdopodobieństwa czasu wykonania każdej roboty w danej symulacji:

$$a_j = \beta a_{jL}^\alpha + (1 - \beta) a_{jU}^\alpha;$$

$$b_j = \beta b_{jL}^\alpha + (1 - \beta) b_{jU}^\alpha; \quad (21)$$

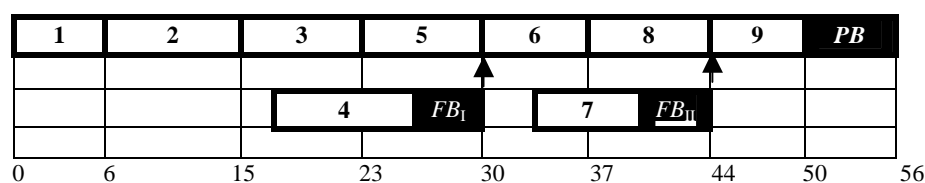
$$c_j = \beta c_{jL}^\alpha + (1 - \beta) c_{jU}^\alpha.$$

3) Na podstawie wyznaczonych parametrów trójkątnego rozkładu prawdopodobieństwa, generujemy losowo czas wykonania każdej roboty w danej symulacji.

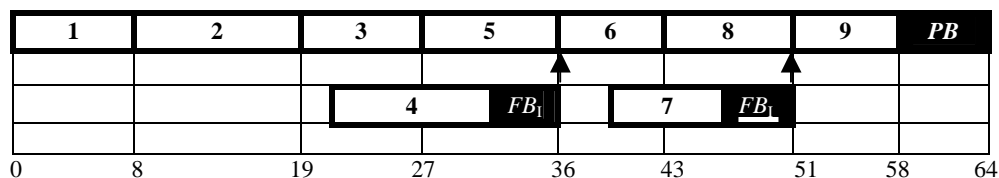
4) Dla każdej symulacji, wyznaczamy terminy realizacji robót oraz termin zakończenia budowy.

Tab. 5. Terminy realizacji robót w zbuforowanych harmonogramach nierozmytych

Czynność, <i>j</i>	$\alpha = 0,3, \beta = 0,7$		$\alpha = 0,7, \beta = 0,3$	
	s_j	f_j	s_j	f_j
1	0	6	0	8
2	6	15	8	19
3	15	23	19	27
4	16	26	21	23
5	23	30	27	36
6	30	37	36	43
7	34	41	40	48
8	37	44	43	51
9	44	50	51	58



Rys. 3. Zbuforowany harmonogram nierozmyty dla $\alpha = 0,3$ i $\beta = 0,7$

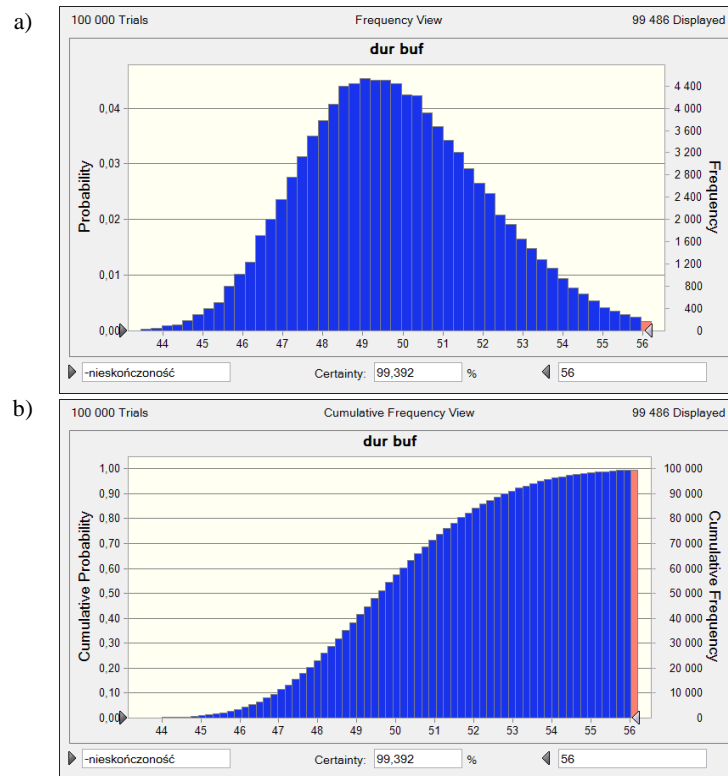


Rys. 4. Zbuforowany harmonogram nierozmyty dla $\alpha = 0,7$ i $\beta = 0,3$

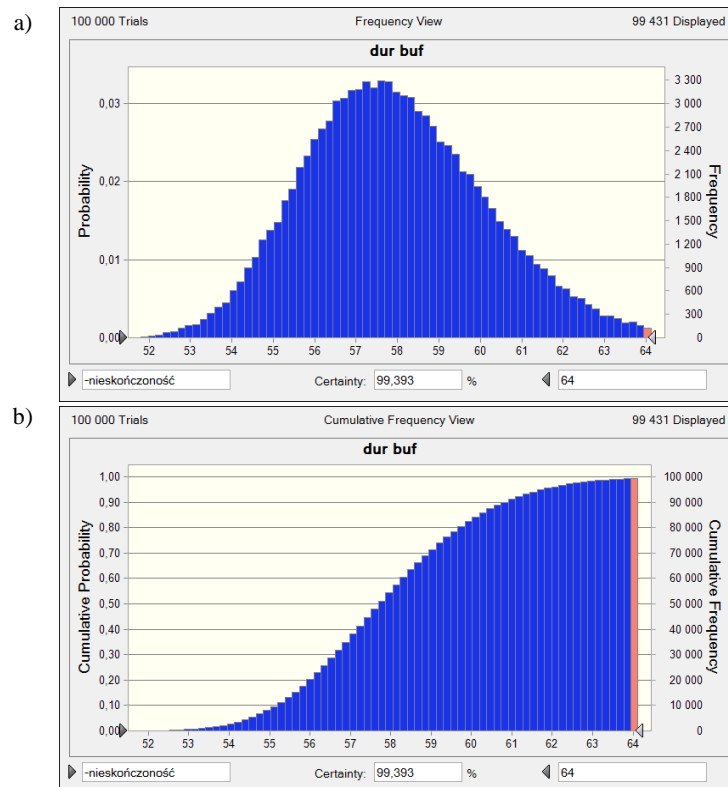
Po przeprowadzeniu założonej liczby symulacji, sprawdzamy skuteczność ochrony planowanego terminu zakończenia budowy w zbuforowanym harmonogramie nierozmytym.

Histogramy i dystrybuanty empiryczne zmiennej

losowej czasu realizacji budowy, uzyskane dla 100000 symulacji, przedstawiono na rysunkach 5 i 6. Skuteczność ochrony planowanych terminów zakończenia budowy w obu zbuforowanych harmonogramach nierozmytych wynosi około 99,4%.



Rys. 5. Wyniki symulacji zbuforowanych harmonogramów nierozmytych, uzyskanych dla $\alpha = 0,3$ i $\beta = 0,7$: a) histogram, b) dystrybuanta empiryczna



Rys. 6. Wyniki symulacji zbuforowanych harmonogramów nierozmytych, uzyskanych dla $\alpha = 0,7$ i $\beta = 0,3$: a) histogram, b) dystrybuanta empiryczna

7. Wnioski

Wykorzystanie aparatu matematycznego teorii zbiorów rozmytych, pozwala na uwzględnienie różnorodności opinii ekspertów o parametrach rozkładu czasu wykonania danej roboty. Umożliwia również identyfikację łańcucha krytycznego oraz wyznaczenie buforów. Wyniki symulacji potwierdzają skuteczność ochrony terminu zakończenia realizacji budowy w harmonogramie nierozmytym, uzyskanym z uwzględnieniem preferowanego poziomu pewności czasów wykonania robót i poziomu ryzyka. Tym samym, potwierdzają poprawność przyjętych założeń metodycznych.

Literatura

- Chang D. Y. (1996). Applications of the extend analysis metod on fuzzy AHP. *European Journal of Operational Research*, Vol. 95, No. 3, 649-655.
- Chanas S., Kamburowski J. (1981). The use of fuzzy variables in PERT. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 5, No. 1, 1-19.
- Dubois D., Prade H. (1978). Operations on fuzzy numbers. *International Journal of Systems Science*, No. 9, 613-626.
- Goldratt E. M. (1997). Critical chain. *The North River Press Publishing Corporation*, Great Barrington.
- Hapke M., Słowiński R. (1996). Fuzzy priority heuristics for project scheduling. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 83, No. 3, 291-299.

- Kuchta D. (2001). Miękka matematyka w zarządzaniu. Zastosowanie liczb przedziałowych i rozmytych w rachunkowości zarządczej. *Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej*, Wrocław.
- Lortrapong P., Moselhi O. (1996). Project-network analysis using fuzzy sets theory. *Journal of Construction Engineering and Management*, Vol. 122, No. 4, 308-318.
- Prade H. (1979). Using fuzzy set theory in a scheduling problem: a case study. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 2, No. 2, 153-165.
- Ramik J., Rommelfanger H. (1995). Nonnegative extremal solution of fuzzy equation $A \oplus X \cong B$ and its use in network analysis. *Foundations of Computing and Decision Sciences*, Vol. 19, 225-237.

APPLICATION OF FUZZY SET THEORY TO SCHEDULE CONSTRUCTION WORKS BY THE CRITICAL CHAIN METHOD

Abstract: The paper presents a new approach to the problem of scheduling of construction project by the critical chain method. Novelty of the method is to include inaccurate information about the parameters of probability distributions of durations of works. In order to identify the critical chain and schedule buffers, fuzzy set theory and the modified rules for the arithmetic of fuzzy numbers is used. To determine the non-fuzzy buffered schedule, the concept of α -cuts of a fuzzy number is used. The correctness of the presented approach is demonstrated on the basis of the results of the simulation.