

ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DO WYZNACZANIA JEDNOKIERUNKOWEGO PRZEPŁYWU W PRZEWODACH PROSTOOSIOWYCH O DOWOLNYM KSZTAŁCIE PRZEKROJU POPRZECZNEGO

Tomasz J. TELESZEWSKI*, Sławomir A. SORKO*

*Katedra Ciepłownictwa, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 E, 15-351 Białystok

tjt@pb.edu.pl, s.sorko@pb.edu.pl

Streszczenie: Przedmiotem opracowania jest aplikacja metody elementów brzegowych do wyznaczania przepływu w prostoosiowych przewodach i kanałach o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego całkowicie wypełnionych cieczą. Laminarny, jednokierunkowy przepływ cieczy lepkiej opisany równaniem Stokesa jest zadowalającym modelem do opisu licznej klasy przepływów w układach przepływowych maszyn i urządzeń. W pracy przedstawiono rozwiązanie zagadnienia przepływu jednokierunkowego cieczy newtonowskiej ograniczonego walcową powierzchnią o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego w sformułowaniu brzegowych równań całkowych. Przedstawiono rezultaty wyników obliczeń pola prędkości w przepływie jednokierunkowym dla wybranych kształtów przekroju poprzecznego przewodów i dokonano porównania rozwiązań numerycznych z dostępnymi w literaturze rozwiązaniami analitycznymi wykazując zadowalającą dokładność i skuteczność metody brzegowych równań całkowych do rozwiązywania tej grupy zagadnień przepływowych w zastosowaniach technicznych.

1. WPROWADZENIE

Przepływ newtonowskiej cieczy lepkiej jest opisany układem równań (Prosnak, 2006):

– równaniami Naviera-Stokesa

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{c} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{c}, \quad (1a)$$

– równaniem ciągłości

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = 0, \quad (1b)$$

ze stosownym warunkiem początkowym i warunkami brzegowymi dotyczącymi prędkości tj. warunkiem nieprzenikalności powierzchni materialnych i warunkiem braku poślizgu na powierzchniach materialnych ograniczających przepływ od strony wewnętrznej (przepływy wewnętrzne) lub od strony zewnętrznej (przepływy zewnętrzne).

Szczególną grupę przepływów koncentrujących od dawna uwagę badaczy zarówno w sensie poznawczym, jak też aplikacyjnym są przepływy w przewodach i układach przewodów całkowicie wypełnionych cieczą. Istotną grupę zagadnień przepływowych ważnych z inżynierskiego punktu widzenia w tym obszarze zagadnień obliczeniowych stanowią laminarne, ustalone przepływy cieczy w przewodach prostoosiowych, w których przepływająca ciecz wypełnia cały dostępny przekrój, a czynnikiem powodującym przepływ jest różnica ciśnienia wzdłuż przewodu. Przepływy takie są określane mianem przepływów jednokierunkowych.

Jednokierunkowy ustalony przepływ cieczy w prostoosiowym przewodzie o dowolnym i niezmiennym wzdłuż osi przewodu kształcie przekroju poprzecznego w prostokątnym układzie współrzędnych $\{x, y, z\}$ związanym z przewodem, tak, że oś $\{z\}$ jest skierowana wzdłuż osi przewodu (Rys.1) jest opisany układem równań (1), w którym:

$$\mathbf{c} \equiv (c_x, c_y, c_z); \quad c_x = 0; \quad c_y = 0; \quad c_z \equiv c_z(x, y) \neq 0$$

$$p = p(z); \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} \equiv \frac{dp}{dz} \neq 0$$

wobec czego po pominięciu sił ciężenia przyjmuje on postać:

$$c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} \right), \quad (2a)$$

$$\frac{\partial c_z}{\partial z} = 0. \quad (2b)$$

Ostatecznie wobec równości (2b) wynikającej z równania ciągłości, laminarny, ustalony przepływ w przewodzie prostoosiowym w układzie współrzędnych prostokątnych jest opisany równaniem Stokesa:

$$\left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (3)$$

gdzie: $\mu = \rho \nu$ jest współczynnikiem lepkości dynamicznej cieczy.

Przepływ jednokierunkowy jest zadowalającym modelem przepływu cieczy w prostoliniowych przewodach i kanałach hydraulicznych całkowicie wypełnionych cieczą. Istotą zagadnienia inżynierskiego jest wyznaczenie profilu prędkości w przewodzie oraz izotach przepływu w przekroju prostopadłym do osi przewodu (w kierunku przepływu).

Przy użyciu modelu jednokierunkowego przepływu cieczy jest możliwe wyznaczenie profili prędkości ustalonego ruchu cieczy w prostoliniowych przewodach o dowolnym kształcie w przekroju poprzecznym,

Analityczne rozwiązania zagadnień przepływu laminarnego w przewodach prostoosiowych o różnych kształtach przekroju poprzecznego mają bogatą historię i dokumenta-

cję bibliograficzną poczynając od rozwiązania Hagen-Poiseuille'a przepływu w przewodzie o przekroju kołowym i pierścieniowym (koncentrycznym i niekoncentrycznym) do rozwiązań dla przekrojów eliptycznych, prostokątnych, trójkątnych i innych kształtów geometrycznych, będących układami fragmentów okręgów (Batchelor, 1967; Лойцянский, 1973; White, 1991; Landau i Lifszyc, 2009).

Rozwój konstrukcji inżynierskich, w których mają miejsce przepływy płynów technologicznych w układach przepływowych o złożonej geometrii stwarza potrzebę doskonalenia metod obliczeniowych w zakresie wyznaczania przepływów w tych urządzeniach.

Szczególnie istotne z technicznego punktu widzenia przy postępującym rozwoju mikrourządzeń technicznych jest zagadnienie wyznaczania przepływów w mikrokanałach o różnych kształtach przekroju poprzecznego w przypadku kiedy wymiary mikrokanałów pozwalają na zachowanie w analizie przepływu, ciągłego modelu płynu newtonowskiego i opis przepływu równaniem Stokesa z warunkiem brzegowym postulującym zerową wartość prędkości na ściankach ograniczających przepływ (Karnidakis, 2005).

Jakkolwiek analityczne rozwiązania opisujące rozkład prędkości w ruchu laminarnym cieczy w prostoosiowych przewodach obejmują liczną grupę kształtów przekrojów poprzecznych, to ich uzyskanie w przypadkach, w których kształt konturów jest złożony, nastrocza istotnych trudności i wtedy jedynym skutecznym narzędziem rozwiązywania zagadnień przepływowych są metody numeryczne.

W szczególności efektywną metodą analityczno-numeryczną do wyznaczania przepływów opisanych równaniem Stokesa jest metoda elementów brzegowych. Istotą metody jest sprowadzenie równania różniczkowego opisującego przepływ (w ro-zważanym przypadku równania Stokesa (3) z warunkiem brzegowym zakładającym brak poślizgu na powierzchni ograniczającej przepływ) do równania całkowego, rozwiązywanego dalej numerycznie.

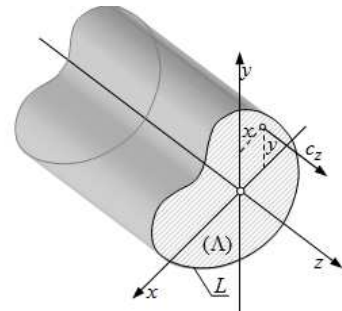
Zasadniczym walorem metody elementów brzegowych w porównaniu z metodami siatkowymi: metodą różnic skończonych i metodą elementów skończonych, mającym w tym przypadku istotne znaczenie jest opis zagadnienia przepływowego brzegowym równaniem całkowym, którego dyskretne rozwiązanie umożliwi w dalszej kolejności wyznaczenie pola prędkości w rozpatrywanym obszarze bez konieczności generowania złożonej siatki geometrycznej w polu przepływu objętym konturem przewodu.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

W myśl przedstawionych wyżej rozważań, ustalony, jednokierunkowy, laminarny przepływ cieczy newtonowskiej w prostoosiowym przewodzie, w przekroju poprzecznym (Λ) objętym brzegiem (L) tj. konturem przewodu, można opisać równaniem Stokesa z warunkiem brzegowym zakładającym wartość prędkości na brzegu materialnym sztywnym i nieprzepuszczalnym (na ściance przewodu) równą zeru:

$$\left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} \right) = -\Delta P, \quad \text{gdzie: } \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = -\Delta P; \quad (4)$$

$$c_z(x, y) = 0 \quad ; \quad \forall (x, y) \in L \quad (4a)$$



Rys. 1. Jednokierunkowy przepływ cieczy w przewodzie prostoosiowym

Jedną z metod rozwiązania sformułowanego wyżej zagadnienia brzegowego dla równania Poissona (4) jest dekompozycja funkcji $c_z(x, y)$ na część jednorodną $\bar{c}_z(x, y)$ spełniającą równanie Laplace'a i część niejednorodną $\tilde{c}_z(x, y)$ spełniającą równanie Poissona:

$$c_z(x, y) = \bar{c}_z(x, y) + \tilde{c}_z(x, y), \quad (5)$$

gdzie:

$$\nabla^2 \bar{c}_z(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Lambda \cup L, \quad (5a)$$

$$\nabla^2 \tilde{c}_z(x, y) = -\Delta P, \quad \forall (x, y) \in \Lambda \cup L, \quad (5b)$$

przy czym część niejednorodną można przedstawić w postaci:

$$\tilde{c}_z(x, y) = -\Delta P v(x, y), \quad (6)$$

gdzie funkcja $v(x, y)$ spełnia równanie Poissona:

$$\nabla^2 v(x, y) = 1, \quad \forall (x, y) \in \Lambda \cup L \quad (6a)$$

i jedną z możliwych form jej realizacji jest postać:

$$v(x, y) = \frac{1}{4} \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right], \quad (6b)$$

$$\forall ((x, y), (x_0, y_0)) \in \Lambda \cup L$$

przy czym (x_0, y_0) są współrzędnymi dowolnego punktu odniesienia, będącego w szczególności punktem początku układu współrzędnych $\{x, y\}$ związanego z rozważanym przekrojem poprzecznym (Pozrikidis, 2002; Teleszewski, 2008).

Wobec dekompozycji (5) funkcji $c_z(x, y)$ warunek brzegowy $c_z(x, y) = 0; \forall (x, y) \in L$ przyjmuje postać:

$$\bar{c}_z(x, y) = -\tilde{c}_z(x, y) = \Delta P v(x, y) \quad \forall (x, y) \in L. \quad (7)$$

2.1. Sformułowanie całkowe zagadnienia przepływu jednokierunkowego

Wykorzystując drugą tożsamość Greena składową homogeniczną prędkości przepływu $\bar{c}_z(\mathbf{p})$ spełniającą równanie Laplace'a w obszarze (Λ) ograniczonym linią brzegową (L) można opisać równaniem (Brebbia i inni, 1984):

$$\bar{c}_z(\mathbf{p}) = - \int_{(L)} \frac{\partial \bar{c}_z(\mathbf{q})}{\partial n_q} K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + \int_{(L)} \bar{c}_z(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q, \quad (8)$$

$(\mathbf{p}) \in \Lambda; (\mathbf{q}) \in L$

przy czym $\mathbf{p}(x_p, y_p)$ i $\mathbf{q}(x_q, y_q)$ są odpowiednio punktem ustalonym i punktem bieżącym całkowania, funkcja $K(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ jest rozwiązaniem podstawowym równania Laplace'a:

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r_{pq}} \right), \quad (8a)$$

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial (K(\mathbf{p}, \mathbf{q}))}{\partial n_q} = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_p - x_q)n_q^y - (y_p - y_q)n_q^x}{r_{pq}^2}, \quad (8b)$$

gdzie: $n_q = \left[n_q^x, n_q^y \right] = \left[\frac{\delta y_q}{\delta L_q}, \frac{\delta x_q}{\delta L_q} \right]$, jest wektorem normalnym do brzegu (L) w punkcie $\mathbf{q}(x_q, y_q)$.

Po wstawieniu zależności (7) do równania całkowego (8) i wydzieleniu wartości głównej w drugiej całce po prawej stronie z uwagi na osobliwość jądra całkowego $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ na brzegu (L) obszaru (Λ) (kiedy $\mathbf{p}(x_p, y_p) \equiv \mathbf{q}(x_q, y_q)$), przy założeniu, że brzeg obszaru jest brzegiem gładkim, otrzymuje się brzegowe równanie całkowe:

$$\int_{(L)} g(\mathbf{q}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q = \Delta P \left[-\frac{1}{2} v(\mathbf{p}) + \int_{(L)} v(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q \right], \quad (9)$$

$(\mathbf{p}), (\mathbf{q}) \in L$

gdzie:

$$g(\mathbf{q}) = \frac{\partial \bar{c}_z(\mathbf{q})}{\partial n_p} \quad (9a)$$

oraz:

$$v(\mathbf{q}) = \frac{r(\mathbf{q})^2}{4}, \quad r(\mathbf{q}) = \sqrt{(x_q - x_o)^2 + (y_q - y_o)^2}. \quad (9b)$$

Równanie (9) jest równaniem całkowym Fredholma I rodzaju względem gęstości $g(\mathbf{p})$ funkcji $\bar{c}_z(\mathbf{q})$ na brzegu obszaru, przy czym całka po prawej stronie równania z funkcją podcałkową $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ opisaną zależnością (8b) jest rozumiana w sensie wartości głównej Cauchy'ego.

Po rozwiązaniu równania całkowego (9) wartości funkcji $\bar{c}_z(\mathbf{p})$ w punktach $\mathbf{p}(x_p, y_p)$ wewnątrz obszaru (Λ) wyznacza się ze związku całkowego:

$$\bar{c}_z(\mathbf{p}) = - \int_{(L)} g(\mathbf{q}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + \Delta P \int_{(L)} v(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q. \quad (10)$$

$(\mathbf{p}) \in \Lambda; (\mathbf{q}) \in L$

Objętościowe natężenie przepływu jednokierunkowego

przez przewód o przekroju poprzecznym (Λ) całkowicie wypełniony cieczą jest równe:

$$Q = \iint_{(\Lambda)} c_z(\mathbf{q}) d\Lambda_q. \quad (11)$$

Wartość objętościowego natężenia przepływu przez przewód można wyznaczyć bezpośrednio z zależności (11) w rezultacie numerycznego całkowania, po odpowiedniej dyskretyzacji pola przekroju poprzecznego przewodu (Λ).

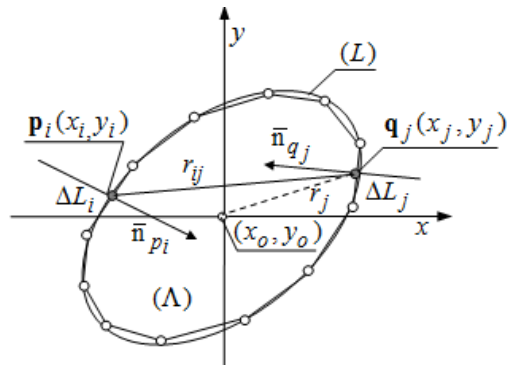
Możliwe jest również przekształcenie zależności (11) do wyrażenia opisującego objętościowe natężenie przepływu przez przewód przez całki po brzegu obszaru (Λ).

Przy wykorzystaniu zależności (5) i własności funkcji (6b), wykorzystując drugą tożsamość Greena i warunek brzegowy (7) równanie (11) można sprowadzić do postaci:

$$Q = \int_{(L)} c_z(\mathbf{q}) \frac{\partial v(\mathbf{q})}{\partial n_q} dL_q - \int_{(L)} v(\mathbf{q}) \frac{\partial c_z(\mathbf{q})}{\partial n_q} dL_q. \quad (12)$$

2.2. Numeryczne rozwiązanie równania całkowego opisującego przepływ jednokierunkowy

Najprostszym sposobem dyskretyzacji równania całkowego (9) jest przybliżenie linii brzegowej (L) J – elementowym układem elementów liniowych z centralnymi punktami kolokacji \mathbf{q}_j ($j = 1, \dots, J$) o stałej gęstości funkcji $g(\mathbf{q}_j)$ ($j = 1, \dots, J$) na każdym elemencie ΔL_j ($j = 1, \dots, J$) (Rys. 2).



Rys. 2. Dyskretyzacja linii brzegowej elementami prostoliniowymi

Jakkolwiek w ramach metody elementów brzegowych istnieją bardziej zaawansowane sposoby dyskretyzacji zagadnienia bazujące na liniowych i krzywoliniowych elementach brzegowych ze zmiennymi rozkładami gęstości funkcji na elementach (Brebbia i inni, 1984; Katsikadelis, 2002; Kythe, 1995), to w przypadku analizowanego zagadnienia dostatecznie gęsty podział na elementy liniowe ze stałą gęstością funkcji zapewnia zadawalającą dokładność rozwiązania (Teleszewski, 2008).

W przypadku aproksymacji brzegu (L) rozpatrywanego obszaru płaskiego (Λ) brzegowymi elementami liniowymi o stałej gęstości rozkładu funkcji $g(\mathbf{q}_j)$ i $v(\mathbf{q}_j)$ na każdym elemencie ΔL_j równanie całkowe (9) sprowadza się

do układu (J) algebraicznych równań liniowych względem niewiadomej funkcji $g(\mathbf{q}_j)$ ($j = 1, \dots, J$) w punktach \mathbf{q}_j ($j = 1, \dots, J$) na brzegu obszaru:

$$\sum_{j=1}^J g(\mathbf{q}_j) \int_{(L_j)} K(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) dL_j = \Delta P \left[-\frac{1}{2} v(\mathbf{q}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J v(\mathbf{q}_j) \int_{(L_j)} E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) dL_j \right], \quad (13)$$

gdzie:

$$K(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r_{ij}} \right), \quad (13a)$$

$$E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_i - x_j)n_j^y - (y_i - y_j)n_j^x}{r_{ij}^2}, \quad (13b)$$

$$r_{ij} = \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (13c)$$

oraz:

$$v(\mathbf{q}_j) = \frac{r_j^2}{4} = \frac{1}{4} \left[(x_j - x_o)^2 + (y_j - y_o)^2 \right]. \quad (13d)$$

Po wyznaczeniu gęstości rozkładu funkcji $g(\mathbf{q}_j)$ na brzegu obszaru wartości funkcji $\bar{c}_z(\mathbf{p}_n)$ ($n = 1, \dots, N$) w punktach (\mathbf{p}_n) ($n = 1, \dots, N$) wewnątrz obszaru (Λ) wyznacza się ze związku:

$$\bar{c}_z(\mathbf{p}_n) = \sum_{j=1}^J g(\mathbf{q}_j) \int_{(L_j)} K(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_j) dL_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J v(\mathbf{q}_j) \int_{(L_j)} E(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_j) dL_j. \quad (14)$$

Ostatecznie prędkość $c_z(\mathbf{p}_n)$ w punktach (\mathbf{p}_n) ($n = 1, \dots, N$) jest zgodnie z zależnością (5) opisana sumą:

$$c_z(\mathbf{p}_n) = \bar{c}_z(\mathbf{p}_n) + \Delta P v(\mathbf{p}_n) \quad (n = 1, \dots, N) \quad (15)$$

3. PRZEPŁYW JEDNOKIERUNKOWY W PRZEWODACH PROSTOOSIOWYCH O DOWOLNYM PRZEKROJU POPRZECZNYM. WYZNACZANIE PÓŁ PRĘDKOŚCI PRZEPŁYWU METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Niżej przedstawiono rozwiązania zagadnień przepływowych laminarnego przepływu jednokierunkowego cieczy lepkiej w przewodach prostoosiowych o różnych kształtach przekroju poprzecznego prezentowaną wyżej metodą elementów brzegowych. Dokonano porównania uzyskanych wyników z rezultatami dostępnymi w szeregu prezentowanych przykładów rozwiązaniami analitycznymi.

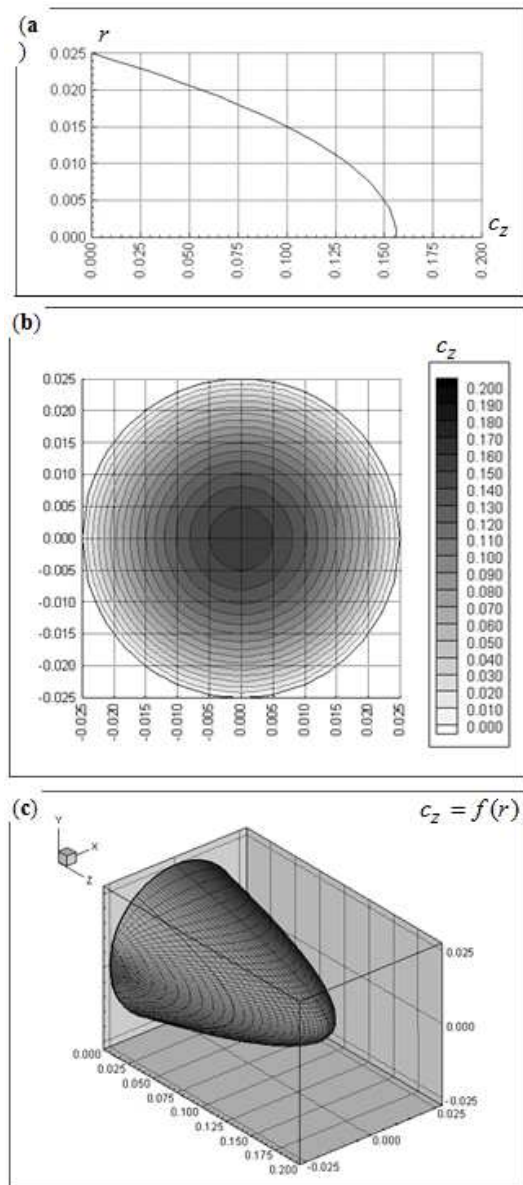
3.1. Przepływ przez przewód o przekroju kołowym

W przypadku przekroju kołowego, będącego podstawowym kształtem przewodów w ciśnieniowych układach i sieciach hydraulicznych równanie Stokesa (4) opisujące przepływ laminarny cieczy lepkiej w cylindrycznym układzie współrzędnych $\{r, \varphi, z\}$ przyjmuje formę:

$$-\Delta P = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dc_z}{dr} \right), \quad (16)$$

z warunkiem brzegowym $c_z(R) = 0$, gdzie R oznacza promień przewodu. Rozwiązanie równania (16) prowadzi do znanego wzoru Hagen-Poiseuille'a opisującego rozkład prędkości w przekroju poprzecznym przewodu:

$$c_z(r) = \frac{\Delta P}{4} (R^2 - r^2). \quad (17)$$



Rys. 3. Rozkład prędkości w przewodzie prostoosiowym o przekroju kołowym: a) wykres prędkości w przekroju osiowym przewodu, b) wykres warstwicy pola prędkości w przewodzie, c) profil prędkości

Wyznaczono pole prędkości przepływu w przewodzie o średnicy $D=0.05$ m przy $\Delta P=10.00$ s⁻¹m⁻¹, płynu o gęstości $\rho=1000.00$ kg/m³ i lepkości $\mu=1.00 \cdot 10^{-3}$ Pa·s (glikol etylowy roztw.20% H₂O (20°C)). Prędkość maksymalna (w osi przewodu) dla przedstawionych wyżej warunków przepływu i właściwości fizycznych cieczy jest równa $c_{z(max)}=0.15625$ [m/s] prędkość średnia $c_{z(sr)}=0.078125$ [m/s] wobec czego liczba Reynoldsa $Re_{(sr)}=D \cdot c_{z(sr)}/\nu=390.63$ kwalifikuje rozważany przepływ jako laminarny.

Na Rys. 3 przedstawiono odpowiednio:

- wykres prędkości w przekroju osiowym przewodu (3.a);
- wykres warstwiczny pola prędkości w przewodzie (3.b);
- profil prędkości na wykresie przestrzennym (3.c).

W rozważanym przypadku obliczeń dokonano przy podziale okręgu (linii brzegowej) na $J=360$ elementów prostoliniowych, a numerycznego całkowania dokonano przy użyciu kwadratur Gaussa-Legendre'a ($n=8$) (Stoer i Burlisch, 2002; Press i inni, 1988).

Błąd względny obliczeń oszacowano jako różnicę pomiędzy maksymalną wartością prędkości wyznaczoną z zależności analitycznej $c_{z(t)}$ i wartością otrzymaną w rozwiązaniu numerycznym $c_{z(n)}$ odniesioną do wartości wyznaczonej z zależności analitycznej i wyrażoną w (%) w punktach obliczeniowych ($n=1, \dots, N$).

$$\Delta c_{z(n)} = \max \left| \frac{c_{z(t)} - c_{z(n)}}{c_{z(t)}} \right| * 100\% \quad (18)$$

W rozważanym wyżej przypadku przepływu w przewodzie o przekroju kołowym błąd względny według zależności (18) numerycznego rozwiązania metodą brzegowych równań całkowych nie przekroczył wartości 0.05%.

3.2. Przepływ przez przewód o przekroju eliptycznym

Prędkość jednokierunkowego, laminarnego przepływu przez przewód o przekroju eliptycznym jest opisana zależnością (White, 1991; Pozrikidis, 2001; Spurk, 1997):

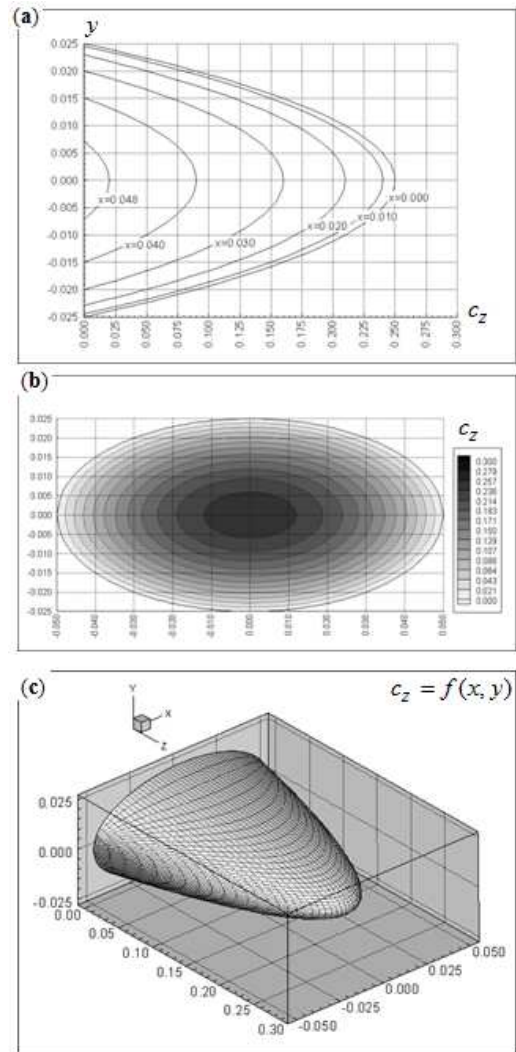
$$c_z(x, y) = \frac{\Delta P}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right] \quad (19)$$

gdzie a i b są półosiami elipsy o środku (0,0) w prostokątnym układzie współrzędnych $\{x, y\}$.

Wyznaczono pole prędkości w przewodzie eliptycznym o wymiarach $a=0.050$ m, $b=0.025$ m. Wyniki obliczeń przedstawia w formie graficznej Rys. 4.

Na wykresie 4a przedstawiono profile prędkości $c_z=f(x, y)$ w wybranych przekrojach $x=const$ (0,a).

W rozważanym wyżej przypadku przepływu w przewodzie o przekroju eliptycznym błąd względny według zależności (18) numerycznego rozwiązania metodą brzegowych równań całkowych przy podziale brzegu obszaru na $J=360$ elementów prostoliniowych i numerycznym całkowaniu przy użyciu kwadratur Gaussa-Legendre'a ($n=8$), nie przekroczył wartości 0.06%.



Rys. 4. Rozkład prędkości w przewodzie prosto osiowym o przekroju eliptycznym: a) wykres prędkości w przekrojach $x=const$, b) wykres warstwiczny pola prędkości w przewodzie, b) profil prędkości

3.3. Przepływ przez przewód o przekroju prostokątnym

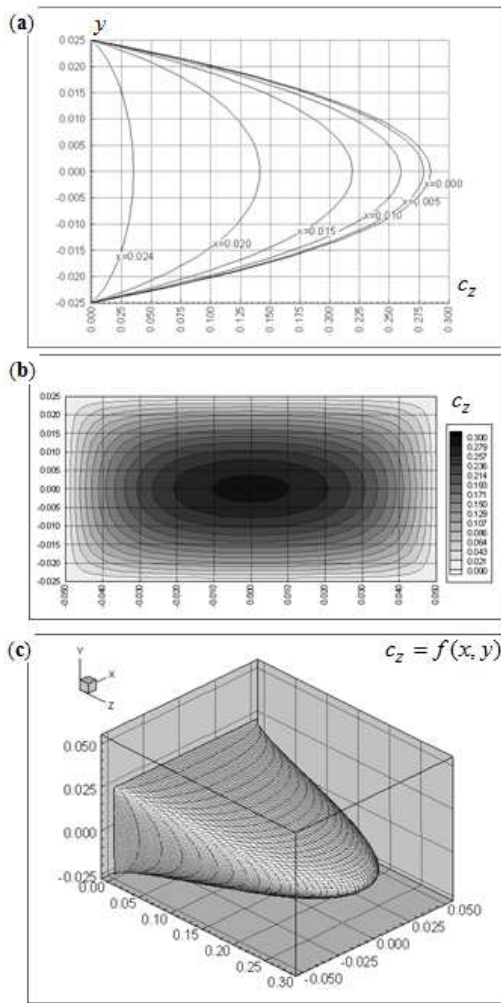
Prędkość jednokierunkowego, laminarnego przepływu przez przewód o przekroju prostokątnym jest opisana zależnością (White, 1991; Spurk, 1997):

$$c_z(x, y) = \frac{\Delta P}{2} \left[b^2 - y^2 + \frac{4}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cosh(mx)}{m^3 \cosh(ma)} \cos(my) \right] \quad (20)$$

gdzie: $m = (\pi/b)(n - 1/2)$ natomiast $2a$ i $2b$ oznaczają długości boków prostokąta o środku w punkcie (0,0).

Wyznaczono pole prędkości w przewodzie o przekroju prostokątnym o wymiarach $a=0.050$ m, $b=0.025$ m. Wyniki obliczeń przedstawia Rys. 5.

Obliczenia wykonano przy podziale obwodu prostokąta na $J=600$ elementów prostoliniowych i numerycznym całkowaniu przy użyciu wzorów Gaussa-Legendre'a ($n=8$). Błąd względny wyznaczenia wartości prędkości maksymalnej (w punkcie (0,0)) nie przekracza wartości $3.5 \cdot 10^{-3}$ %.



Rys. 5. Rozkład prędkości w przewodzie prosto osiowym o przekroju prostokątnym: a) wykres prędkości w przekrojach $x=const$, b) wykres warstwiczny pola prędkości w przewodzie, c) profil prędkości

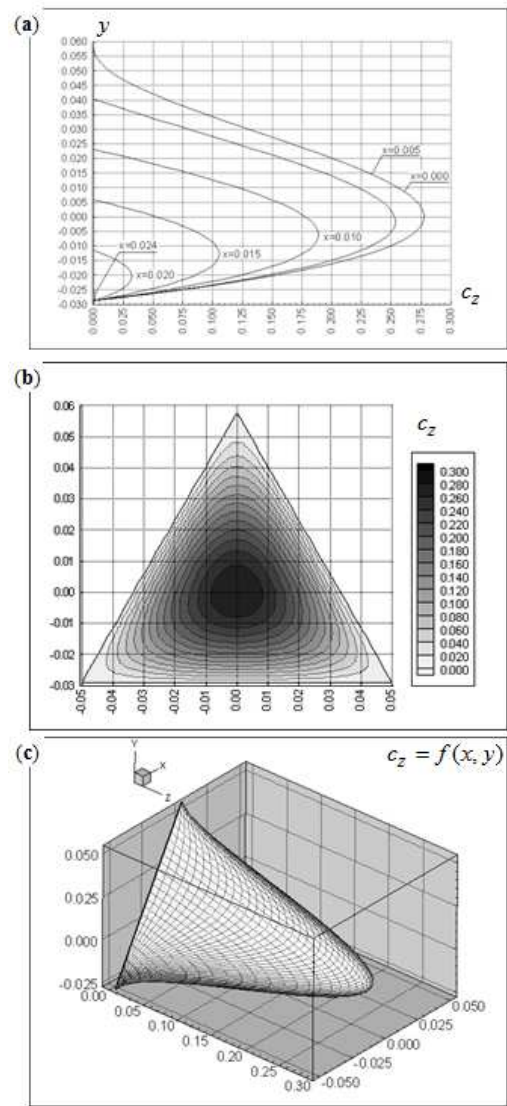
3.4. Przepływ przez przewód o przekroju trójkątnym

Prędkość jednokierunkowego, laminarnego przepływu przez przewód o przekroju trójkątnym (trójkąt równoboczny) jest opisana zależnością (Spurk, 1997; Chakraborty, 2008):

$$c_z(x, y) = \frac{\Delta P}{4} \frac{1}{(3a)^2} (4hy + a^2) \left[(2hy - a)^2 - (3xa)^2 \right] \quad (21)$$

gdzie a jest długością boku trójkąta $h = a\sqrt{3}/2$ wysokością trójkąta o środku geometrycznym umieszczonym w punkcie $\{0,0\}$ układu współrzędnych i podstawie równoległej do osi $\{x\}$. Wyznaczono pole prędkości w przewodzie o przekroju poprzecznym trójkątnym (trójkąt równoboczny) o wymiarze boku $a=0.050$ m. Wyniki obliczeń przedstawiają w formie graficznej Rys. 6.

Obliczenia wykonano przy podziale obwodu trójkąta na $J=300$ elementów prostoliniowych. Błąd względny wyznaczenia wartości prędkości maksymalnej (w punkcie $(0,0)$) nie przekracza wartości $3.0 \cdot 10^{-3}\%$.

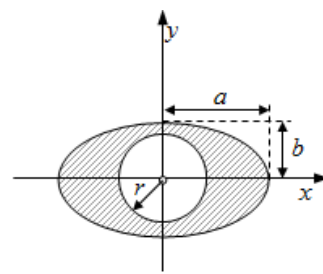


Rys. 6. Rozkład prędkości w przewodzie prosto osiowym o przekroju trójkątnym: a) wykres prędkości w przekrojach $x=const$, b) wykres warstwiczny pola prędkości w przewodzie, c) profil prędkości

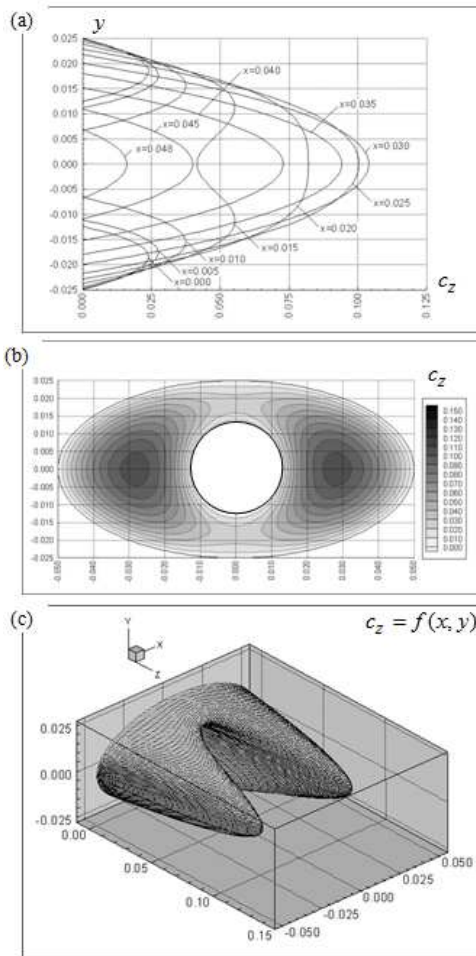
3.5. Przepływ przez przewód o przekroju eliptycznym z kołowym wypełnieniem

Wyznaczono pole prędkości przepływu przez prostoosiowy przewód o przekroju eliptycznym z kołowym wypełnieniem w osi przewodu.

Wyniki obliczeń przedstawiono na Rys. 8.



Rys. 7. Kształt przewodu o przekroju eliptycznym z kołowym wypełnieniem



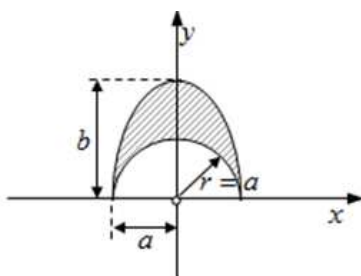
Rys. 8. Pole prędkości przepływu w przewodzie o przekroju eliptycznym z kołowym wypełnieniem: a) wykres prędkości w przekrojach $x=const$, b) wykres warstwowy pola prędkości w przewodzie, c) profil prędkości

Obliczenia wykonano dla przewodu o wymiarach: $a=0.05$ m, $b=0.025$ m, $r=0.012$ m przy podziale eliptycznego brzegu na $J=360$ prostoliniowych elementów i podziale okręgu wewnętrznego na $N=180$ elementów.

3.6. Przepływ przez przewód o przekroju półeliptycznym ograniczonym półkolem

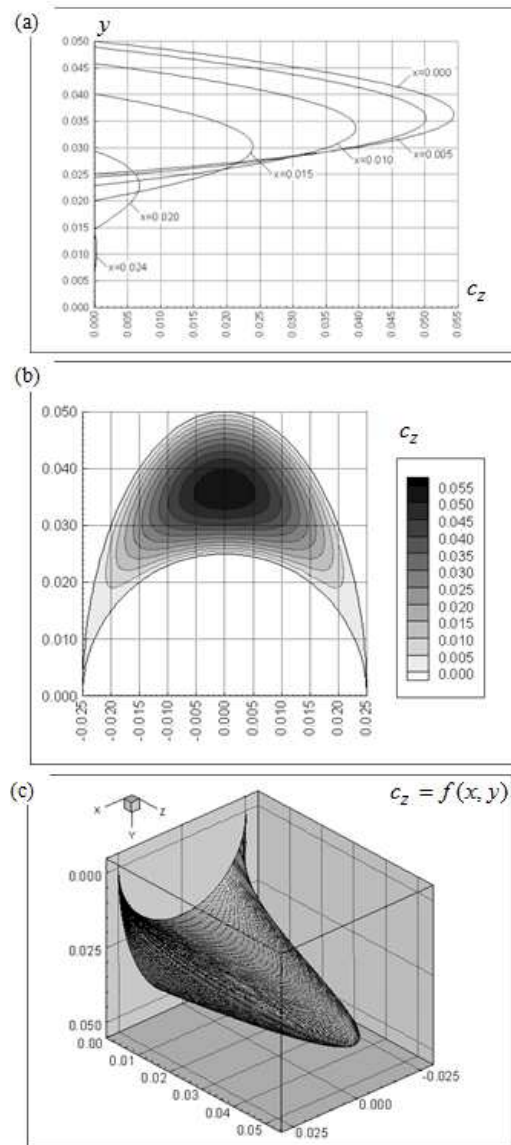
Wyznaczono pole prędkości przepływu przez prostoosiowy przewód o przekroju półeliptycznym ograniczonym półkolem tworzącym wklęsłą ściankę (Rys. 9).

Wyniki obliczeń przedstawiono na Rys. 10.



Rys. 9. Kształt przewodu o przekroju półeliptycznym ograniczonym półkolem

Obliczenia wykonano dla przewodu o wymiarach: $b=0.05$ [m], $a=0.025$ [m], $r=0.025$ [m] przy podziale eliptycznego brzegu na $J=360$ prostoliniowych elementów i podziale półokręgu na $N=180$ elementów.



Rys. 10. Pole prędkości przepływu w przewodzie o przekroju półeliptycznym ograniczonym półkolem: a) wykres prędkości w przekrojach $x=const$, b) wykres warstwowy pola prędkości w przewodzie, c) profil prędkości

4. PODSUMOWANIE

Metoda brzegowych równań całkowych wśród metod numerycznego rozwiązywania zagadnień fizyki matematycznej opisanych równaniami różniczkowymi jest metodą o dużej skuteczności i użyteczności. W zagadnieniach wyznaczania pól prędkości w przepływie cieczy z uwagi na złożoność równań różniczkowych opisujących ruch cieczy, właściwości metody polegające na wyznaczeniu pola prędkości cieczy w oparciu o rozwiązanie zagadnienia na brzegu obszaru bez konieczności dyskretyzacji analizo-

wanego obszaru i łatwość formułowania warunków brzegowych, są istotnymi walorami użytkowymi metody numerycznej.

Nadto metoda brzegowych równań całkowych pozwala na rozwiązywanie zagadnień przepływu w obszarach płaskich o złożonej geometrii, co zaprezentowano wyżej, w odniesieniu do zagadnień wyznaczania laminarnego przepływu cieczy w przewodach i kanałach o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, przy użyciu prostych algorytmów obliczeniowych, z wysoce zadawalającą dokładnością obliczeń

LITERATURA

1. **Batchelor G. K.** (1967), *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge UK.
2. **Brebbia C.A., Telles J. C., Wrobel L. C.** (1984), *Boundary Element Techniques, Theory and applications in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin.
3. **Chakraborty G.** (2008), A note on methods for analysis of flow through microchannels, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, 4583-4588.
4. **Karnidakis G., Beskok A., Narayan A.** (2005), *Microflows and Nanoflows, Fundamentals and Simulation*, Springer, New York.
5. **Katsikadelis J. T.** (2002), *Boundary Elements. Theory and Applications*, Elsevier Science.
6. **Kythe P. K.** (1995), *An Introduction to Boundary Element Method*, CRC Press.
7. **Landau L. D., Lifszyc J. M.** (2009), *Hydrodynamika*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
8. **Pozrikidis C.** (2001), *Fluid Dynamics. Theory, Computation and Numerical Simulation*, Kluwer Academic Publ., New York.
9. **Pozrikidis C.** (2002), *A Practical Guide to Boundary Element Method with the software Library Bemlib*, Chapman & Hall/CRC, New York.
10. **Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling, W. T.** (1988), *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, New York.
11. **Prosnak W. J.** (2006), *Równania klasycznej mechaniki płynów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
12. **Spurk J. H.** (1997), *T1. Fluid Mechanics, T2 Fluid Mechanics Problems and Solutions*, Springer, Berlin Heidelberg.
13. **Stoer J., Bulirsch R.** (2002), *Introduction to Numerical Analysis*, Springer.
14. **Teleszewski T. J.** (2008), *Zastosowanie metody brzegowych równań całkowych do analizy wybranych zagadnień przepływu cieczy lepkiej*, rozprawa doktorska, Politechnika Białostocka.
15. **White F. M.** (1991), *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, Inc, New York.
16. **Лойцянский П. Г.** (1973), *Механика жидкости и газа* Издат, Наука, Moskwa.

IMPLEMENTATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR THE SOLUTION OF UNIDIRECTIONAL FLOW THROUGH STRAIGHT PIPES OF ARBITRARY CROSS-SECTION SHAPES

Abstract: The subject of the presented elaboration is the application of the boundary integral method to calculating of the pressure driven unidirectional flow in pipes and channels of arbitrary shape of the cross-section. The laminar unidirectional flow of viscous fluid described by Stokes equation is a satisfactory model to the description of the numerous flows in machines and engineering devices. In the paper is presented the solution of the problem of the flow of Newtonian liquid limited by the cylindrical surface about the arbitrary shape of the cross-section in the expression of boundary integral equations. The results of calculations the velocity field of unidirectional flow through pipes and straight closed ducts of the selected shapes of the cross-section with comparisons of numeric solutions with accessible in the literature with analytic solutions showing the satisfactory exactitude and the efficiency the method boundary integral equations to the solution this class of problems of flow in technical uses.

Opracowanie wykonano w ramach pracy statutowej S/WBIIŚ/5/2011 i projektu współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.