

WPLYW SZCELINY NA ROZKŁAD CIŚNIENIA KONTAKTOWEGO W PŁASKIM ZAGADNIENIU Z UWZGLĘDNIENIEM TARCIA

Adam TOMCZYK*

*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

a.tomczyk@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono rozwiązanie problemu, w którym sztywny stempel przesuwany się po powierzchni półprzestrzeni osłabionej pojedynczą szczeliną wnikającą w powierzchnię w pewnej odległości od osi stempla. Rozważono przy tym sytuację kiedy stempel ma podstawę płaską lub podstawę o kształcie parabolicznym badając tym samym efekt kształtu stempla. Określono rozkłady naprężeń kontaktowych pod stemplem dla różnych wartości odległości szczeliny od stempla, długości szczeliny i jej orientacji oraz dla różnych wartości współczynnika tarcia i współczynnika Poissona. Dokonano także analizy wpływu wspomnianych parametrów na wielkość strefy kontaktu oraz na wartość mimośrodowość strefy względem osi stempla parabolicznego. Zwrócono uwagę, że w pewnych sytuacjach zastąpienie działania stempla regularnymi rozkładami ciśnienia kontaktowego bez uwzględnienia wzajemnego oddziaływania szczeliny (lub układu szczelin) i stempla może prowadzić do znacznych błędów.

1. WPROWADZENIE

Praktyka inżynierska zwłaszcza z zakresu budowy i eksploatacji maszyn czy też z zakresu technologii procesów obróbki skrawaniem bardzo często dostarcza zagadnień związanych z problemami tarcia współpracujących ze sobą elementów. Wiele klasycznych przykładów tego typu zagadnień odnajdziemy np. we wszelkiego rodzaju hamulcach ciernych, przekładniach zębatych, w procesie szlifowania, czy też w zagadnieniu hamowania koła na szynie kolejowej. W analizie tego typu zagadnień w przeważającej większości zakłada się, że oba współpracujące ze sobą elementy pozbawione są jakichkolwiek uszkodzeń np. w postaci pęknięć powierzchniowych lub podpowierzchniowych czy też otworów. Jest rzeczą oczywistą, że pojawienie się takich uszkodzeń pociąga za sobą redystrybucję a przede wszystkim silną koncentrację naprężeń związaną z efektem działania karbu czy szczeliny. Znajomość wartości współczynników intensywności naprężeń – a więc znajomość charakteru tej koncentracji – pozwala na prognozowanie pęknięcia tych elementów i nierzadko na zapobieżenie katastrofie.

W niniejszej pracy skupiono się głównie na analizie efektów związanych z przesuwaniem się dociskanego stempla po powierzchni półprzestrzeni sprężystej osłabionej pojedynczą szczeliną powierzchniową. Rozpatrzono tu płaskie zagadnienie zakładając jednocześnie, że stempel jest idealnie sztywny i pomijając efekty związane z generacją ciepła na skutek tarcia. W literaturze najczęściej modeluje się tego typu zagadnienia zadając obciążenie w postaci odpowiedniego ciśnienia kontaktowego na powierzchni półprzestrzeni w miejscu działania stempla.

Takie podejście znajdziemy np. w cyklu prac Keera i współautorów (Keer i Bryant, 1983; Keer et al., 1982; Fan et al., 1992). Autorzy poddali tu analizie między innymi problem zmęczenia koła osłabionego pojedynczą szczeliną (Keer i Bryant, 1983), a także zagadnienie gdzie półprzestrzeń osłabiona jest dwoma szczelinami: pionową szczeliną

brzegową i poziomą podpowierzchniową (Keer et al., 1982). Podjęto także próbę zbadania wzajemnego oddziaływania szczeliny i cylindrycznego stempla ale tylko dla przypadku kiedy szczelina znajduje się dokładnie pod stemplem (Bryant et al., 1984). Podobną tematykę czytelnik odnajdzie także w pracach Hasebe i współautorów (np. Hasebe, 1981; Hasebe et al., 1989; Okumura et al., 1990; Hasebe i Qian, 1995, 1997, 1998; Qian i Hasebe, 1997) gdzie np. rozważano stempel, którego jeden koniec był zaokrąglony a drugi ostry (Hasebe i Qian, 1998). Problem kontaktu między stemplem a półpłaszczyzną osłabioną pęknięciami był też przedmiotem badań Panasyuka i współautorów (np. Panasyuk et al., 1995, 2000). Należy zwrócić uwagę, że przedyskutowano tu problem zamykania się szczeliny brzegowej znajdującej się w obszarze naprężeń ściskających z uwzględnieniem możliwości wystąpienia tarcia na jej powierzchniach (Panasiuk et al., 2000).

W pracach Goshimy i współautorów znajdziemy także efekty związane z generacją ciepła na skutek tarcia między stemplem a powierzchnią półprzestrzeni (Goshima i Keer, 1990; Goshima i Kamishima, 1994, 1996; Goshima, 2003; Goshima i Soda, 1997; Goshima et al., 1990). Uwzględniono tu jednocześnie efekty związane ze zmęczeniem materiału. Analizowano przy tym uszkodzenie w postaci pojedynczej szczeliny brzegowej (Goshima i Keer, 1990), układu dwóch szczelin brzegowych o różnym kącie nachylenia (Goshima i Kamishima, 1996) oraz układu szczelin periodycznych (Goshima i Kamishima, 1994; Goshima, 2003). W omawianym cyklu prac znajdziemy także rozwiązanie zagadnienia płaskiego z uszkodzeniem w postaci pojedynczej szczeliny podpowierzchniowej (Goshima i Soda, 1997) a także zagadnienia z powierzchnią szczeliną trójwymiarową (Goshima, 2003; Goshima i inni, 1990).

Niniejsza praca stanowi kontynuację wcześniejszych prac (np. Savruk i inni, 2007, 2008, Savruk i Tomczyk, 2010). Zasadniczym problemem jaki tu analizowano było określenie wpływu obecności szczeliny brzegowej na roz-

kłady ciśnienia kontaktowego pod stemplem. Rozpatrzono przy tym sytuacje kiedy podstawa stempla ma kształt paraboliczny oraz płaski. Należy podkreślić, że podobny temat był podejmowany w literaturze gdzie wykorzystano model dyslokacyjny (np. Fujimoto et al., 1992) jednak tylko dla stempla parabolicznego i szczeliny podpowierzchniowej bez uwzględnienia tarcia między stemplem i powierzchnią półprzestrzeni. W prezentowanej pracy szczególny nacisk położono na stworzenie procedur numerycznych i wykorzystanie ich do szczegółowej analizy numerycznej wspomnianego wcześniej zagadnienia.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

We wcześniejszych pracach (np. Savruk et al., 2007, 2008, Savruk i Tomczyk, 2010) przedstawiono rozwiązanie ogólne zagadnienia, w którym stempel dociskany jest do powierzchni półprzestrzeni sprężystej osłabionej uszkodzeniami w postaci układu szczelin podpowierzchniowych jak i powierzchniowych także krzywoliniowych (Rys. 1). Pomiedzy idealnie sztywnym stemplem a powierzchnią półprzestrzeni występuje tarcie scharakteryzowane współczynnikiem tarcia ρ .

Obciążenie stempla stanowi siła P zaś a jest połową strefy kontaktu. Sam stempel znajduje się w stanie równowagi granicznej. Do rozwiązania zagadnienia wykorzystano do tego celu ogólne potencjały zespolone naprężeń (zob. Muskhelishvili, 1962; Savruk, 1981) dla układu szczelin krzywoliniowych w półprzestrzeni, na powierzchni której zadane jest obciążenie zewnętrzne uzyskując odpowiedni układ równań całkowitych (1) wraz z warunkiem równowagi stempla (2) oraz warunkiem jednoznaczności przemieszczeń (3) podczas „obchodzenia” każdej wewnętrznej szczeliny:

$$\begin{aligned} \varepsilon\rho\sigma(x) + \frac{1}{\pi} \int_{L_0} \frac{\sigma(t)dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_L [K_1(t,x)g'(t)dt + \\ + L_1(t,x)\overline{g'(t)}\overline{dt}] = \frac{4G}{\kappa+1} f'(x), \quad x \in L_0, \end{aligned} \tag{1a}$$

$$\begin{aligned} \int_L [K_2(t,t')g'(t)dt + L_2(t,t')\overline{g'(t)}\overline{dt}] + \\ + \int_{L_0} M(t,t')\sigma(t)dt = \pi p(t), \quad t' \in L, \end{aligned} \tag{1b}$$

$$\int_{L_0} \sigma(t)dt = -P, \tag{2}$$

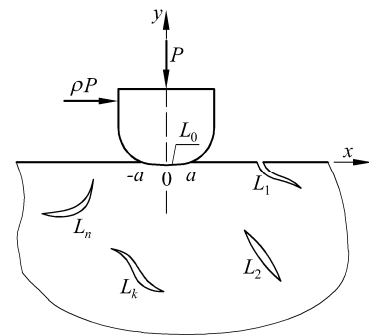
$$\int_{L_k} g'(t)dt = 0, \quad k = \overline{2,n}. \tag{3}$$

gdzie: $\varepsilon = (\kappa - 1)/(\kappa + 1)$, $\kappa = 3-4\nu$, G – moduł sztywności, ν – współczynnik Poissona, $g'(t)$ – pochodna wektora skośków przemieszczeń na konturach szczelin, $f(x)$ – funkcja opisująca kształt podstawy stempla, $p(t)$ – samorzównoważone obciążenie na brzegach szczelin.

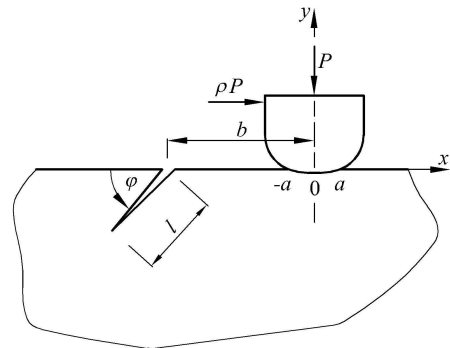
Jądra układu równań (1) można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} K_1(t,x) &= \frac{2}{\kappa+1} \left[\kappa f_{21}(t,x) - \overline{f_{22}(t,x)} - x \overline{g_{22}(t,x)} - \overline{h_{22}(t,x)} \right], \\ L_1(t,x) &= \frac{2}{\kappa+1} \left[\kappa f_{22}(t,x) - \overline{f_{21}(t,x)} - x \overline{g_{21}(t,x)} - \overline{h_{21}(t,x)} \right], \\ K_2(t,t') &= f_{21}(t,t') + \overline{f_{22}(t,t')} + \frac{dt'}{dt} \left[t' \overline{g_{22}(t,t')} + \overline{h_{22}(t,t')} \right], \\ L_2(t,t') &= f_{22}(t,t') + \overline{f_{21}(t,t')} + \frac{dt'}{dt} \left[t' \overline{g_{21}(t,t')} + \overline{h_{21}(t,t')} \right], \\ M(t,t') &= f_{11}(t,t') + \overline{f_{11}(t,t')} + \frac{dt'}{dt} \left[t' \overline{g_{11}(t,t')} + \overline{h_{11}(t,t')} \right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Wielkości f_{ij} , g_{ij} i h_{ij} ($i, j = 1,2$) określone są funkcjami zmiennych zespolonych t i z oraz współczynnika tarcia ρ .



Rys. 1. Stempel na powierzchni półprzestrzeni osłabionej układem szczelin



Rys. 2. Schemat dociskanego stempla przesuwającego się po powierzchni półprzestrzeni osłabionej pojedynczą szczeliną

Rozpatrzmy obecnie przypadek, w którym półprzestrzeń osłabiona jest tylko jedną prostoliniową szczeliną brzegową o długości l w sposób przedstawiony na Rys. 2. Odległość szczeliny od osi stempla wynosi b .

Wprowadźmy parametryczny zapis konturów szczeliny L i strefy kontaktu stempla z powierzchnią półprzestrzeni L_0 :

$$\begin{aligned} t = a\xi, \quad x = a\eta, \quad (t, x \in L_0); \quad t = a\omega(\xi), \\ t' = a\omega(\eta) \quad (t, t' \in L), \quad -1 < \xi, \eta < 1, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\omega(\xi) = -b^* - \frac{l^*}{2}(\xi + 1)e^{i\varphi}, \quad b^* = \frac{b}{a}, \quad l^* = \frac{l}{a},$$

oraz bezwymiarowe zmienne i funkcje:

$$\begin{aligned}\sigma(a\eta) &= \sigma(\eta), & g'(a\omega(\xi))\omega'(\xi) &= g'(\xi), \\ p(a\omega(\xi)) &= p(\eta), & 4G(\kappa+1)^{-1}f'(a\eta) &= F(\eta), \\ aK_1(a\omega(\xi), a\eta) &= K_1(\xi, \eta), \\ aL_1(a\omega(\xi), a\eta) &= L_1(\xi, \eta), \\ aK_2(a\omega(\xi), a\omega(\eta)) &= K_2(\xi, \eta), \\ aL_2(a\omega(\xi), a\omega(\eta)) &= L_2(\xi, \eta), \\ aM(a\xi, a\omega(\eta)) &= M(\xi, \eta).\end{aligned}\quad (6)$$

Wówczas układ równań całkowych rozwiązania ogólnego oraz warunków równowagi stempla przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\varepsilon\rho\sigma(\eta) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi-\eta} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-1}^1 \left[K_1(\xi, \eta)g'(\xi) + \right. \\ \left. + L_1(\xi, \eta)\overline{g'(\xi)} \right] d\xi, & \quad |\eta| < 1, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[K_2(\xi, \eta)g'(\xi) + L_2(\xi, \eta)\overline{g'(\xi)} \right] d\xi + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M(\xi, \eta)\sigma(\xi)d\xi &= p(\eta), \quad |\eta| < 1.\end{aligned}\quad (7)$$

$$\int_{-1}^1 \sigma(\xi)d\xi = A = \frac{-P}{a}, \quad (8)$$

Należy podkreślić, że z uwagi na fakt iż jeden z wierzchołków szczeliny „wychodzi” na powierzchnię warunek jednoznaczności przemieszczeń musimy zastąpić warunkiem zerowania się współczynników intensywności naprężeń w tym wierzchołku tj. dla $\xi = -1$:

$$u(-1) = 0. \quad (9)$$

Rozwiązania układu równań całkowych (7), spełniające warunki (8) i (9), będziemy poszukiwać w klasie funkcji, posiadających osobliwości całkwalne:

$$\begin{aligned}\sigma(\xi) &= w(\xi)q(\xi), \\ w(\xi) &= (1-\xi)^\alpha(1+\xi)^\beta, \quad -1 < \alpha, \beta < 0, \\ g'(\xi) &= (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}u(\xi),\end{aligned}\quad (10)$$

gdzie $q(\xi)$ i $u(\xi)$ są funkcjami ciągłymi w przedziale obustronnie domkniętym $[-1, 1]$, a parametry α i β pierwiastkami $\alpha = -0.5 + \mu$, $\beta = -0.5 - \mu$, $\mu = \arctan \varepsilon\rho$ równań charakterystycznych $\cot \pi\alpha = -\varepsilon\rho$, $\cot \pi\beta = \varepsilon\rho$.

W celu numerycznego rozwiązania układu równań (7) zastosowano metodę kwadratur (np. Savruk, 1981; Savruk et al., 1999) z wykorzystaniem węzłów Gaussa-Chebysheva. W wyniku otrzymano układ liniowych równań algebraicznych w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_{mk}q(\xi_k) + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\hat{n}} \left[b_{1mk}u(\xi_k) + \right. \\ \left. + c_{1mk}\overline{u(\xi_k)} \right] = F(\eta_m), \quad m = 1, \dots, n-1,\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\hat{n}} \left[b_{2mk}u(\xi_k) + c_{2mk}\overline{u(\xi_k)} \right] + \\ + \sum_{k=1}^n d_{mk}q(\xi_k) = p(\hat{\eta}_m), \quad m = 1, \dots, \hat{n}-1,\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{nk}q(t_k) = A, \quad \sum_{k=1}^{\hat{n}} (-1)^k \sqrt{\frac{1-\xi_k}{1+\xi_k}} u(\xi_k) = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\xi_k &= \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, & \eta_m &= \cos \frac{\pi m}{n}, \\ \hat{\xi}_k &= \cos \frac{2k-1}{2\hat{n}} \pi, & \hat{\eta}_k &= \cos \frac{\pi m}{\hat{n}}.\end{aligned}\quad (13)$$

Wielkościami poszukiwanymi są tu funkcje $q(\xi)$ i $u(\xi)$ w węzłach ξ_k i $\hat{\xi}_k$. Współczynniki przy niewiadomych w układzie równań (11)-(12) dane są wzorami:

$$\begin{aligned}a_{mk} &= -\frac{1}{n}(-1)^k \sqrt{1-\xi_k^2} \left\{ X_0 \left[\frac{1}{1-\xi_k} - \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \right] + \right. \\ &+ \frac{R_0}{1+\eta_m} \left[\frac{(-1)^n}{1+\xi_k} + \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \right] + X_3(\eta_m) + X_4(\eta_m) \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \left. \right\}, \\ a_{nk} &= \frac{\pi}{n} \sqrt{1-\xi_k^2} \left[w(\xi_k) - (-1)^k \frac{X_0}{1-\xi_k} + (-1)^{k+n} \frac{R_0}{1+\xi_k} \right], \\ b_{1mk} &= \frac{1}{n} K_1(\xi_k, \eta_m), & b_{2mk} &= \frac{1}{n} K_2(\xi_k, \eta_m), \\ c_{1mk} &= \frac{1}{n} L_1(\xi_k, \eta_m), & c_{2mk} &= \frac{1}{n} L_2(\xi_k, \eta_m), \\ d_{mk} &= \frac{1}{n} \sqrt{1-\xi_k^2} \left[M(\xi_k, \eta_m)w(\xi_k) - \right. \\ &- (-1)^k \frac{X_0 M(1, \eta_m)}{1-\xi_k} + (-1)^{n+k} \frac{R_0 M(-1, \eta_m)}{1+\xi_k} \left. \right],\end{aligned}\quad (14)$$

$$X_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{2\alpha}{\sin \pi\alpha} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \right]$$

$$R_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{2\beta}{\sin \pi\beta} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \right]$$

$$X_1(x) = \frac{1}{2} \left[X(x) \cot \pi\alpha - \frac{1}{\sin \pi\alpha} - R(x) \cot \pi\beta + \frac{1}{\sin \pi\beta} \right],$$

$$X_3(x) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n w(\xi_r) \sqrt{1-\xi_r^2} F(x, \xi_r, \xi_k),$$

$$X_4(x) = \varepsilon\rho w(x) + X_1(x),$$

$$X(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^\alpha, \quad R(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\beta,$$

$$F(x, \xi_r, \xi_k) = \begin{cases} \frac{T_n(x)}{(x-\xi_k)(x-\xi_r)}, & x \neq \xi_k, x \neq \xi_r, \xi_k \neq \xi_r, \\ -\frac{n(-1)^r}{\sqrt{1-\xi_r^2}(\xi_r-x)} + \frac{T_n(x)}{(\xi_r-x)^2}, & x \neq \xi_k = \xi_r, \end{cases}$$

gdzie $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ jest wielomianem Chebysheva pierwszego rodzaju stopnia n .

Z wykorzystaniem interpolacyjnego wielomianu Lagrange'a dla węzłów ξ_k znajdujemy wartości funkcji $q(\xi)$ w dowolnym punkcie

$$q(\xi) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k q(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \frac{T_n(x)}{\xi-\xi_k}. \quad (15)$$

W szczególności, na końcach przedziału $[-1, 1]$ otrzymaliśmy

$$q(\pm 1) = \mp \frac{(\pm 1)^n}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{\frac{1 \pm \xi_k}{1 \mp \xi_k}} q(\xi_k). \quad (16)$$

W podobny sposób szukamy wartości funkcji $u(\xi)$ w węzłach ξ_k , a mianowicie:

$$u(\xi) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k u(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \frac{T_n(x)}{\xi-\xi_k}, \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (17)$$

$$u(\pm 1) = \mp \frac{(\pm 1)^n}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{\frac{1 \pm \xi_k}{1 \mp \xi_k}} u(\xi_k). \quad (18)$$

Współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny dla $\xi = 1(K_{I,II}^+)$ wyznaczamy według wzoru (np. Savruk, 1981):

$$K_I^+ - iK_{II}^+ = -\sqrt{\pi a |\omega'(1)|} \frac{u(1)}{\omega'(1)}. \quad (19)$$

Należy przypomnieć, że autor analizował zagadnienie, w którym podstawa stępła jest płaska lub paraboliczna. W przypadku stępła płaskiego wymiar strefy kontaktu L_0 jest znany i równy szerokości stępła. Natomiast, w przypadku stępła parabolicznego wymiar tej strefy nie jest znany i trzeba go wyznaczać. Dodatkowo następuje „przesunięcie” środka strefy kontaktu względem osi stępła. Przesunięcie to w literaturze anglojęzycznej nazywane jest „mimośrodkowością” czy też „promieniem mimośrodu” (*eccentricity*) więc w dalszej części pracy autor będzie używał tej właśnie nazwy. Obie wielkości tj. wymiar strefy jak i promień jej mimośrodu były przedmiotem szczegółowych badań autora i wyznaczano je z warunku zerowania się naprężeń kontaktowych na granicy strefy tj.:

$$q(-1) = q(1) = 0. \quad (20)$$

3. ANALIZA NUMERYCZNA

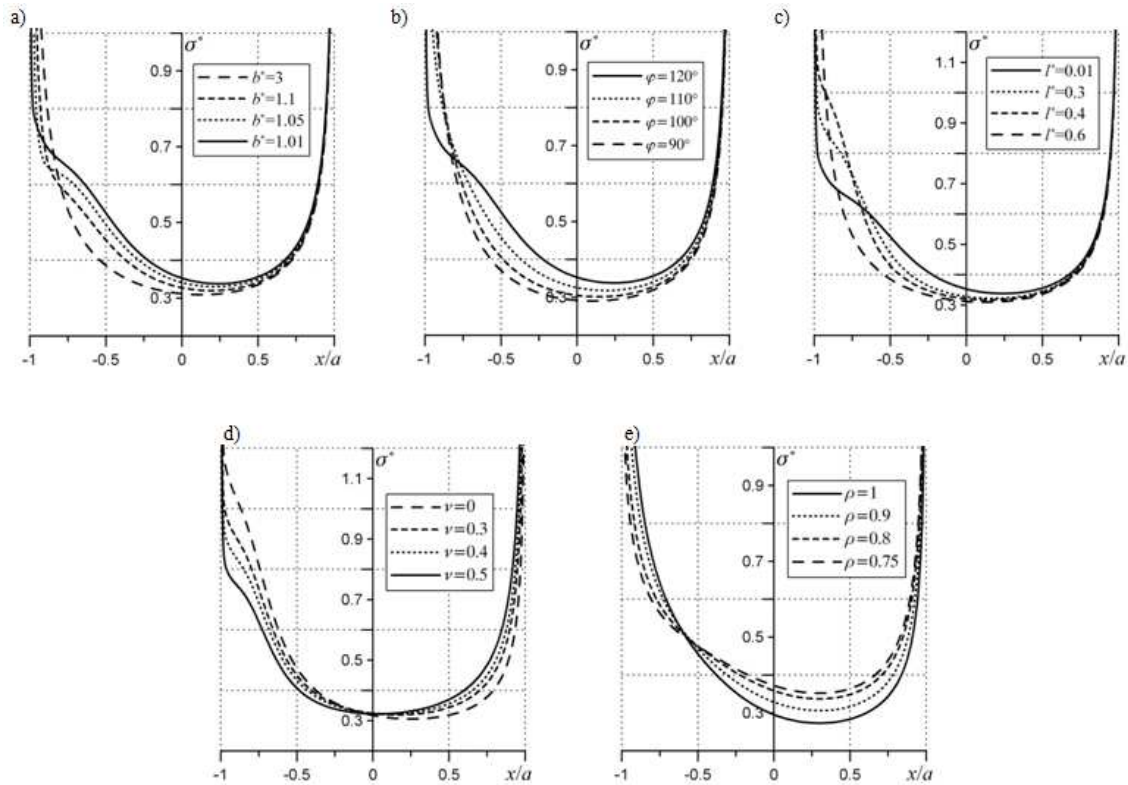
Przedstawione w poprzednim paragrafie zależności teoretyczne posłużyły do stworzenia numerycznych algorytmów obliczeniowych pozwalających na określenie rozkładów naprężeń kontaktowych oraz wartości współczynników intensywności naprężeń w otoczeniu wierzchołka szczeliny. Przedstawione poniżej wykresy obrazują efekt wpływu obecności szczeliny na rozkłady ciśnienia kontaktowego. Jak już wspomniano rozpatrzono dwa różne kształty podstawy stępła tj. płaski oraz paraboliczny. Należy podkreślić, że ciśnienie kontaktowe pod stępłem σ , wymiar strefy kontaktu a oraz mimośrodkowość e środka strefy względem osi stępła zostały unormowane zgodnie ze schematem:

$$\sigma^* = \frac{\sigma a}{P}, \quad e^* = \frac{e}{a}, \quad a^* = \frac{a}{a_0}, \quad (21)$$

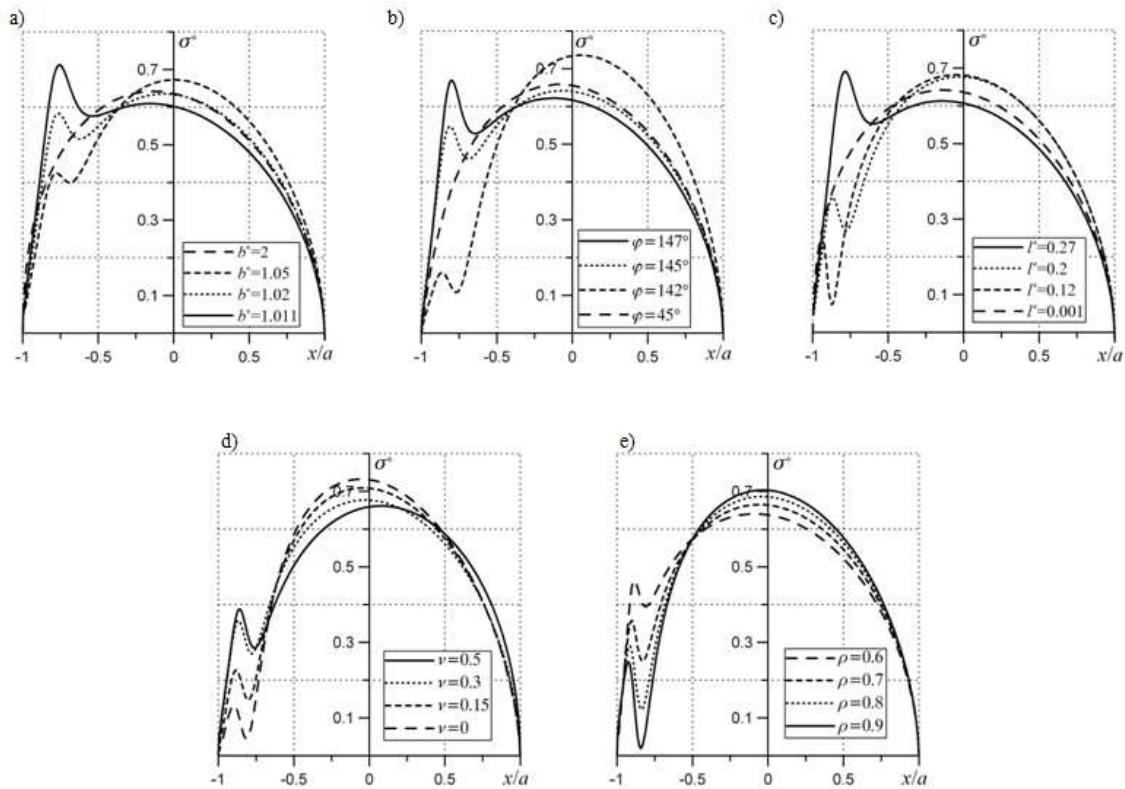
$$a_0^2 = \frac{2 PR}{\pi G} (1-\nu),$$

gdzie R jest parametrem paraboli, zaś a_0 – połową strefy kontaktu w zagadnieniu Hertza – wciskania (bez tarcia) cylindrycznego stępła w powierzchnię jednorodnej półprzestrzeni.

Przeprowadzona analiza numeryczna dowiodła, że obecność szczeliny ma znaczny wpływ na rozkłady ciśnienia kontaktowego. Dotyczy to zarówno stępła płaskiego jak również parabolicznego szczególnie dla kątów pochylenia szczeliny należących do przedziału $(90^\circ, 180^\circ)$. Dla takich kątów wierzchołek szczeliny może znaleźć się bezpośrednio w obszarze pod strefą kontaktu i powodować dość gwałtowne „zaburzenie” rozkładu ciśnienia (Rys. 3, Rys. 4). Dokonano szczegółowej analizy rozkładów ciśnienia kontaktowego również dla $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ jednak wykazała ona znaczącego wpływu obecności szczeliny na te rozkłady – nawet dla szczelin położonych blisko stępła. Tak więc w wielu przypadkach tego typu zagadnień wprowadzenie regularnych rozkładów ciśnienia kontaktowego w miejscu działania stępła może prowadzić do znacznych błędów. Dopiero uwzględnienie wzajemnego oddziaływania stępła i szczeliny (układu szczelin) daje dokładne informacje o charakterze rozkładów ciśnienia. W przypadku półprzestrzeni jednorodnej lub gdy szczelina jest wystarczająco odległa od stępła wspomniane różnice można zaniedbać. Należy podkreślić, że wyraźny efekt wpływu szczeliny na rozkłady ciśnienia można osiągnąć poprzez: zmniejszenie odległości stępła od szczeliny (Rys. 3a, Rys. 4a), zwiększanie kąta φ w zakresie od 90° do 180° (Rys. 3b, Rys. 4b), zwiększanie długości szczeliny (Rys. 3c, Rys. 4c), zwiększanie współczynnika Poissona (Rys. 3d, Rys. 4d), zmianę współczynnika tarcia (Rys. 3e, Rys. 4e). Zwróćmy uwagę, że Rys. 3 i 4 odpowiadają sytuacji kiedy szczelina jest ścinana i rozrywana ($F_I > 0$). Chcąc analizować zagadnienia, w których szczelina znajduje się w obszarze naprężeń ściskających należałoby uwzględniać kontakt brzegów szczeliny.



Rys. 3. Rozkład ciśnienia kontaktowego pod stemplem płaskim: a) efekt odległości szczeliny od stempla ($\varphi = 120^\circ$, $l^* = 0.6$, $\nu = 0.3$, $\rho = 0.7$), b) efekt orientacji szczeliny ($b^* = 1.01$, $l^* = 0.6$, $\nu = 0.3$, $\rho = 0.7$), c) efekt długości szczeliny ($\varphi = 120^\circ$, $b^* = 1.01$, $\nu = 0.3$, $\rho = 0.7$), d) efekt współczynnika Poissona ($\varphi = 120^\circ$, $l^* = 0.35$, $b^* = 1.01$, $\rho = 0.7$), e) efekt tarcia ($\varphi = 120^\circ$, $l^* = 1$, $\nu = 0.3$, $b^* = 1.01$)



Rys. 4. Rozkład ciśnienia kontaktowego pod stemplem parabolicznym: a) efekt odległości szczeliny od stempla ($\varphi = 145^\circ$, $l^* = 0.3$, $\nu = 0.3$, $\rho = 0.75$), b) efekt orientacji szczeliny ($b^* = 1.01$, $l^* = 0.25$, $\nu = 0.3$, $\rho = 0.75$), c) efekt długości szczeliny ($\varphi = 145^\circ$, $b^* = 1.01$, $\nu = 0.3$, $\rho = 0.75$), d) efekt współczynnika Poissona ($\varphi = 145^\circ$, $l^* = 0.2$, $b^* = 1.01$, $\rho = 0.75$), e) efekt tarcia ($\varphi = 145^\circ$, $l^* = 0.15$, $\nu = 0.3$, $b^* = 1.01$)

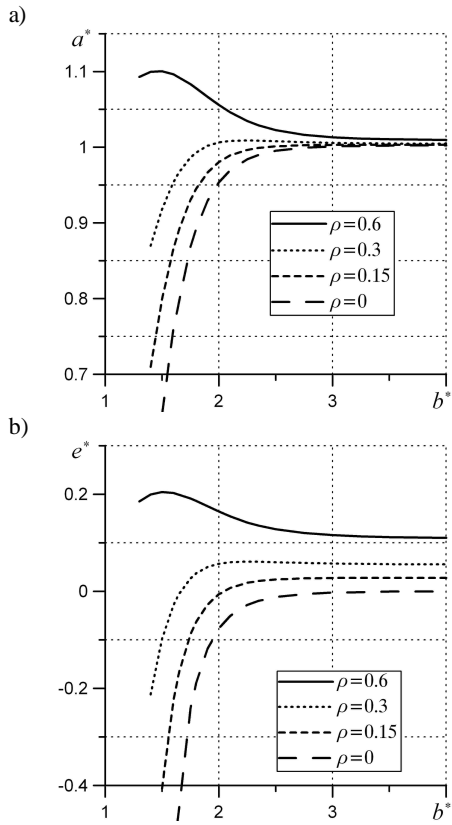


Fig. 5. Wpływ odległości szczeliny od stempla na wielkość strefy kontaktu (a) i przesunięcie jej środka (b) dla różnych wartości tarcia ($l^* = 1$, $\varphi = 135^\circ$, $\nu = 0.3$)

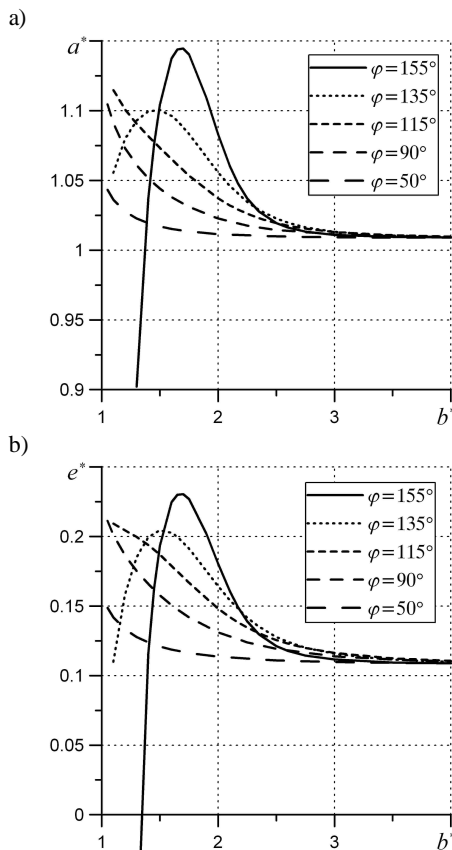


Fig. 6. Wpływ odległości szczeliny od stempla na wielkość strefy kontaktu (a) i przesunięcie jej środka (b) dla różnych orientacji szczeliny ($l^* = 1$, $\rho = 0.6$, $\nu = 0.3$)

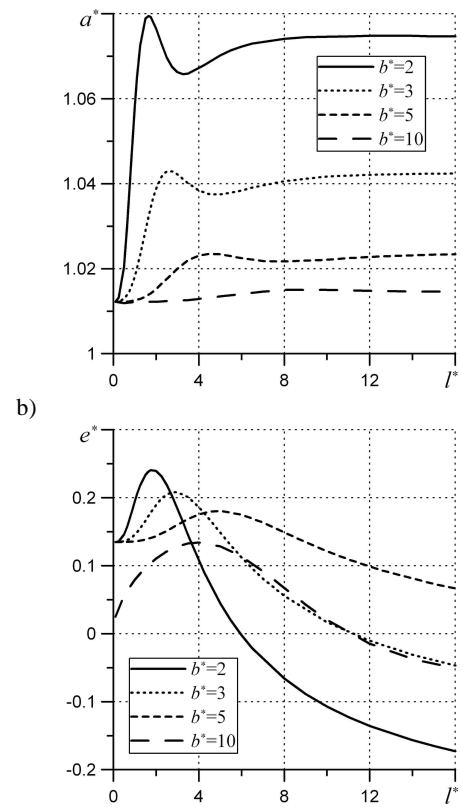


Fig. 7. Wpływ długości szczeliny na wielkość strefy kontaktu (a) i jej mimośród (b) dla różnych odległości szczeliny od stempla ($\varphi = 120^\circ$, $\rho = 0.75$, $\nu = 0.3$)

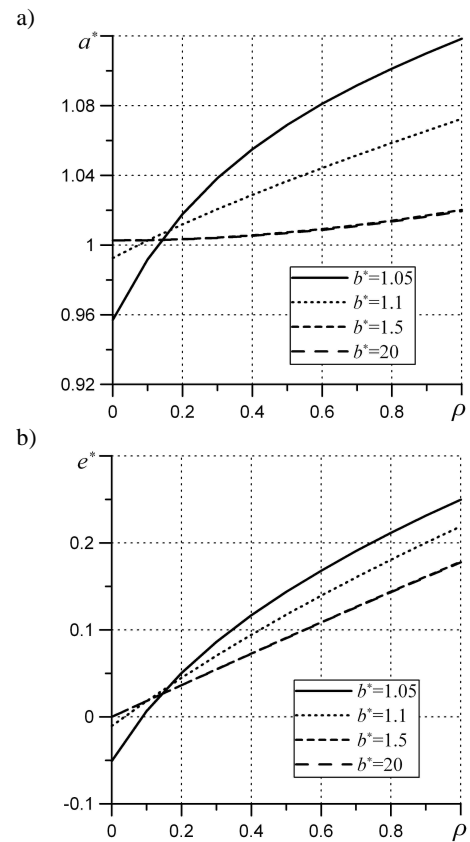


Fig. 8. Wpływ tarcia na wielkość strefy kontaktu (a) jej mimośród (b) dla różnych odległości szczeliny od stempla ($l^* = 0.1$, $\varphi = 120^\circ$, $\nu = 0.3$)

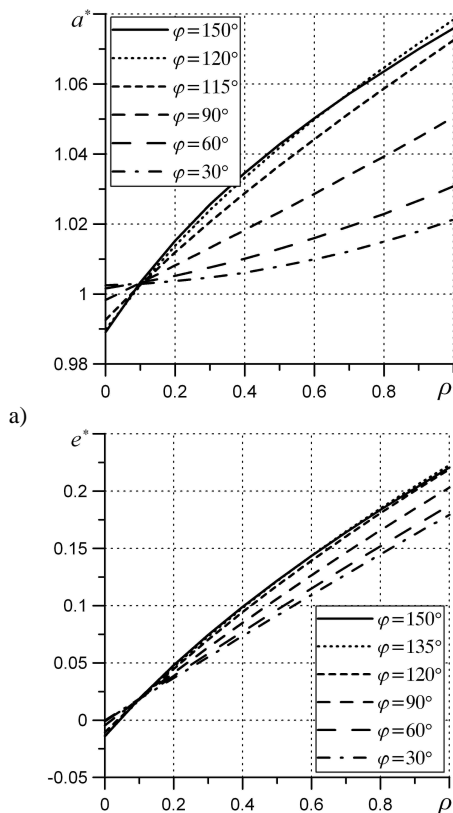


Fig. 9. Wpływ tarcia na wielkość strefy kontaktu (a) i jej mimośród (b) dla różnych orientacji szczeliny ($l^* = 0.1$, $b^* = 1.1$, $\nu = 0.3$)

Jak już wspomniano, w przypadku stempla płaskiego wymiar strefy kontaktu jest znany. W przypadku stempla parabolicznego wymiar ten musi być wyznaczony z warunku zerowania się naprężeń na brzegach strefy (zob. równanie (20)). W pracy dokonano również szczegółowej analizy zarówno wielkości strefy jak i jej mimośrodu w zależności od odległości szczeliny od stempla, długości szczeliny i jej orientacji oraz wartości współczynnika tarcia. Należy podkreślić, że wszystkie te efekty zaznaczają się szczególnie wyraźnie dla szczelin znajdujących się blisko stempla. W miarę oddalania się szczeliny od stempla wymiar strefy kontaktu stabilizuje się na jednym poziomie odpowiadającym wymiarowi strefy w zagadnieniu Hertza (Rys. 5a, 6a). Przy dużych wartościach tarcia wspomniany poziom stabilizacji osiągany jest dla szczelin dużo bardziej odległych od stempla niż przy małym tarcu. W przypadku analizy zmian wielkości strefy kontaktu w funkcji długości szczeliny dla kątów $\varphi \in (90^\circ, 180^\circ)$ poziom stabilizacji nie musi odpowiadać wymiarowi strefy w zagadnieniu Hertza (Rys. 7a). Wzrost długości szczeliny powyżej pewnej wartości nawet dla szczelin bliskich nie ma większego wpływu na wielkość strefy kontaktu w odróżnieniu od wartości mimośrodu (Rys. 7b). Zwrócić uwagę, że przy małym tarcu środek strefy może przesuwać się w przeciwnym kierunku niż przy dużych wartościach współczynnika tarcia (Rys. 5b, Rys. 6b). Tak więc przy odpowiednim usytuowaniu i orientacji szczeliny oraz wartości współczynnika tarcia może zdarzyć się sytuacja, że mimośród nie wystąpi nawet przy bardzo dużym tarcu. Sytuacje takie nastąpią tym wcześniej (tj. dla krótszych

szczelin) im szczelina położona jest bliżej stempla zaś współczynnika tarcia osiąga większe wartości.

Jednocześnie im większy współczynnik tarcia i kąt φ bliższy 180° wielkość strefy gwałtownie wzrasta aby po osiągnięciu maksimum maleć – w przeciwieństwie do kątów φ bliskich i mniejszych od 90° (Rys. 6a). Dla bardzo dużych wartości współczynnika tarcia, efekt odległości szczeliny od stempla i efekt orientacji szczeliny zaznaczają się najwyraźniej (Rys. 8, Rys. 9).

4. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W niniejszej pracy wykorzystano metodę potencjałów zespolonych naprężeń do określania rozkładów ciśnienia kontaktowego w zagadnieniu „przesuwania się” stempla po powierzchni półprzestrzeni sprężystej osłabionej pojedynczą szczeliną brzegową. Rozpatrzono przy tym sytuację, w której podstawa stempla ma kształt paraboliczny lub płaski badając tym samym wpływ kształtu podstawy stempla na rozkłady wspomnianego ciśnienia kontaktowego. Rozwiązanie zagadnienia przedstawiono w postaci układu równań całkowych. W celu numerycznego rozwiązania tego układu wykorzystano metodę kwadratur, która pozwoliła uzyskać układ liniowych równań algebraicznych co oczywiście znacznie ułatwiło rozwiązanie. Należy podkreślić, że metoda pozwala na jednoczesne obliczanie wartości współczynników intensywności naprężeń przed wierzchołkiem szczeliny. Uwzględnić przy tym wzajemne oddziaływanie szczeliny oraz stempla.

Wykazano znaczący wpływ obecności szczeliny brzegowej na rozkłady ciśnienia kontaktowego pod stemplem. W szczególnych przypadkach szczelina może powodować bardzo silne zaburzenia regularnych rozkładów ciśnienia. Sytuację taką możemy zaobserwować szczególnie wyraźnie dla szczelin położonych blisko stempla kiedy kąt φ należy do przedziału $(90^\circ, 180^\circ)$. Dla kątów $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ wpływ szczeliny na rozkłady ciśnienia kontaktowego można zaniedbać. W związku z powyższym w pewnych przypadkach należy unikać zastępowania działania stempla regularnymi rozkładami ciśnienia bo może to prowadzić do znacznych błędów.

W dalszych pracach planuje się wykorzystanie przedstawionej procedury do rozwiązywania zagadnień bardziej złożonych. Autor ma tu na myśli np. zagadnienia, w których półprzestrzeń osłabiona jest układem powierzchniowych szczelin periodycznych. Można także podjąć próbę wykorzystania wspomnianych rozwiązań do analizy zagadnień gdzie pojedyncze szczeliny lub układy tych szczelin występują pod powierzchnią półprzestrzeni czy też gdy mamy do czynienia z makroinkluzjami.

LITERATURA

1. Bryant M.D., Miller G.R., Keer L.M. (1984): Line contact between a rigid indenter and a damaged elastic body, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* Vol. 37, 467-478.

2. **Fan H., Keer L.M., Mura T.** (1992), Near surface crack initiation under contact fatigue, *Tribology Transactions*, Vol. 35, 121-127.
3. **Fujimoto K., Ito H., Yamamoto T.** (1992), Effect of cracks on the contact pressure distribution, *Tribology Transactions*, Vol. 35, 683-695.
4. **Goshima T.** (2003), Thermomechanical effects on crack propagation in rolling contact fatigue failure, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 26, 615-639.
5. **Goshima T., Hanson M.T., Keer L.M.** (1990), Three-dimensional analysis of thermal effects on surface crack propagation in rolling contact, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 13, 237-261.
6. **Goshima T., Kamishima Y.** (1994), Mutual interference of multiple surface cracks due to rolling-sliding contact with frictional heating, *Int. J. JSME, Ser. A*, Vol. 37, No. 3, 216-223.
7. **Goshima T., Kamishima Y.** (1996), Mutual interference of two surface cracks in semi-infinite body due to rolling contact with frictional heating by a rigid roller, *Int. J. JSME, Ser. A*, Vol. 39, No. 1, 26-33.
8. **Goshima T., Keer L.M.** (1990), Thermoelastic contact between a rolling rigid indenter and a damaged elastic body, *Journal of Tribology, Trans. ASME*, Vol. 112, 382-391.
9. **Goshima T., Soda T.** (1997), Stress intensity factors of a subsurface crack in a semi-infinite body due to rolling/sliding contact and heat generation, *Int. J. JSME, Ser. A*, Vol. 40, No. 3, 263-270.
10. **Hasebe N.** (1981), An edge crack in a semi-infinite plate welded to a rigid stiffener, *Proc. Jap. Civ. Eng.*, No 314, 149-157.
11. **Hasebe N., Okumura M., Nakamura T.** (1989), Frictional punch and crack in plane elasticity, *ASCE, J Eng. Mech.*, Vol. 115, No 6, 1127-1149.
12. **Hasebe N., Qian J.** (1995), Circular inclined punch problem with two corners to contact with a half-plane with a surface crack, *Proc. 2nd Int. Conf. Computational Methods in Contact Mechanics.*, Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston, 159-166.
13. **Hasebe N., Qian J.** (1997), Circular rigid punch with one smooth and another sharp ends on a half-plane with edge crack, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, 73-79.
14. **Hasebe N., Qian J.** (1998), Edge crack due to circular rigid punch in incomplete contact, *Mechanics of Materials*, Vol. 28, 271-279.
15. **Keer L.M., Bryant M.D.** (1983), A pitting model for rolling contact fatigue, *Trans ASME, Journal of Lubrication Technology*, Vol. 105, 198-205.
16. **Keer L.M., Bryant M.D., Haritos G.K.** (1982), Subsurface and surface cracking due to Hertzian contact, *Trans ASME, Journal of Lubrication Technology*, Vol. 104, 347-357.
17. **Muskhelishvili N.I.** (1962), Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Nauka, Moscow, (in Russian).
18. **Okumura M., Hasebe N., Nakamura T.** (1990), Crack due to wedge shaped punch with friction, *ASCE, J. Eng. Mech.*, Vol. 116, 2173-2185.
19. **Panasjuk V.V., Datsyshyn O.P., Marchenko H.P.** (1995), Contact problem for a half-plane with cracks under action of a rigid punch on its boundary, *Physicochemical Mechanics of Materials*, Vol. 31, No 6, 7-16.
20. **Panasjuk V.V., Datsyshyn O.P., Marchenko H.P.** (2000), Stress state of a half-plane with cracks under rigid punch action, *International Journal of Fracture*, Vol. 101, 347-363.
21. **Qian J., Hasebe N.** (1997), Circular rigid punch on a semi-infinite plate with an oblique edge crack subjected to concentrated forces on point dislocations, *Proc. Jap. Civ. Eng.*, No 570, 149-159.
22. **Savruk M.P.** (1981), *Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks*, Naukova Dumka, Kiev, (in Russian)
23. **Savruk M.P., Tomczyk A.** (2010), Pressure with friction of a rigid punch upon an elastic half-space with cracks, *Physicochemical Mechanics of Materials* (in press).
24. **Savruk M.P., Tomczyk A., Yevtushenko O.** (2007), Płaskie kontaktowe zagadnienie z uwzględnieniem tarcia dla półprzestrzeni ze szczeliną, *Acta Mech. Autom.* Vol. 1, s41-44.
25. **Savruk M.P., Yevtushenko O., Tomczyk A.** (2008), Wciskanie płaskiego stempla z uwzględnieniem tarcia w półprzestrzeni osłabionej powierzchniową szczeliną, W *Zagadnienia Mechaniki Pęknięcia i Skrawania Materiałów Plastycznych* (red. Jonak J.) Lubelskie Towarzystwo Naukowe, Lublin, 14-23.

**THE EFFECT OF CRACK
ON CONTACT PRESSURE DISTRIBUTION
IN A PLANE PROBLEM ACCOUNTING FOR FRICTION**

Abstract: The paper presents the solution of the problem of interaction between a rigid punch and an elastic half-space weakened by a single edge crack. It was assumed the parabolic or flat punch to analyze the influence of punch base shape. The contact pressure distributions were obtained for various values of distance between crack and punch, crack length and its orientation, Poisson ratio and also for various values of friction coefficient. A detailed influence of these parameters on contact zone size and its eccentricity is presented for the case of parabolic punch. It was found that assuming regular contact pressure distribution in the place where punch acting can produce considerable errors in many contact problems.

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego statutowego nr S/WM/2/08 realizowanego w Politechnice Białostockiej.