

ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DO WYZNACZANIA PŁASKICH PRZEPLÝWÓW CIECZY LEPKIEJ

Tomasz J. TELESZEWSKI*, Sławomir A. SORKO*

*Katedra Ciepłownictwa, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 4E, 15-351 Białystok

tjt@pb.edu.pl, s.sorko@pb.edu.pl

Streszczenie: Przedmiotem pracy jest implementacja metody brzegowych równań całkowych (elementów brzegowych) do rozwiązywania zagadnień ruchu cieczy lepkiej. Przedstawiono algorytm wyznaczania laminarnych przepływów cieczy lepkiej (przepływów Stokesa) przy użyciu metody brzegowych równań całkowych polegający na wykorzystaniu sprzężonych równań całkowych opisujących pola prędkości i naprężeń lepkich w płynie do wyznaczenia naprężeń lepkich przy warunkach brzegowych sformułowanych dla prędkości, wyznaczeniu pola prędkości ze związków całkowych, a w dalszej kolejności wyznaczeniu ciśnienia, wirowości i funkcji prądu przez wykorzystanie różniczkowych związków pomiędzy tymi wielkościami i prędkością ruchu płynu. Przedstawiono wyniki rozwiązania zagadnienia testowego przepływu płaskiego w zagłębieniu kwadratowym i porównano rezultaty obliczeń metody elementów brzegowych z wynikami obliczeń metodą elementów skończonych. Dokonano porównania przebiegu linii potencjału prądu dla szeregu laminarnych przepływów w układach o różnej konfiguracji ścianek ograniczających przepływ z rezultatami eksperymentalnych wizualizacji przepływów.

1. WPROWADZENIE

Przepływy płynu lepkiego z małymi prędkościami (przy niewielkich liczbach Reynoldsa), są przepływami, w których matematycznym opisie, w równaniach Naviera-Stokesa (równania zachowania pędu), człony konwekcyjnego transportu pędu są pomijalnie małe w porównaniu z członami dyfuzyjnego transportu pędu. Przepływy takie są określane mianem przepływów Stokesa, lub przepływów pełzających i w przypadku ruchu newtonowskiej cieczy lepkiej są opisane układem równań (Batchelor, 1967; Prosnak, 2006):

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{c} \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = 0 \quad (1b)$$

gdzie: w układzie współrzędnych $\{xyz\}$ $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}(c_x, c_y, c_z)$ jest wektorem prędkości płynu, $\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}(g_x, g_y, g_z)$ wektorem sił masowych, p oznacza ciśnienie, a ρ i ν odpowiednio oznaczają gęstość i lepkość kinematyczną płynu.

W pracy przedstawiono rozwiązania szeregu zagadnień płaskich ustalonych przepływów cieczy lepkiej w obszarach ograniczonych ściankami o różnorodnej konfiguracji oraz obiektami na drodze strugi metodą elementów brzegowych (metodą brzegowych równań całkowych).

Metoda elementów brzegowych (MEB) polega w ogólności na matematycznym sformułowaniu zagadnień początkowo-brzegowych dla równań różniczkowych opisujących procesy nieustalone lub zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych opisujących procesy ustalone i sprowadzeniu zagadnień do równań całkowych, rozwiązywanych dalej metodami numerycznymi.

W przypadku opływu różnych obiektów płynem lepkiem i przepływów wewnętrznych płynu lepkiego tylko najprostsze przypadki tych przepływów tj. takie, w których nie zakłada się przeszkód na ściankach, można wyznaczyć metodą analityczną (Prosnak, 1993), natomiast zastosowanie metody różnic skończonych (MRS) (Hirsch, 2007) i metody elementów skończonych (MES) (Zienkiewicz i Taylor, 2000) do rozwiązywania zagadnień przepływowych wewnętrznych i zewnętrznych wiąże się koniecznością pracochłonnego generowania siatek różnicowych, bądź układów elementów skończonych w obszarze rozwiązania.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA. RÓWNANIA CAŁKOWE OPISUJĄCE DWUWYMIAROWY RUCH CIECZY LEPKIEJ

Ustalony, dwuwymiarowy przepływ cieczy lepkiej w prostokątnym układzie współrzędnych $\{xy\}$ przy zaniebdaniu sił masowych opisują równania:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial^2 c_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \end{array} \right], \quad (2)$$

z warunkiem brzegowym braku poślizgu cieczy na materialnym brzegu (L) ograniczającym przepływ i warunkiem nieprzenikalności materialnego brzegu:

$$\left[\begin{array}{l} c_s(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in L \\ c_n(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in L \end{array} \right]. \quad (2^*)$$

2.1. Brzegowe równania całkowe opisujące ruch dwuwymiarowy cieczy lepkiej

Stosując metodę residuów zagadnienie brzegowe dla równań różniczkowych (2) można sprowadzić do układu dwóch brzegowych równań całkowych względem składowych tensora naprężeń lepkich $\bar{f}(\mathbf{q}) = [f_x(\mathbf{q}), f_y(\mathbf{q})]$ w płynie w postaci (Brebbia, 1984; Teleszewski, 2008):

$$-4\pi\mu \begin{bmatrix} \tilde{c}_x(\mathbf{p}) \\ \tilde{c}_y(\mathbf{p}) \end{bmatrix} + \mu \int_{(L)} \begin{bmatrix} \tilde{c}_x(\mathbf{q}) \\ \tilde{c}_y(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & E_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ E_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & E_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{bmatrix} dL_q = \int_{(L)} \begin{bmatrix} f_x(\mathbf{q}) \\ f_y(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{bmatrix} dL_q, \quad (3)$$

$\mathbf{p} \in (L); \mathbf{q} \in (L)$

Składowe jąder całkowych $K_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ i funkcji $E_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ w równaniach (3) są odpowiednio równe:

$$K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \ln \left(\frac{1}{r_{pq}} \right) + \frac{(x_q - x_p)^2}{(r_{pq})^2}, \quad (3.1^1)$$

$$K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \ln \left(\frac{1}{r_{pq}} \right) + \frac{(y_p - y_q)^2}{(r_{pq})^2}, \quad (3.1^2)$$

$$K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{(x_p - x_q)(y_p - y_q)}{(r_{pq})^2} \quad (3.1^{3,4})$$

oraz:

$$E_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_{xxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + E_{xxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \quad (3.1^5)$$

$$E_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_{xyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + E_{xyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \quad (3.1^6)$$

$$E_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_{yxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + E_{yxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \quad (3.1^7)$$

$$E_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_{yyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + E_{yyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \quad (3.1^8)$$

gdzie:

$$E_{xxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2\nabla_{xq} K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - P_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{4(x_p - x_q)^3}{(r_{pq})^4}, \quad (3.2^1)$$

$$E_{yyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2\nabla_{yq} K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - P_y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{4(y_p - y_q)^3}{(r_{pq})^4}, \quad (3.2^2)$$

$$E_{xyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2\nabla_{xq} K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - P_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{4(y_p - y_q)(x_p - x_q)^2}{(r_{pq})^4}, \quad (3.2^3)$$

$$E_{yxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2\nabla_{yq} K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - P_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{4(x_p - x_q)(y_p - y_q)^2}{(r_{pq})^4}, \quad (3.2^4)$$

$$E_{xxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \nabla_{yq} K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \nabla_{xq} K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{4(y_p - y_q)(x_p - x_q)^2}{(r_{pq})^4}, \quad (3.2^5)$$

$$E_{xyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \nabla_{yq} K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \nabla_{xq} K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{4(x_p - x_q)(y_p - y_q)^2}{(r_{pq})^4}, \quad (3.2^6)$$

$$E_{yyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \nabla_{xq} K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \nabla_{yq} K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{4(x_p - x_q)(y_p - y_q)^2}{(r_{pq})^4}, \quad (3.2^7)$$

$$E_{yxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \nabla_{xq} K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \nabla_{yq} K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{4(y_p - y_q)(x_p - x_q)^2}{(r_{pq})^4}, \quad (3.2^8)$$

$$P_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -2 \frac{(x_p - x_q)}{(r_{pq})^2}, \quad (3.3^1)$$

$$P_y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -2 \frac{(y_p - y_q)}{(r_{pq})^2}. \quad (3.3^2)$$

Po dyskretnym wyznaczeniu wartości naprężeń w płynie $f_x(\mathbf{q}), f_y(\mathbf{q})$ w rezultacie rozwiązania równań (2) pole prędkości w obszarze (Λ) wyznacza się z zależności:

$$c_x(\mathbf{p}) = -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{(L)} [f_x(\mathbf{q})K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q})K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_q + \frac{1}{4\pi} \int_{(L)} [\tilde{c}_x(\mathbf{q})E_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \tilde{c}_y(\mathbf{q})E_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_q, \quad (4a)$$

$\mathbf{p} \in (\Lambda); \mathbf{q} \in (L)$

$$c_y(\mathbf{p}) = -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{(L)} [f_x(\mathbf{q})K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q})K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_q + \frac{1}{4\pi} \int_{(L)} [\tilde{c}_x(\mathbf{q})E_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \tilde{c}_y(\mathbf{q})E_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_q, \quad (4b)$$

$\mathbf{p} \in (\Lambda); \mathbf{q} \in (L)$

Rozkład ciśnienia w obszarze (Λ) wyznacza się w dyskretnej formie z równania (Brebbia i inni 1984, Pozrykidis, 1991):

$$p(\mathbf{p}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{(L)} \left[f_x(\mathbf{q})M_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q})M_y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q + \frac{\mu}{4\pi} \int_{(L)} \left[\tilde{c}_x(\mathbf{q})N_x^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \tilde{c}_y(\mathbf{q})N_y^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q, \quad \mathbf{p} \in (\Lambda); \mathbf{q} \in (L) \quad (5)$$

Funkcje podcałkowe (jądra całkowe) $M_x(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $M_y(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ i $N_x^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $N_y^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ są odpowiednio równe:

$$M_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{2(x_p - x_q)}{(r_{pq})^2}, \quad (5.1^1)$$

$$M_y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{2(y_p - y_q)}{(r_{pq})^2}, \quad (5.1^2)$$

oraz:

$$N_x^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = N_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + N_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \quad (5.1^3)$$

$$N_y^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = N_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + N_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \quad (5.1^4)$$

gdzie:

$$N_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{4}{(r_{pq})^2} + \frac{8(x_q - x_p)^2}{(r_{pq})^4}, \quad (5.2^1)$$

$$N_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{4}{(r_{pq})^2} + \frac{8(y_q - y_p)^2}{(r_{pq})^4}, \quad (5.2^2)$$

$$N_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = N_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{8(x_q - x_p)(y_q - y_p)}{(r_{pq})^4}, \quad (5.2^{3,4})$$

Ważną charakterystyką pola przepływu cieczy lepkiej jest wirowość pola prędkości opisana w przypadku dwuwymiarowego przepływu cieczy związkem:

$$\omega_z(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial c_y(\mathbf{p})}{\partial x} - \frac{\partial c_x(\mathbf{p})}{\partial y} \right], \quad (\mathbf{p}) \in \Lambda \quad (6)$$

Wyznaczenie rozkładu wirowości z równania całkowego wywiedzionego z przekształconych równań Naviera-Stokesa jest uciążliwe z uwagi na postać tych równań i złożone relacje pomiędzy prędkością i wirowością w tych równaniach (Souli, 1996,).

Alternatywnym sposobem wyznaczenia wirowości proponowanym i przeanalizowanym na niżej prezentowanych przykładach obliczeniowych w niniejszej pracy jest sposób polegający na bezpośrednim wykorzystaniu zależności (6) i wprowadzeniu do niej związków całkowych będących rezultatem różniczkowania równań (4a) i (4b) odpowiednio względem argumentów (x) i (y) w wyniku czego otrzymuje się prostsze strukturalnie równanie opisujące pole wirowości rozpatrywanego przepływu.

Różniczkując równanie (4a) względem argumentu (y) i równanie (4b) względem argumentu (x) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \nabla_{yp} c_x(\mathbf{p}) = & -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{(L)} \left[f_x(\mathbf{q})\nabla_{yp} K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q})\nabla_{yp} K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{(L)} \left[\tilde{c}_x(\mathbf{q})\nabla_{yp} E_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \tilde{c}_y(\mathbf{q})\nabla_{yp} E_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q, \quad \mathbf{p} \in (L); \mathbf{q} \in (L) \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{xp} c_y(\mathbf{p}) = & -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{(L)} \left[f_x(\mathbf{q})\nabla_{xp} K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q})\nabla_{xp} K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{(L)} \left[\tilde{c}_x(\mathbf{q})\nabla_{xp} E_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \tilde{c}_y(\mathbf{q})\nabla_{xp} E_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q, \quad \mathbf{p} \in (L); \mathbf{q} \in (L) \end{aligned} \quad (7b)$$

Wprowadzając związki całkowe (7a) i (7b) do równania (6) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \omega_z(\mathbf{p}) = & \frac{1}{8\pi} \left[-\frac{1}{\mu} \int_{(L)} f_x(\mathbf{q}) \left[\nabla_{yp} K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \nabla_{xp} K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q + \right. \\ & + \int_{(L)} \tilde{c}_x(\mathbf{q}) \left[\nabla_{yp} E_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \nabla_{xp} E_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q + \\ & + \frac{1}{\mu} \int_{(L)} f_y(\mathbf{q}) \left[\nabla_{yp} K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \nabla_{xp} K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q + \\ & \left. + \int_{(L)} \tilde{c}_y(\mathbf{q}) \left[\nabla_{yp} E_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \nabla_{xp} E_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q \right], \quad \mathbf{p} \in (L); \mathbf{q} \in (L) \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$$\nabla_{yp} K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{(y_p - y_q)^3 + 3(x_p - x_q)^2(y_p - y_q)}{(r_{pq})^4}, \quad (8.1^1)$$

$$\nabla_{xp} K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{-(y_p - y_q)^3 + 3(x_p - x_q)^2(y_p - y_q)}{(r_{pq})^4}, \quad (8.1^2)$$

$$\nabla_{yp} K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{-(x_p - x_q)^3 + 3(x_p - x_q)(y_p - y_q)^2}{(r_{pq})^4}, \quad (8.1^3)$$

$$\nabla_{xp} K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{(x_p - x_q)^3 + 3(x_p - x_q)(y_p - y_q)^2}{(r_{pq})^4} \quad (8.1^4)$$

oraz:

$$\nabla_{yp} E_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \nabla_{yp} E_{xxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + \nabla_{yp} E_{xxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \quad (8.1^5)$$

$$\nabla_{xp} E_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \nabla_{xp} E_{xyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + \nabla_{xp} E_{xyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \quad (8.1^6)$$

$$\nabla_{yp} E_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \nabla_{yp} E_{yxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + \nabla_{yp} E_{yyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \quad (8.1^7)$$

$$\nabla_{xp} E_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \nabla_{xp} E_{yyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + \nabla_{xp} E_{yyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \quad (8.1^8)$$

gdzie:

$$\nabla_{yp} E_{xxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{16(x_p - x_q)^3(y_p - y_q)}{(r_{pq})^6}, \quad (8.2^1)$$

$$\nabla_{xp} E_{yyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{16(x_p - x_q)(y_p - y_q)^3}{(r_{pq})^6}, \quad (8.2^2)$$

$$\nabla_{xp} E_{xyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{4\left(2(x_p - x_q)^3(y_p - y_q) - 2(x_p - x_q)(y_p - y_q)^3\right)}{(r_{pq})^6}, \quad (8.2^3)$$

$$\nabla_{yp} E_{xyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{4\left(2(x_p - x_q)(y_p - y_q)^3 - 2(x_p - x_q)^3(y_p - y_q)\right)}{(r_{pq})^6}, \quad (8.2^4)$$

$$\nabla_{xp} E_{xyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{4\left(3(x_p - x_q)^2(y_p - y_q)^2 - (y_p - y_q)^4\right)}{(r_{pq})^6}, \quad (8.2^5)$$

$$\nabla_{yp} E_{yxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{4\left(3(x_p - x_q)^2(y_p - y_q)^2 - (x_p - x_q)^4\right)}{(r_{pq})^6} \quad (8.2^6)$$

$$\nabla_{xp} E_{yyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{4\left(3(x_p - x_q)^2(y_p - y_q)^2 - (y_p - y_q)^4\right)}{(r_{pq})^6}, \quad (8.2^7)$$

$$\nabla_{yp} E_{xxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{4\left(3(x_p - x_q)^2(y_p - y_q)^2 - (x_p - x_q)^4\right)}{(r_{pq})^6}, \quad (8.2^8)$$

W podobny sposób wyznacza się funkcję $\Psi(x,y)$ po uprzednim wyznaczeniu $f_x(\mathbf{q})$ i $f_y(\mathbf{q})$ (z dokładnością do addytywnej stałej) ze związku całkowego wynikającego bezpośrednio z definicji funkcji prądu w przepływie dwuwymiarowym (Batchelor, 1967):

$$\Psi(\mathbf{p}) = -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{(L)} \left[f_x(\mathbf{q}) S_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q}) S_y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q + \frac{1}{4\pi} \int_{(L)} \left[\tilde{c}_x(\mathbf{q}) W_x^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \tilde{c}_y(\mathbf{q}) W_y^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q, \quad \mathbf{p} \in (L); \mathbf{q} \in (L) \quad (9)$$

gdzie:

$$S_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = +\frac{1}{2}(y_p - y_q) \ln \left(\frac{1}{(r_{pq})^2} \right) - (y_p - y_q), \quad (9.1^1)$$

$$S_y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2}(x_p - x_q) \ln \left(\frac{1}{(r_{pq})^2} \right) + (x_p - x_q), \quad (9.1^2)$$

oraz:

$$W_x^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = W_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + W_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \quad (9.1^3)$$

$$W_y^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = W_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + W_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \quad (9.1^4)$$

gdzie:

$$W_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -2 \arctg \left(\frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} \right) - 2 \frac{(x_p - x_q)(y_p - y_q)}{(r_{pq})^2}, \quad (9.2^1)$$

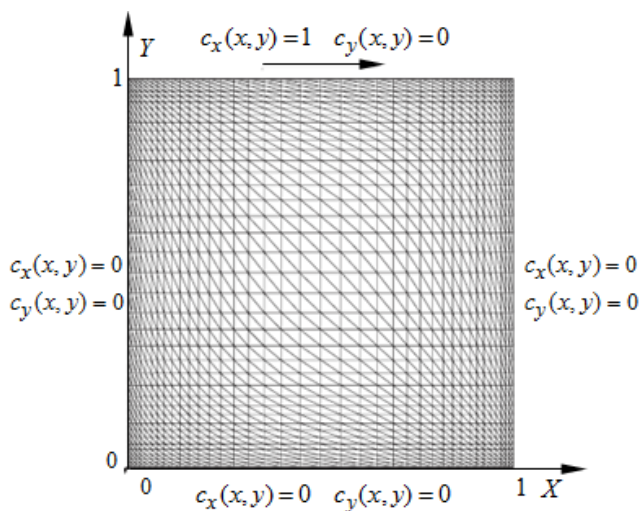
$$W_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -2 \arctg \left(\frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} \right) + 2 \frac{(x_p - x_q)(y_p - y_q)}{(r_{pq})^2}, \quad (9.2^2)$$

$$W_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = W_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \frac{(x_p - x_q)^2 - (y_p - y_q)^2}{(r_{pq})^2}. \quad (9.2^{3,4})$$

2.2. Porównanie rozwiązań przepływu cieczy lepkiej metodą brzegowych równań całkowych z rozwiązaniami przy użyciu metod siatkowych

W celu wykazania dokładności metody brzegowych równań całkowych dokonano porównania rezultatów rozwiązania zagadnienia przepływu w kwadratowym zagłębieniu z jedną poruszającą się ścianką (Rys. 1) metodą brzegowych równań całkowych z wynikami obliczeń metodą elementów skończonych.

Zagadnienie to jest szeroko prezentowane w literaturze i piśmiennictwie poświęconym dyskretnym metodom wyznaczania przepływów Stokesa i jest ogólnie przyjętym sformułowaniem zadania testowego dla tych metod (Zienkiewicz i Taylor, 2000; Erturk i inni, 2005).



Rys. 1. Testowa siatka podziału obszaru (Zienkiewicz i Taylor, 2000)
 Warunki brzegowe dla zagłębienia z poruszającą się ścianką

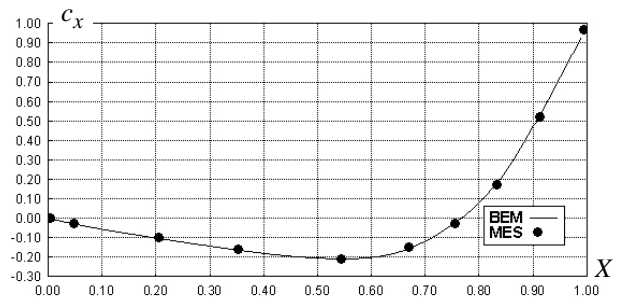
W sformułowaniu zadania obliczeniowego zakłada się że, ścianka $y=1$ porusza się ze stałą prędkością $c_x(x,y) = 1$ równoległe do osi $\{X\}$, a warunki brzegowe na pozostałych granicach obszaru wyrażają nieprzenikalność brzegu i brak poślizgu na ściankach

Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono porównanie przebiegów składowych prędkości c_x i c_y w przekroju $x=0.5$ wyznaczonymi przy użyciu metody elementów brzegowych z rozkładami tych wielkości otrzymanymi metodą elementów skończonych przy użyciu programu komputerowego opublikowanego w pracy Zienkiewicza i Taylora (2000)

Dla analizowanego przekroju wartości składowych prędkości c_x i c_y błąd rozwiązania porównywanymi metodami: metodą elementów brzegowych i i metodą elementów skończonych zestawiono w tabelach 1 i 2.

Względne błędy obliczeń poszczególnych wielkości do przedstawionych niżej zestawień tabelarycznych wyznaczono według formuły:

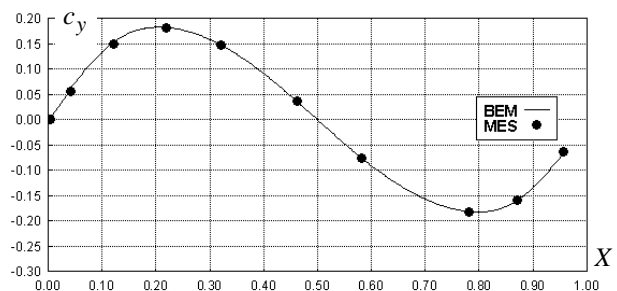
$$\Delta f_{MEB} = \left| \frac{f_{MES} - f_{MEB}}{f_{MES}} \right| * 100\% \quad (10)$$



Rys. 2. Porównanie przebiegu składowej prędkości c_x ($x=0.5$) wyznaczonej MEB z rozwiązaniem MES (Zienkiewicz i Taylor, 2000)

Tab. 1. Przepływ cieczy lepkiej w zagłębieniu kwadratowym składowa prędkości c_x - błąd rozwiązania MEB.

Współrzędne węzłów		Roz. num. MES	Roz. num. MEB	Błąd met. MEB
400 elementów				
X_M	Y_M	$C_{X_{MES}}$ [m/s]	$C_{X_{MEB}}$ [m/s]	$\Delta C_{X_{MEB}}$ [%]
5,0E-01	4,9E-02	-3,000E-02	-2,979E-02	6,927E-01
5,0E-01	2,0E-01	-1,010E-01	-1,000E-01	9,747E-01
5,0E-01	3,5E-01	-1,630E-01	-1,627E-01	1,547E-01
5,0E-01	5,4E-01	-2,080E-01	-2,069E-01	5,236E-01
5,0E-01	6,7E-01	-1,560E-01	-1,559E-01	6,404E-02
5,0E-01	7,5E-01	-3,300E-02	-3,279E-02	6,361E-01
5,0E-01	8,3E-01	1,690E-01	1,684E-01	3,544E-01
5,0E-01	9,1E-01	5,280E-01	5,247E-01	6,292E-01
5,0E-01	9,9E-01	9,140E-01	9,125E-01	1,692E-01
800 elementów				
5,0E-01	4,9E-02	-3,000E-02	-2,992E-02	2,767E-01
5,0E-01	2,0E-01	-1,010E-01	-1,014E-01	3,901E-01
5,0E-01	3,5E-01	-1,630E-01	-1,631E-01	6,196E-02
5,0E-01	5,4E-01	-2,080E-01	-2,075E-01	2,212E-01
5,0E-01	6,7E-01	-1,560E-01	-1,560E-01	1,923E-02
5,0E-01	7,5E-01	-3,300E-02	-3,308E-02	2,455E-01
5,0E-01	8,3E-01	1,690E-01	1,693E-01	2,012E-01
5,0E-01	9,1E-01	5,280E-01	5,293E-01	2,519E-01
5,0E-01	9,9E-01	9,140E-01	9,134E-01	6,783E-02



Rys. 3. Porównanie przebiegu składowej prędkości c_y ($y=0.5$) wyznaczonej MEB z rozwiązaniem MES (Zienkiewicz i Taylor, 2000)

Tab. 2. Przepływ cieczy lepkiej w zagłębieniu kwadratowym
składowa prędkości c_y – błąd rozwiązania MEB

Współrzędne węzłów		Roz. num. MES	Roz. num. MEB	Błąd met. MEB
		400 elementów		
X_M	Y_M	C_{yMES} [m/s]	C_{yMEB} [m/s]	ΔC_{yMEB} [%]
-	-			
3,8E-02	5,0E-01	5,800E-02	5,765E-02	6,075E-01
1,2E-01	5,0E-01	1,520E-01	1,506E-01	9,305E-01
2,2E-01	5,0E-01	1,820E-01	1,816E-01	2,234E-01
3,2E-01	5,0E-01	1,480E-01	1,477E-01	1,704E-01
4,6E-01	5,0E-01	3,800E-02	3,785E-02	4,008E-01
5,8E-01	5,0E-01	-7,400E-02	-7,359E-02	5,593E-01
7,8E-01	5,0E-01	-1,810E-01	-1,797E-01	7,051E-01
8,7E-01	5,0E-01	-1,590E-01	-1,588E-01	1,340E-01
9,6E-01	5,0E-01	-6,300E-02	-6,295E-02	7,302E-02
		800 elementów		
3,8E-02	5,0E-01	5,8000E-02	5,8167E-02	2,8793E-01
1,2E-01	5,0E-01	1,5200E-01	1,5264E-01	4,2105E-01
2,2E-01	5,0E-01	1,8200E-01	1,8218E-01	1,0110E-01
3,2E-01	5,0E-01	1,4800E-01	1,4812E-01	8,1081E-02
4,6E-01	5,0E-01	3,8000E-02	3,7924E-02	2,0000E-01
5,8E-01	5,0E-01	-7,4000E-02	-7,3803E-02	2,6622E-01
7,8E-01	5,0E-01	-1,8100E-01	-1,8160E-01	3,3260E-01
8,7E-01	5,0E-01	-1,6100E-01	-1,5890E-01	6,2893E-02
9,6E-01	5,0E-01	-6,3000E-02	-6,2977E-02	3,6508E-02

Do obliczeń metodą elementów skończonych przyjęto siatkę składającą się z 2888 węzłów, natomiast w przypadku metody elementów brzegowych założono 400 punktów kolokacji na brzegu, a w drugim wariancie 800 punktów.

Wyznaczony błąd metody MEB składowych prędkości dla brzegu składającego się z $N=400$ elementów nie przekracza 1%, natomiast dla brzegu łożonego z $N=800$ elementów błąd nie przekracza 0,5%. Wraz ze wzrostem zagęszczenia linii brzegowej, błąd metody brzegowych równań całkowych maleje.

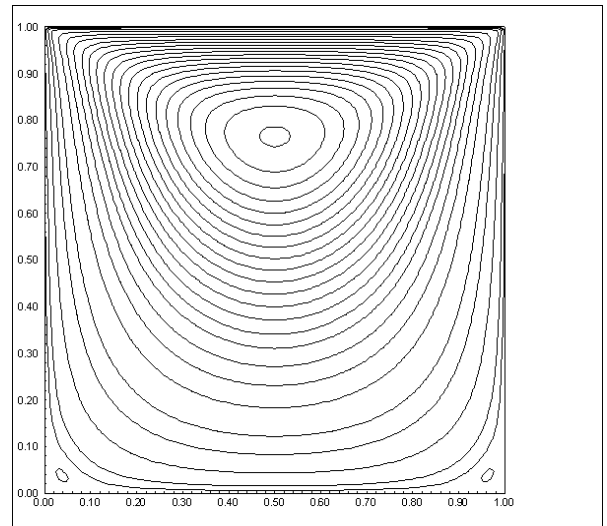
Niewielkie różnice pomiędzy rezultatami metodą elementów skończonych, uznawanymi w tym zagadnieniu testowym za wartości referencyjne i wynikami obliczeń metodą elementów brzegowych wskazują, że algorytmy obliczeniowe proponowanego sformułowania metody elementów brzegowych charakteryzują się dużą dokładnością.

Graficzne rezultaty obliczeń zagadnienia testowego przepływu w kwadratowym zagłębieniu metodą elementów brzegowych przedstawiono na rysunkach 4.a. – 4.f.

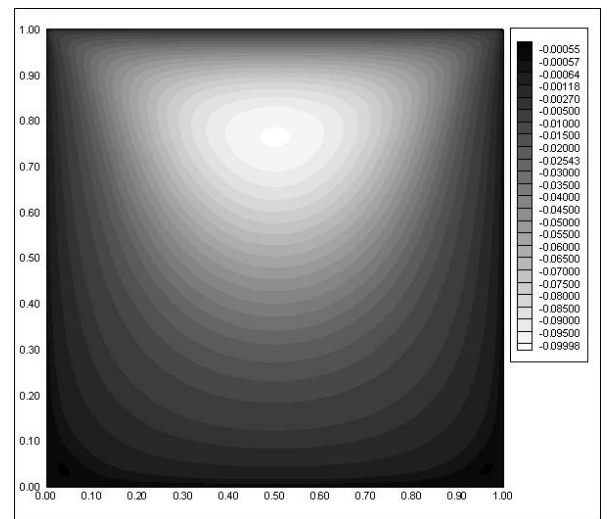
Na rysunku 4a. przedstawiono wykresy linii prądu dwuwymiarowego przepływu Stokes’a w kwadratowym zagłębieniu, a na rysunku 4a*. wykres warstwiczny funkcji prądu $\Psi(x,y)$. Na wykresie 4b. zaprezentowano rozkład wirowości $\omega(x,y)$ w ruchu cieczy w zagłębieniu powodowanym jednorodnym przepływem cieczy nad zagłębieniem.

Na rysunkach 4c., 4d. i 4e. przedstawiono odpowiednio:

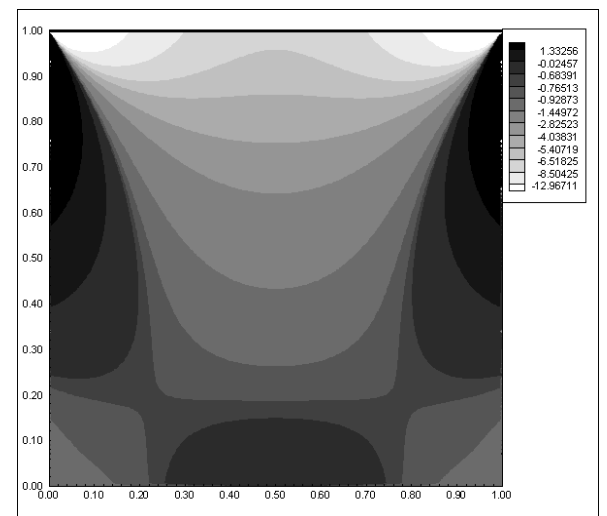
- składową prędkości $c_x(x,y)$ przepływu w zagłębieniu;
- składową prędkości $c_y(x,y)$ przepływu w zagłębieniu;
- prędkość $c(x,y)$, a na rysunku 4f. rozkład ciśnienia.



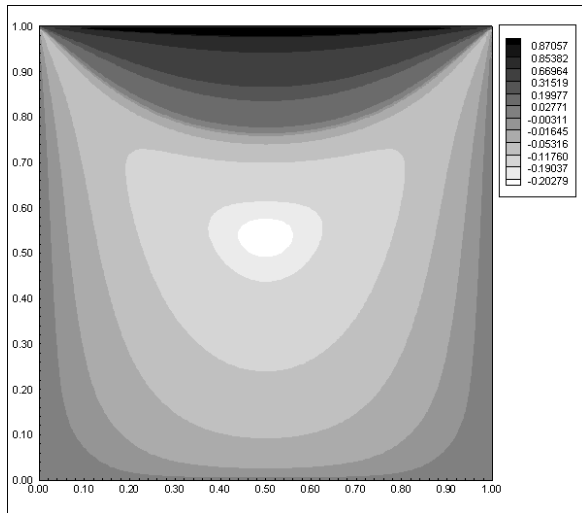
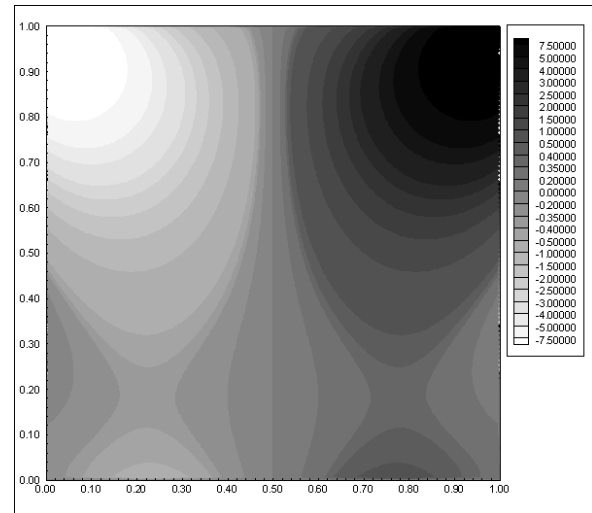
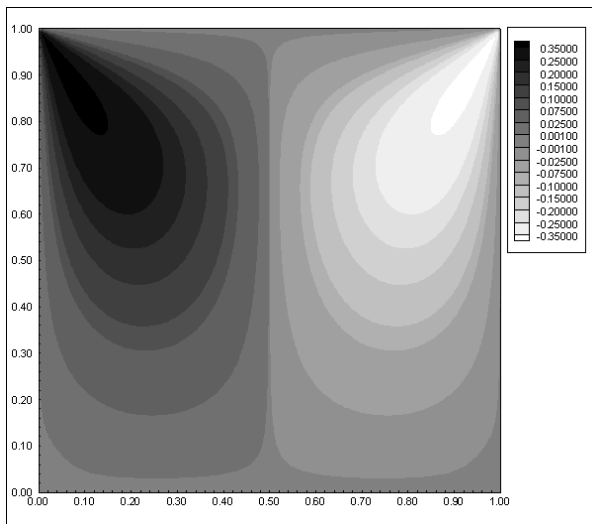
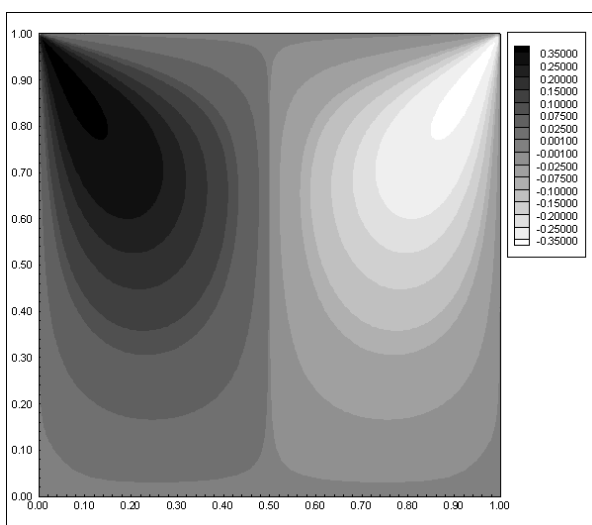
Rys. 4.a*. Kwadratowe zagłębienie – funkcja prądu $\Psi(x,y)$
Wykres linii prądu



Rys. 4.a. Kwadratowe zagłębienie – funkcja prądu $\Psi(x,y)$
Wykres warstwiczny linii prądu



Rys. 4.b. Kwadratowe zagłębienie – wirowość $\omega(x,y)$

Rys. 4.c. Kwadratowe zagłębienie – składowa prędkości $c_x(x,y)$ Rys. 4.f. Kwadratowe zagłębienie – ciśnienie $p(x,y)$ Rys. 4.d. Kwadratowe zagłębienie – składowa prędkości $c_y(x,y)$ Rys. 4.e. Kwadratowe zagłębienie – prędkość $c(x,y)$

W celu porównania rezultatów rozwiązań zagadnień obliczeniowych przy użyciu metody elementów brzegowych z eksperymentem, dokonano zestawień przebiegu linii prądu (potencjału prądu) przepływów płaskich w kanałach o różnej geometrii ścianek i obiektów na drodze przepływu wyznaczonych z obliczeń z wynikami doświadczalnej wizualizacji przepływów (Taneda, 1979).

Obliczenia wykonano dla geometrii brzegu, w którym wymiary zostały przyjęte zgodnie z wymiarami obszaru przepływu na stanowisku laboratoryjnym (Taneda, 1979).

Poniżej przedstawiono graficzne porównania obrazów przepływów zrealizowanych doświadczalnie z rezultatami obliczeń numerycznych metodą brzegowych równań całkowych:

Na rysunkach 5.1.a. i 5.1.b. porównano obraz linii prądu przepływu nad prostą cienką przeszkodą z wykresem funkcji prądu, natomiast na rysunkach 5.2.a. i 5.2.b. obraz linii prądu przepływu wokół cienkiej przeszkody nachylonej pod kątem 105° do kierunku przepływu.

Na rysunkach 6.a. i 6.b. przedstawiono przebieg linii prądu przepływu nad kwadratową przeszkodą oraz wykres funkcji prądu dla tego przypadku.

Na rysunkach 7.1.a.b. – 7.4.a.b. przedstawiono obrazy linii prądu przepływu nad prostokątnym uskokiem przy różnym stosunku szerokości uskoku b do wysokości h uskoku, uzyskane eksperymentalnie, porównując je z przebiegiem funkcji prądu.

Rysunki 7.1.a. i 7.1.b. przedstawiają linie prądu przepływu nad uskokiem i przebieg funkcji prądu dla $b/h = 0.5$

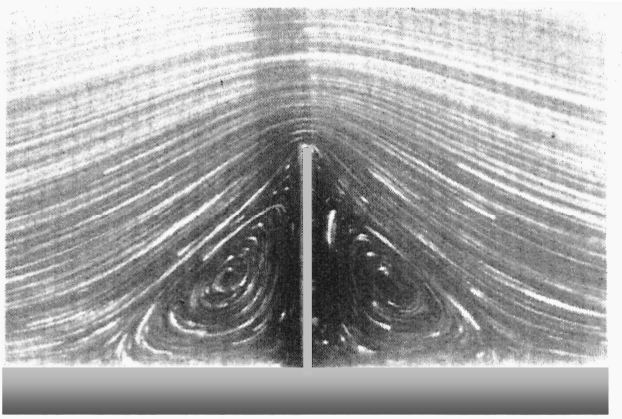
Rysunki 7.2.a. i 7.2.b. przedstawiają linie prądu przepływu nad uskokiem i przebieg funkcji prądu dla $b/h = 0.1$

Rysunki 7.3.a. i 7.3.b. przedstawiają linie prądu przepływu nad uskokiem i przebieg funkcji prądu dla $b/h = 0.2$

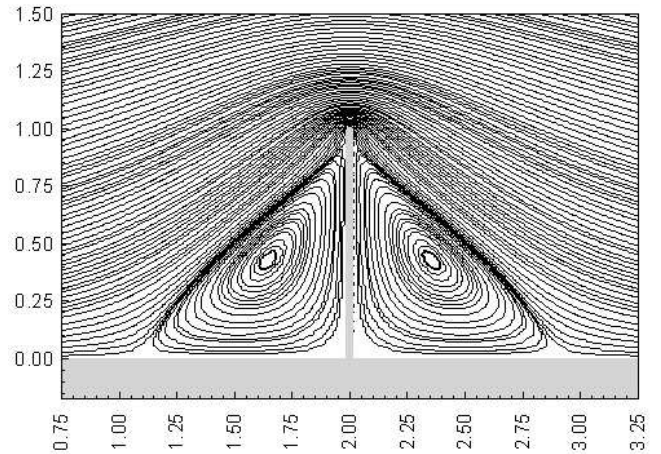
Rysunki 7.4.a. i 7.4.b. przedstawiają linie prądu przepływu nad uskokiem i przebieg funkcji prądu dla $b/h = 0.3$

Na rysunkach 8.a. i 8.b. przedstawiono linie prądu i przebieg funkcji prądu przepływu w trójkątnym uskoku.

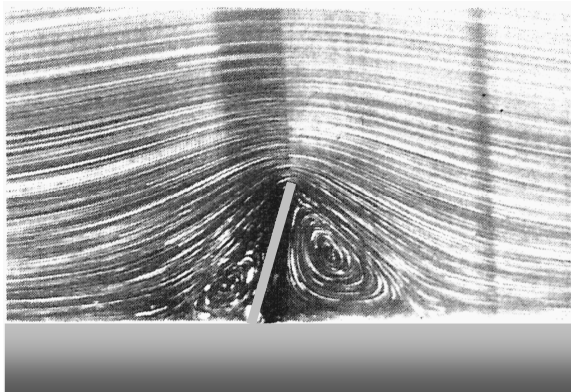
Rysunek 9.a. przedstawia linie prądu przepływu nad cylindryczną przeszkodą otrzymane drogą eksperymentu, natomiast na rysunku 9.b. wykreślono przebieg funkcji prądu wyznaczony metodą brzegowych równań całkowych.



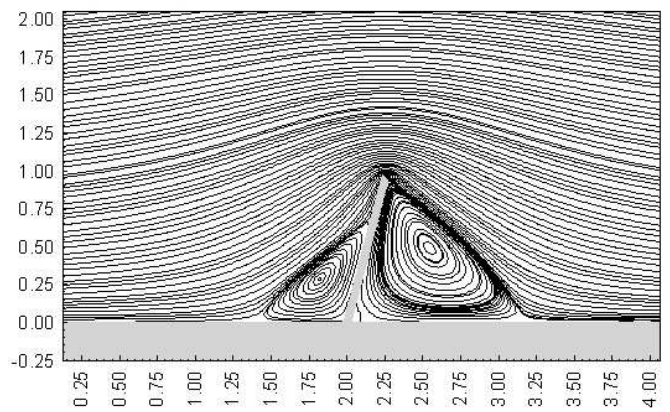
Rys. 5.1.a. Linie prądu przepływu nad prostopadłą przeszkodą.
Fotografia eksperymentu $Re=1.40E-02$ (Taneda, 1979).



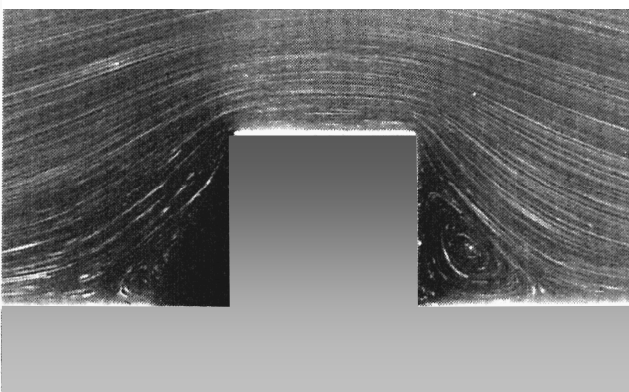
Rys. 5.1.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad prostopadłą przeszkodą – rozwiązanie numeryczne MEB.



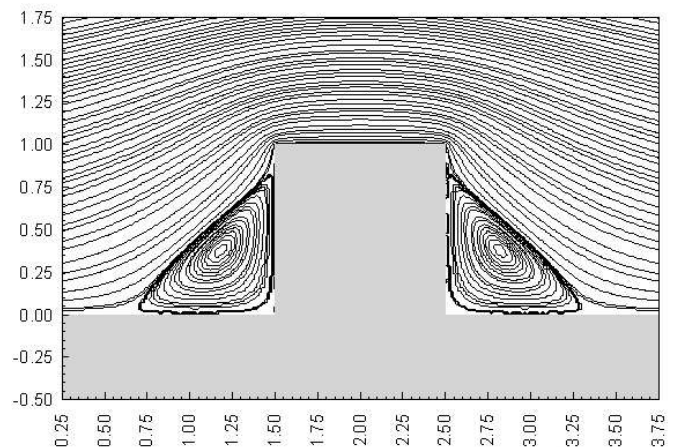
Rys. 5.2.a. Linie prądu przepływu nad przeszkodą ustawioną pod kątem 105° w stosunku do podstawy.
Fotografia eksperymentu $Re=1.4E-02$ (Taneda, 1979).



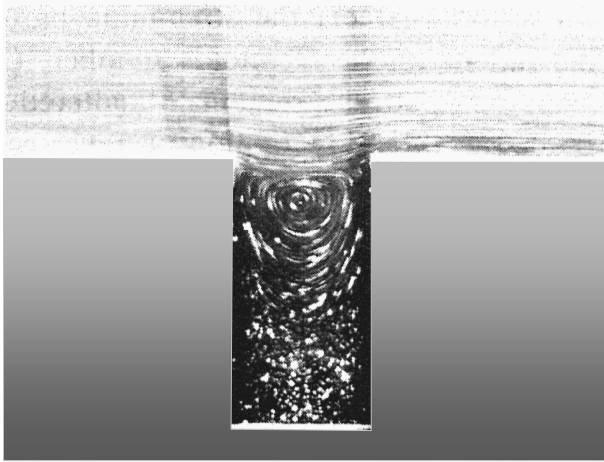
Rys. 5.2.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad przeszkodą ustawioną pod kątem 105° w stosunku do podstawy.
Rozwiązanie numeryczne MEB.



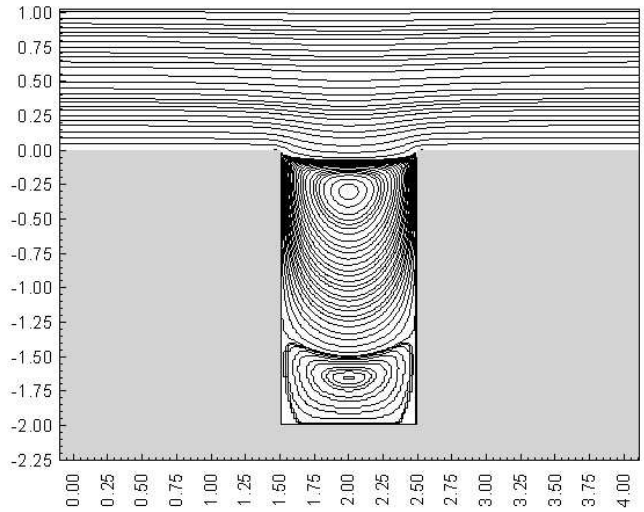
Rys. 6.a. Linie prądu przepływu nad kwadratową przeszkodą .
Fotografia eksperymentu $Re=2.0E-02$ (Taneda, 1979).



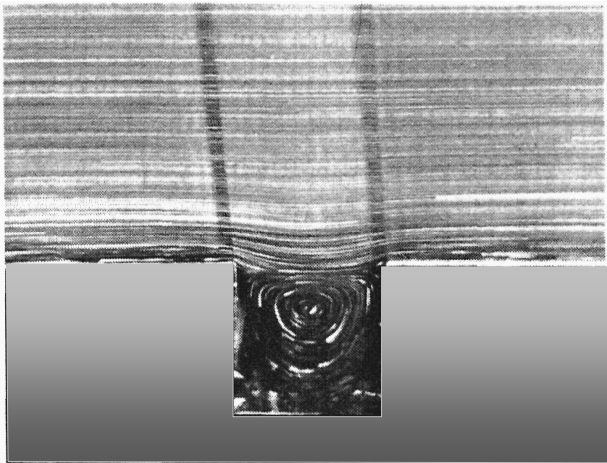
Rys. 6.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad przeszkodą kwadratową . Rozwiązanie numeryczne MEB.



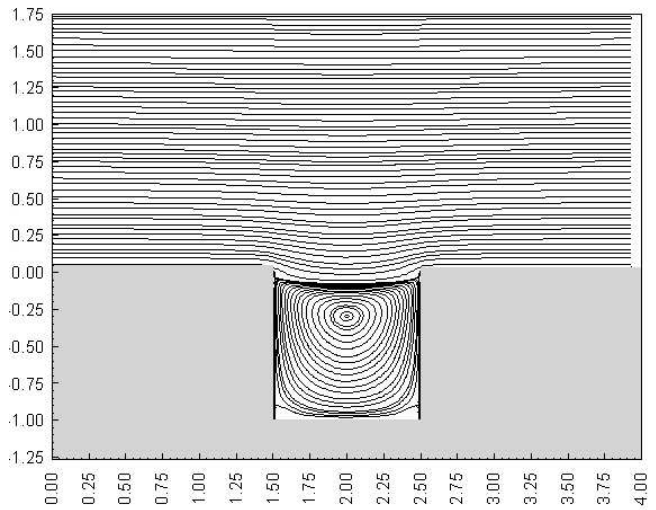
Rys. 7.1.a. Linie prądu przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 0.5$ – Fotografia eksperymentu $Re=1.0E-02$ (Taneda, 1979).



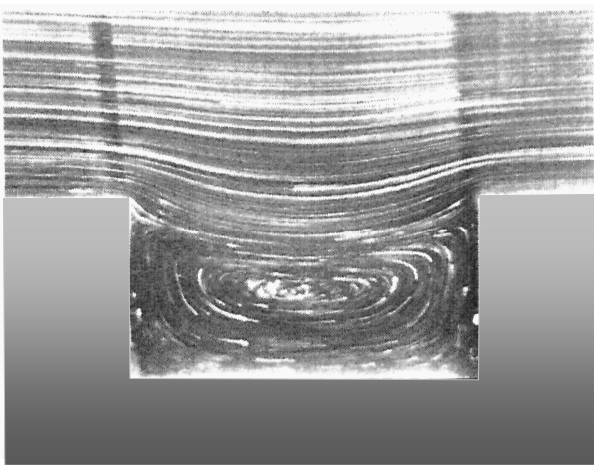
Rys. 7.1.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 0.5$ Rozwiązanie numeryczne MEB.



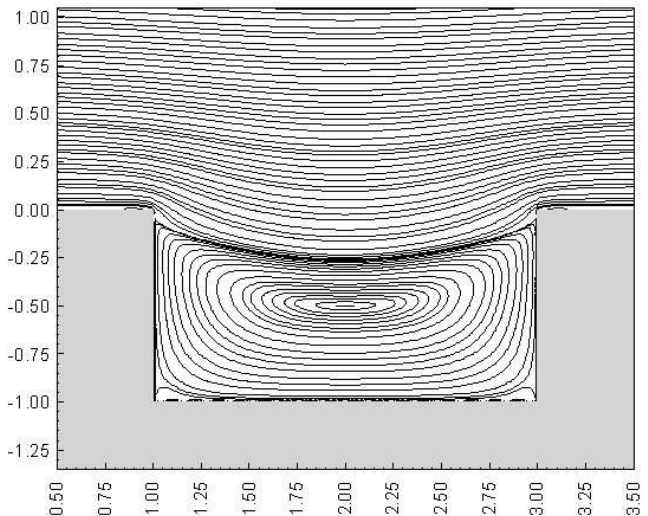
Rys. 7.2.a. Linie prądu przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 1.0$ Fotografia eksperymentu $Re=1.0E-02$ (Taneda, 1979).



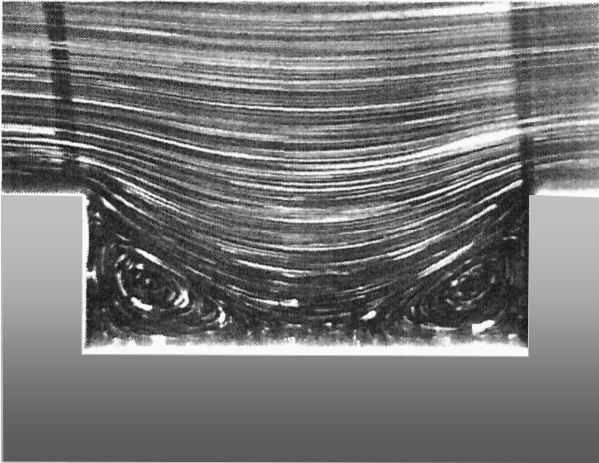
Rys. 7.2.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 1.0$ Rozwiązanie numeryczne MEB.



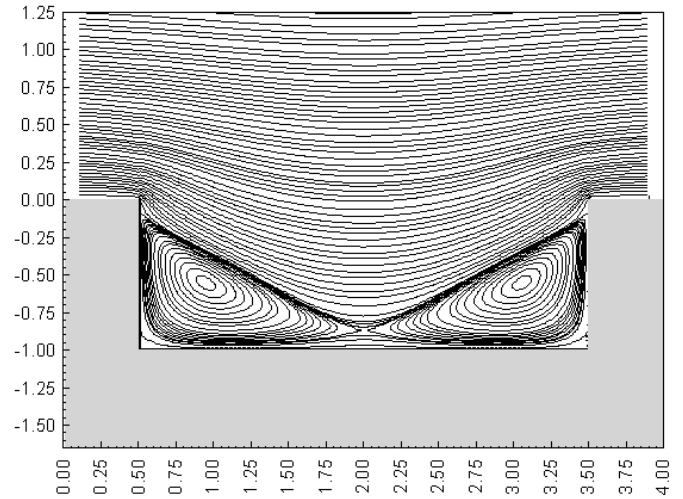
Rys. 7.3.a. Funkcja prądu przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 2.0$ Fotografia eksperymentu $Re= 1.0E-02$ (Taneda, 1979).



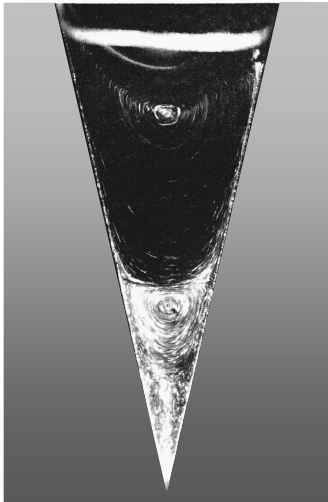
Rys. 7.3.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 2.0$ Rozwiązanie numeryczne MEB.



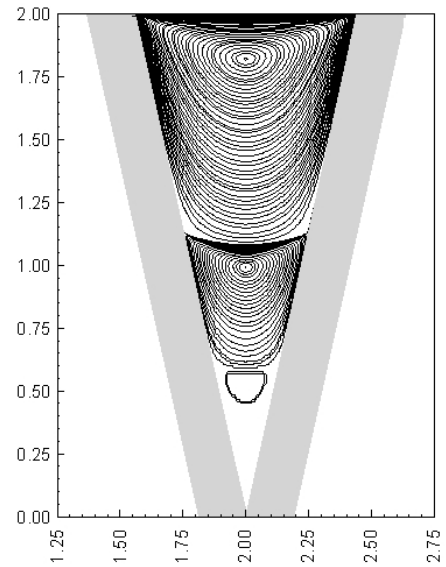
Rys. 7.4.a. Linie prądu przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 3.0$
Fotografia eksperymentu $Re=1.0E-02$ (Taneda, 1979).



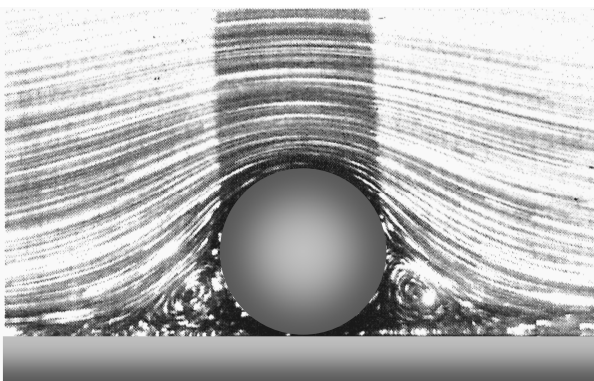
Rys. 7.4.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 3.0$
Rozwiązanie numeryczne MEB.



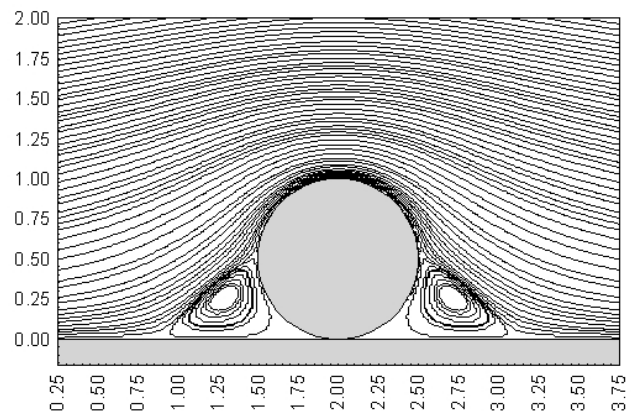
Rys. 8.a. Linie prądu przepływu w trójkątnym uskoku
Fotografia eksperymentu $Re=1.7E-01$ (Taneda, 1979).



Rys. 8.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu w trójkątnym uskoku
Rozwiązanie numeryczne MEB.



Rys. 9.a. Linie prądu przepływu Stokesa nad walcem
Fotografia eksperymentu $Re= 1.1E-02$ (Taneda, 1979).

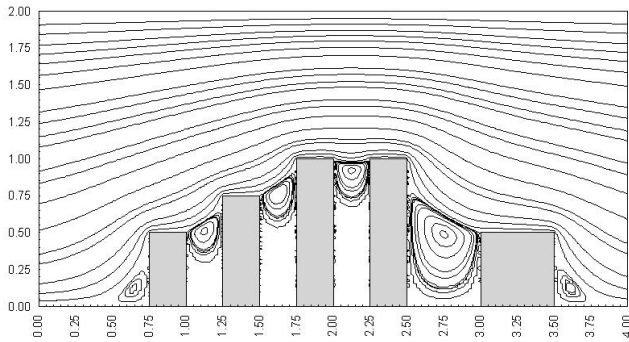


Rys. 9.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad walcem
Rozwiązanie numeryczne MEB.

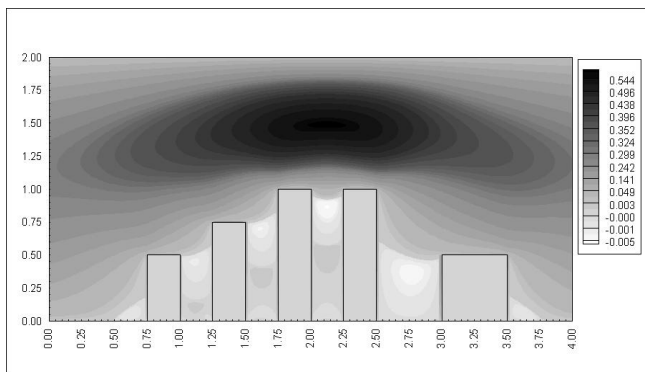
Niżej przedstawiono graficzne rezultaty obliczeń przepływu nad ścianką ożebrowaną.

Na rysunkach 10.a - 10.f wykreślono charakterystyki płaskiego przepływu cieczy lepkiej w kanale nad ścianką ożebrowaną:

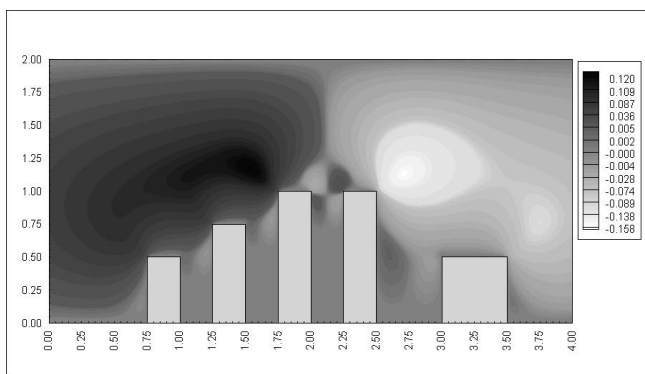
- linie prądu Ψ (Rys.10.a);
- składową prędkości c_x (Rys.10.b);
- składową prędkości c_y (Rys.10.c);
- prędkość wypadkową c (Rys. 10.d);
- rozkład wirowości ω (Rys. 10.e);
- oraz pole ciśnienia p (Rys. 10.f).



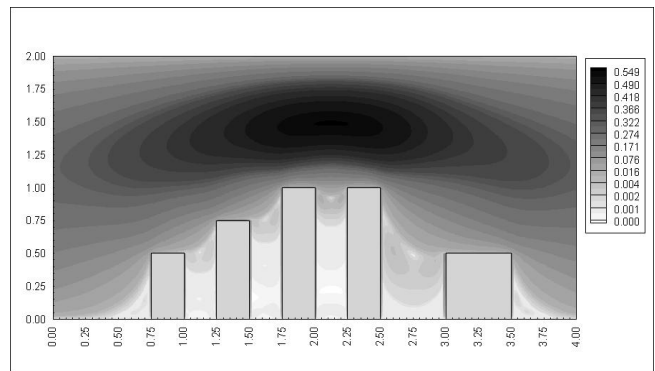
Rys. 10.a. Funkcja prądu $\Psi(x,y)$ przepływu cieczy lepkiej w kanale nad ścianką ożebrowaną.



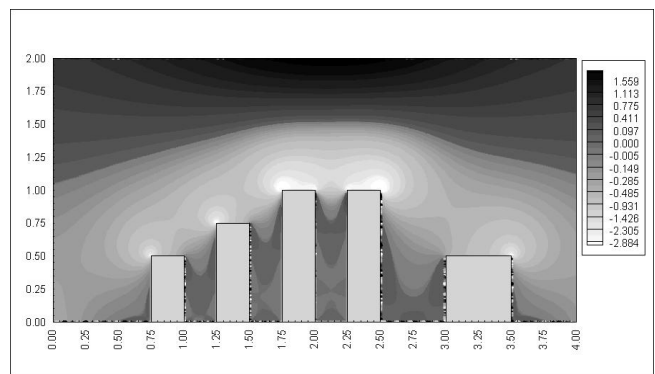
Rys. 10.b. Składowa prędkości $c_x(x,y)$ przepływu cieczy lepkiej w kanale nad ścianką ożebrowaną



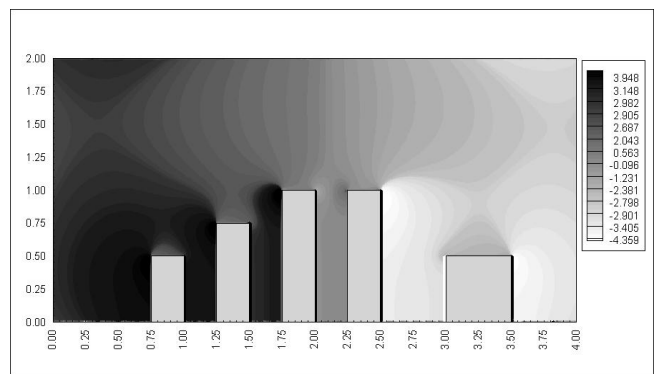
Rys. 10.c. Składowa prędkości $c_y(x,y)$ przepływu cieczy lepkiej w kanale nad ścianką ożebrowaną



Rys. 10.d. Pole prędkości $c(x,y)$ przepływu cieczy lepkiej w kanale nad ścianką ożebrowaną



Rys. 10.e. Rozkład wirowości $\omega(x,y)$ w przepływie cieczy lepkiej w kanale nad ścianką ożebrowaną



Rys. 10.f. Pole ciśnienia $p(x,y)$ w przepływie cieczy lepkiej w kanale nad ścianką ożebrowaną

3. WNIOSKI

Metoda brzegowych równań całkowych nie jest rozpo-
wszechniona i stosowana tak szeroko jak metody siatkowe.
Jednak niewątpliwie walory metody brzegowych równań
całkowych, w tym zasadniczy, polegający na sprowadzeniu
zagadnień brzegowych i początkowo-brzegowych dla rów-
nań różniczkowych w obszarze rozwiązania do właściwych
zagadnień na brzegu obszaru bez konieczności dyskretyzacji
obszaru są istotnym czynnikiem stymulującym rozwój
metody.

Klasyczne metody siatkowe do rozwiązywania zagad-
nień opisanych złożonymi układami równań różniczkowych

w skomplikowanych geometrycznie obszarach pomimo prostoty sformułowania wymagają generowania rozległych, zaawansowanych strukturalnie siatek, absorbujących pamięć maszyn liczących i pomnażających czas obliczeń.

Metoda brzegowych równań całkowych jakkolwiek bardziej skomplikowana w matematycznym dyskretnym opisie zagadnień generuje znacznie mniejsze układy algebraicznych równań liniowych w procesie numerycznego całkowania zdyskretyzowanych brzegowych równań całkowych, przy tym z reguły dobrze uwarunkowane, co ma istotne znaczenie przy doborze metod ich rozwiązywania.

Metoda elementów brzegowych ze względu na możliwości formułowania złożonego matematycznego opisu zjawisk przepływowych i zagadnień brzegowych dla równań opisujących przepływy jest efektywną metodą rozwiązywania zagadnień inżynierskich o dużej skuteczności i dokładności, co wykazują prezentowane wyżej porównania rezultatów obliczeń z rozwiązaniami analitycznymi i danymi eksperymentalnymi.

LITERATURA

1. **Batchelor G. K.** (1967), *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University.
2. **Brebbia C. A.** (1984), *Topics in Boundary Element Research, Vol. 1. Basic Principles and Applications*, Springer-Verlag, NY.
3. **Brebbia C. A., Telles J. F. C., Wrobel L. C.** (1984), *Boundary element Techniques. Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, NY.
4. **Erturk E., Corke T. C., Gokcol C.** (2005), Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers, *International Journal Numerical Methods in Fluids*, Vol. 48, No 7, 747 – 774.
5. **Hirsh Ch.** (2007), *Numerical Computation of Internal and External Flows. The Fundamentals of computational Fluid Dynamics*, Elsevier.
6. **Pozrikidis C.** (1991), *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flows*, Cambridge University Press, NY.
7. **Prosnak W. J.** (1993), *Wprowadzenie do numerycznej mechaniki płynów, Podstawowe metody numeryczne*. Ossolineum.
8. **Prosnak W. J.** (2006), *Równania klasycznej mechaniki płynów*, Wydawnictwo Naukowe PWN.
9. **Souli M.** (1996), Vorticity boundary conditions for Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, Vol. 134, No 3, 311-323.
10. **Taneda S.** (1979), Visualization of Separating Stokes Flows, *J. Phys. Soc. Japan.*, Vol. 468, No 6, 1935-1942
11. **Teleszewski T. J.** (2008), *Zastosowanie metody brzegowych równań całkowych do analizy wybranych zagadnień przepływu cieczy lepkiej (rozprawa doktorska)*, Pol. Białostocka.
12. **Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.** (2000), *The Finite Element Method, Vol. 3. Fluid Dynamics*, Butterworth-Heinemann.

APPLICATION OF BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR SOLUTION OF TWO DIMENSIONAL FLOWS

Abstract: Object of presented work is implementation of method of boundary integral equations to solving of viscous liquid flow problems. The computing algorithm for laminar flows of viscous liquid flows (Stokes flows) at use of method of the boundary integral equations consisting in to application of conjugate integral equations describing of speed and stresses in liquid to delimitation of stress at boundary conditions formulated for speed, to delimitation of speed from integral relationships, and in further order delimitation of the pressure, vorticity and stream function by utilization of differential relationships among these quantities and speed of movement of liquid. One represented results of solution of the test problem of flat flow in square cavity and one compared results of calculations of boundary element method with results of calculations with finite element method. One made comparisons streamlines obtained by experimental visualizations of the flows with stream function charts for row laminar flows in flat ducts with various configuration.

Opracowanie wykonano w ramach pracy statutowej S/WBIIŚ/5/2011 i projektu współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego WIEM/POKL/MD/II/2010/6.