

ZGINANIE PŁYTY REISSNERA ZE SZCZELINAMI PRZY UWZGLĘDNIENIU SZEROKOŚCI STREFY KONTAKTU BRZEGÓW SZCZELIN

Heorgij SULYM*, Wiktor OPANASOWYCZ**, Igor JACYK**

*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

**Katedra Mechaniki, Lwowski Uniwersytet imienia Iwana Franko, ul. Uniwersytetska, 1, 79000, Lwów, Ukraina

sulym@pb.edu.pl, kafmech@franko.lviv.ua, ihoryatsyk@i.ua

Streszczenie: W pracy zbadano zagadnienie zginania nieograniczonej izotropowej płyty obciążonej jednorodnie rozłożonymi momentami gnącymi w nieskończoności. Płyta jest osłabiona trzema równoległymi szczelinami, których brzegi są wolne od obciążeń zewnętrznych. Zakłada się, że brzegi szczelin w górnej swojej części kontaktują się wzdłuż całej długości, a strefa kontaktu ma stałą szerokość dla każdej szczeliny. Rozwiązanie zagadnienia jest superpozycją rozwiązań dwóch zagadnień: tarczy płaskiej oraz zagadnienia zginania płyty typu Reissnera. Wykorzystując metody teorii funkcji zmiennych zespolonych i potencjałów zespolonych, otrzymano układ osobliwych równań całkowych rozwiązywanych numerycznie metodą mechanicznych kwadratur. Przedstawiono wyniki analizy numerycznej przykładów dla jednej, dwóch i trzech szczelin.

1. WPROWADZENIE

Szerokie wykorzystanie w technice, a zwłaszcza w budownictwie, elementów w postaci płyt, wymaga rozwoju metod oceny ich wytrzymałości z uwzględnieniem istniejących szczelin. Defekty takie są potężnymi koncentratorami naprężeń i istotnie obniżają skalę dopuszczalnych obciążeń. Szczeliny, które powstają i rozwijają się podczas eksploatacji elementów konstrukcji, są główną przyczyną ich zniszczenia.

Sformułowanie zagadnienia zginania płyt ze szczelinami i metody ich rozwiązywania są dostatecznie dobrze znane (Bereżnickij i inni, 1979; Prusov, 1975; Savruk, 1981). Tym nie mniej w wymienionych oraz w większości innych prac dotyczących tego tematu prawie nigdy nie uwzględnia się możliwości wzajemnego kontaktowania się brzegów szczeliny, co powoduje kinematyczną sprzeczność: przenikanie jednego brzegu przez drugi w tych miejscach, gdzie normalne naprężenia są ujemne. W ostatnich latach (patrz Opanasovyč, 2007; Opanasovyč i Seliverstov, 2001; Opanasovyč i Seliverstov, 2000; Šac'kyj, 1988; Šac'kyj i Perepička, 1992; Šac'kyj i inni, 2000) otrzymano wiele rozwiązań zagadnień zginania płyt ze szczelinami z uwzględnieniem kontaktu brzegów szczelin wzdłuż górnej krawędzi brzegów (linii), sprowadzając rozwiązanie do układu osobliwych równań całkowych. Niektóre z tych zagadnień rozwiązano również przy bliższym rzeczywistości założeniu o kontakcie nie wzdłuż linii, a pewnej strefy o stałej szerokości. Główną uwagę koncentrowano dotychczas na płytach cienkich, wykorzystując równania Kirchhoffa, a dopiero w ostatnich pracach stosowane są w tym celu modele tarcz typu Reissnera.

Ważną stroną powyższych zagadnień jest uwzględnienie wzajemnego wpływu dwóch i większej ilości szczelin. Z tego powodu celem niniejszej pracy jest analiza układu z trzema szczelinami w zginanej płycie typu Reissnera, w przypadku, gdy dochodzi do wzajemnego kontaktu (bez

tarcia) brzegów szczelin wzdłuż pasma o stałej szerokości. Rozwiązania poszukuje się w postaci superpozycji rozwiązań dwóch geometrycznie jednakowych zagadnień – tarczy w płaskim stanie naprężenia oraz zagadnienia zginania płyty według teorii Reissnera. Wykorzystując metody funkcji zmiennej zespolonej oraz potencjały zespolone, otrzymano układ osobliwych równań całkowych, który jest rozwiązywany numerycznie metodą kwadratur mechanicznych. Przedstawiono wyniki analizy numerycznej siły oddziaływania kontaktowego między brzegami szczelin oraz wartości współczynników intensywności naprężeń. W przypadkach szczególnych otrzymano zgodność wyników ze znanymi z literatury.

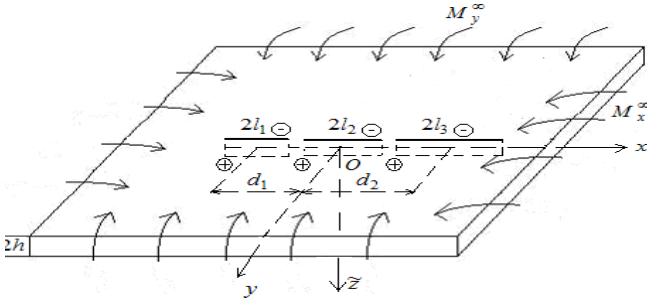
2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Rozważamy izotropową płytę o stałej grubości $2h$ z trzema szczelinami o długości $2l_k$ ($k = 1, 2, 3$) leżącymi na jednej prostej (Rys. 1). Interesujące nas zagadnienie zginania płyty przy obciążeniu w nieskończoności równomiernie rozłożonymi momentami gnącymi. Odległość pomiędzy środkami sąsiednich szczelin oznaczmy przez d_j ($j = 1, 2$).

Zakładamy, że pod wpływem takiego obciążenia zewnętrznego dochodzi do gładkiego kontaktu brzegów szczelin wzdłuż całej długości. Strefa kontaktu w górnej części brzegów ma stałą (jednakową dla wszystkich szczelin) szerokość h_1 . Do chwili zginania brzegi szczelin nie były obciążane.

Wprowadzamy kartezjański układ współrzędnych $Oxy\tilde{z}$ z osiami Ox , Oy w płaszczyźnie środkowej płyty i środkiem O w środku drugiej szczeliny. Oś Ox skierujemy wzdłuż osi szczelin. Odcinki $[-d_1 - l_1, -d_1 + l_1]$, $[-l_2, l_2]$ oraz $[d_2 - l_3, d_2 + l_3]$ osi Ox , wzdłuż których leżą szczeliny, oznaczamy odpowiednio L_k i $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$; rozłożone siły kontaktowe między brzegami szczeliny z numerem k – przez N_k ($N_k > 0$), a rozłożone momenty gnące w nieskończoności

$-M_x^\infty, M_y^\infty$. Pozostałe oznaczenia to: μ – moduł Kirchhoffa; E – moduł Younga; ν – współczynnik Poissona; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – stała Muscheliszwiliego. Zakładamy, że wskaźnik k przyjmuje trzy wartości: 1, 2, 3; a wskaźnik j – dwie: 1 i 2.



Rys. 1. Schemat obciążenia płyty ze szczelinami

Wskutek kontaktu brzegów szczelin rozwiązanie zagadnienia podzielimy na dwie części: zagadnienie płaskiej teorii sprężystości oraz zagadnienie zginania płyty według teorii Reissnera.

Na brzegach szczeliny k , zgodnie ze sformułowaniem zagadnienia, mamy następujące warunki brzegowe:

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -N_k/(2h), \quad \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^- = 0, \quad x \in L_k, \quad (1)$$

$$M_y^+ = M_y^- = M_k, \quad Q_y^+ = Q_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ = H_{xy}^- = 0, \quad x \in L_k, \quad (2)$$

$$M_k = \beta h N_k, \quad \partial_x [v_p] + \alpha h \partial_x [\varphi_y] = 0, \quad x \in L_k, \quad (3)$$

gdzie σ_{xy}, σ_{yy} i v_p – to odpowiednio współrzędne tensora naprężeń i rzut wektora przemieszczeń na oś Oy w zagadnieniu tarczy płaskiej; φ_y – uśredniony wzdłuż grubości tarczy kąt obrotu normalnej do środkowej płaszczyzny płyty w zagadnieniu zginania (Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1959); M_y – moment gnący, Q_y i H_{xy} odpowiednio: siła ścinająca i moment skręcający; $\partial_x = \partial/\partial x$, $[f] = f^+ - f^-$; wskaźniki «+» i «-» oznaczają wartości graniczne funkcji przy dążeniu punktu płaszczyzny do brzości szczelin przy $y \rightarrow \pm 0$; $\alpha = 0,5 [1 + (1 - \gamma)^2]$, $\beta = 1 - \gamma/3$ i $\gamma = h_1/h$ – jest bezwymiarową szerokością strefy kontaktu (Opanasowycz, 2007).

Poszukuje się naprężeniowo-odkształceniowego stanu tarczy.

3. ROZWIĄZYWANIE ZAGADNIENIA

Płaski stan naprężeń określamy za pomocą potencjałów zespolonych $\Phi_p(z), \Omega_p(z)$, które dążą do zera w nieskończoności i pozwalają opisać naprężenia i odkształcenia w tarczy za pomocą wzorów (Muskhelishvili, 1977b):

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi_p(z) + \Omega_p(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_p'(z)}, \quad (4)$$

$$2\mu\partial_x(u_p + iv_p) = \kappa\Phi_p(z) - \Omega_p(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_p'(z)}.$$

Dolny wskaźnik P w naprężeniach pomijamy, ponieważ są to te same naprężenia, co w (1).

Warunki brzegowe dla tego zagadnienia mają postać

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- = 0, \quad x \in L,$$

co, z uwzględnieniem (4), daje

$$(\Phi_p(x) - \Omega_p(x))^+ - (\Phi_p(x) - \Omega_p(x))^- = 0, \quad x \in L. \quad (5)$$

Rozwiązanie zagadnienia sprzężenia liniowego wartości granicznych funkcji analitycznych (5) daje

$$\Phi_p(z) = \Omega_p(z). \quad (6)$$

Biorąc pod uwagę (4) i (6), z warunku granicznego (1)

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ + (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- = -N_k/h, \quad x \in L_k$$

otrzymujemy

$$N_k = -2h(\Phi_p^+(x) + \Phi_p^-(x)), \quad x \in L_k. \quad (7)$$

Potencjał zespolony $\Phi_p(z)$ poszukujemy w postaci (Panasúk i inni, 1976)

$$\Phi_p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tilde{g}'(t) dt}{t - z}, \quad (8)$$

gdzie

$$2\mu\partial_x[u_p + iv_p]/(1 + \kappa) = \tilde{g}'(x) = \tilde{g}'_1(x) + i\tilde{g}'_2(x), \quad x \in L. \quad (9)$$

Z relacji (8), z uwzględnieniem (7), mamy

$$-\frac{N_k}{2h} = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\tilde{g}'_2(t) dt}{t - x}, \quad x \in L_k, \quad (10)$$

$$\int_L \frac{\tilde{g}'_1(t) dt}{t - x} = 0, \quad x \in L_k. \quad (11)$$

Rozwiązaniem równania osobliwego (11), z uwzględnieniem warunku $\int_{L_k} \tilde{g}'_1(t) dt = 0$, jest

$$\tilde{g}'_1(t) = 0, \quad t \in L_k.$$

W celu otrzymania rozwiązania zagadnienia zginania płyty wykorzystamy potencjały zespolone $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$, funkcję $\Omega(z, \bar{z})$ oraz zależności (Mazurak i Bereżnickij, 1990)

$$M_x + M_y = -2D(1 + \nu)\{\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}\}, \quad (12)$$

$$M_y - M_x + 2iH_{xy} = 2D(1 - \nu)\{z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} + \frac{4}{k_*^2(1 - \nu)}[2\overline{\Phi''(z)} + i\partial_{zz}^2\Omega(z, \bar{z})]\}, \quad (13)$$

$$Q_x - iQ_y = -2D\{2\Phi'(z) - i\partial_z\Omega(z, \bar{z})\}, \quad (14)$$

gdzie $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$, $k_* = \frac{5}{2h^2}$, $\partial_z = 0.5(\partial_x - i\partial_y)$;

funkcja $\Omega(z, \bar{z})$ – rozwiązanie równania Helmholtza $4\partial_{z\bar{z}}^2 \Omega(z, \bar{z}) = k_*^2 \Omega(z, \bar{z})$, $\partial_{\bar{z}} = 0.5(\partial_x + i\partial_y) = \bar{\partial}_z$.

Zależności (12) i (13) przepisujemy w postaci:

$$M_y + iH_{xy} = 2m \operatorname{Re}\Phi(z) + n \left\{ z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \right\} + \rho \left\{ 2\overline{\Phi''(z)} + i\partial_{z\bar{z}}^2 \Omega(z, \bar{z}) \right\}; \quad (15)$$

$$m = -D(1+\nu), n = D(1-\nu), \rho = \frac{4D}{k_*^2}.$$

Potencjałów zespolonych $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ poszukujemy w postaci (Prusov, 1975)

$$\Phi(z) = \Phi_*(z) + \Gamma, \Psi(z) = \Psi_*(z) + \Gamma', \quad (16)$$

$$\Gamma = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \Gamma' = -\frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2D(1-\nu)},$$

gdzie $\Phi_*(z)$ i $\Psi_*(z)$ – są to funkcje holomorficzne, które zerają się w nieskończoności.

Przedstawimy funkcje $\Phi_*(z)$ i $\Omega(z, \bar{z})$ w postaci całek (Opanasovyč, 2007; Opanasovyč i inni., 1999):

$$\Phi_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)dt}{t-z}, \quad g(t) = g_1(t) + i g_2(t), \quad (17)$$

$$\Omega(z, \bar{z}) = \frac{k_*}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \int_L \frac{rK_1(k_*r)}{t-z} \omega(t) dt \right\}, \quad (18)$$

$$\omega(t) = \omega_1(t) + i\omega_2(t), \quad r = \sqrt{(t-z)(t-\bar{z})},$$

gdzie $g_1(t)$, $g_2(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ – niewiadome funkcje rzeczywiste; $K_j(x)$ - funkcja MacDonalda (zmodyfikowana funkcja Bessela drugiego rodzaju) rzędu j (Abramowitz and Stegun, 1970).

Pochodne funkcji $\Omega(z, \bar{z})$ we wzorach (14) i (15), przedstawiamy w sposób następujący:

$$\partial_z \Omega(z, \bar{z}) = \Omega_1(z, \bar{z}) - \frac{i}{2\pi} \int_L \frac{\omega(t)dt}{(t-z)^2}, \quad (19)$$

$$\partial_{z\bar{z}}^2 \Omega(z, \bar{z}) = \Omega_2(z, \bar{z}) - \frac{i}{\pi} \int_L \frac{\omega(t)dt}{(t-z)^3}. \quad (20)$$

Tutaj

$$\Omega_1(z, \bar{z}) = \frac{ik_*^2}{2\pi} \int_L \left\{ \frac{r^2 \tilde{K}'_1(k_*r)}{(t-z)^2} \omega(t) + \frac{(t-\bar{z})K_0(k_*r)}{r^2} \operatorname{Re}\{(t-\bar{z})\omega(t)\} \right\} dt; \quad (21)$$

$$\Omega_2(z, \bar{z}) = \frac{k_*^2}{2\pi} \left\{ \int_L \frac{r^2 \tilde{K}_2(k_*r)}{i(t-z)^3} \omega(t) dt - \frac{k_*}{2} \operatorname{Im} \left\{ \int_L \frac{K_1(k_*r)}{t-z} \times \right. \right.$$

$$\left. \times r \omega(t) dt \right\} + k_* \int_L \frac{t-x}{r^3} K_1(k_*r)(t-\bar{z}) \operatorname{Im}\{(t-\bar{z})\omega(t)\} dt \left. \right\} \quad (22)$$

$$\tilde{K}_1(x) = K_1(x) - 1/x, \quad \tilde{K}_2(x) = K_2(x) - 2/x^2.$$

Wykorzystując funkcję

$$V(z) = q\bar{\Phi}_*(z) + z\bar{\Phi}'_*(z) + \bar{\Psi}_*(z) + \frac{m_1}{k_*^2 \pi i} \int_L \frac{\delta(t)dt}{(t-z)^3}$$

oraz wzory (16)-(22), zależności (14) i (15) przepisujemy następująco:

$$M_y + iH_{xy} = n \left\{ q(\Phi_*(z) + 2\Gamma) + \Gamma' + V(\bar{z}) + (z-\bar{z})\overline{\Phi'_*(z)} + im_1 k_*^{-2} \overline{\Omega_2(z, \bar{z})} \right\}; \quad (23)$$

$$Q_x - iQ_y = -2D \{ P(z) - i\Omega_1(z, \bar{z}) \}, \quad (24)$$

gdzie

$$P(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\delta(t)}{(t-z)^2} dt, \quad q = -\frac{1+\nu}{1-\nu}, \quad m_1 = \frac{4}{1-\nu},$$

$\delta(t) \equiv \delta_1(t) + i\delta_2(t) = -2g(t) + i\omega(t)$, $\delta_1(t)$ i $\delta_2(t)$ – funkcje rzeczywiste.

Ze wzorów (18), (21), (22) i właściwości funkcji MacDonalda wynika, że funkcja $\Omega_1(z, \bar{z})$ jest ciągła, a funkcje $\Omega(z, \bar{z})$ i $\Omega_2(z, \bar{z})$ spełniają warunki

$$\Omega^+(x, x) - \Omega^-(x, x) = \begin{cases} 2\omega_1(x) & (x \in L); \\ 0 & (x \notin L), \end{cases}$$

$$\overline{\Omega_2^+(x, x)} - \overline{\Omega_2^-(x, x)} = \begin{cases} -0.5k_*^2 \omega_1(x) & (x \in L); \\ 0 & (x \notin L). \end{cases}$$

Zakładamy, że również są spełnione warunki

$$\delta(-d_1 \pm l_1) = \delta(\pm l_2) = \delta(d_2 \pm l_3) = 0 \quad (25)$$

Uwzględnienie zależności (25)

$$P(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\delta'(t)}{t-z} dt,$$

według wzorów Sochockiego – Plemelja (Muskhelishvili, 1977a) daje:

$$P^+(x) - P^-(x) = -\delta'(x) \quad (x \in L). \quad (26)$$

Wykorzystując wzory (24), (26) spełniamy drugi warunek brzegowy, otrzymując:

$$\delta'_2(x) = 0. \quad (27)$$

Uwzględnienie zależności (25) daje $\delta_2(x) = 0$, a zatem

$$\omega_1(x) = 2g_2(x), \quad \omega_2(x) = -2g_1(x) - \delta_1(x).$$

Na podstawie wzoru (23), z pierwszego i trzeciego warunków brzegowych (2), wynika zagadnienie sprzężenia

liniowej wartości granicznych funkcji analitycznych dla wyznaczenia funkcji $V(z)$

$$V^+(x) - V^-(x) = \begin{cases} q g_1(x) - im_2 g_2(x) & (x \in L); \\ 0 & (x \notin L), \end{cases}$$

rozwiązaniem, którego jest

$$V(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q g_1(t) - im_2 g_2(t)}{t - z} dt, \quad m_2 = \frac{5 + \nu}{1 - \nu}. \quad (28)$$

Wykorzystanie zależności

$$\begin{aligned} \partial_x(\varphi_x + i\varphi_y) &= \Phi_*(z) + \frac{m_1}{2} \overline{\Phi_*(z)} + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_*(z)} + \\ &+ V(\bar{z}) + im_1 \left\{ \frac{\overline{\Omega_2(z, \bar{z})}}{k_*^2} + \frac{\Omega(z, \bar{z})}{4} \right\} \end{aligned}$$

daje

$$\partial_x[\varphi_x + i\varphi_y] = m_1(g_1(x) + i g_2(x)), \quad x \in L. \quad (29)$$

Drugi warunek (3) na podstawie (9) i (29) daje

$$\tilde{g}'_2(t) = -\frac{2\alpha h m_1 \mu}{1 + \kappa} g_2(t), \quad t \in L. \quad (30)$$

Biorąc pod uwagę (30), rozłożona siła (10) jest równa

$$N_k = \frac{4\alpha h^2 m_1 \mu}{\pi(1 + \kappa)} \int_L \frac{g_2(t)}{t - x} dt, \quad x \in L_k. \quad (31)$$

Z uwzględnieniem (17), (23), (24), (28), (31) z warunków brzegowych (2) i (3) otrzymamy układ równań całkowych, z którego wyznaczamy funkcje $g_1(x)$ i $\delta_1(x)$:

$$g_1(x) = \delta_1(x) = 0,$$

oraz równanie względem funkcji $g_2(x)$:

$$\begin{aligned} \int_L \frac{n_1 + n_2/n + 2m_1 \tilde{K}_2(k_* |t - x|)}{t - x} g_2(t) dt &= \frac{2\pi M_y^\infty}{n}, \\ x \in L_k; \quad n_1 &= \frac{2(3 + \nu)}{1 - \nu}, \quad n_2 = \frac{8\alpha\beta h^3 m_1 \mu}{1 + \kappa}. \end{aligned} \quad (32)$$

która ma spełniać warunek dodatkowy

$$\int_{L_k} g_2(t) dt = 0, \quad (33)$$

oznaczający jednoznaczność pochodnej z uśrednionego wzdłuż grubości tarczy kąta φ_y obrotu normalnej do środkowej płaszczyzny tarczy podczas obchodzenia wzdłuż konturu k -ej szczeliny.

Trzeba zaznaczyć, że w przypadku szczególnym, gdy $\gamma = 0$ i $d_2 \rightarrow \infty$ lub $l_3 \rightarrow 0$, równania (32) pokrywają się z równaniami w pracy (Opanasovyč i Seliverstov, 2000), a w przypadku szczelin o jednakowej długości – z równaniami w pracy (Opanasovyč i Seliverstov, 2001).

Wykorzystując w (32) i (33) dla $t \in L_k$ i $x \in L_k$ oznaczenia

$$\begin{aligned} T &= \frac{t - (k - 2)d_{0.5(k+1)}}{l_k}, \quad X = \frac{x - (k - 2)d_{0.5(k+1)}}{l_k}, \\ \eta_j &= \frac{l_{j+1}}{l_1}, \quad \xi_j = \frac{d_j}{l_1}, \quad \lambda = \frac{1}{k_* l_1}, \quad R(T, X) = \\ &= \sqrt{1 - T^2} \frac{3 + \nu + 3\alpha\beta(1 + \nu) + 4\tilde{K}_2(|T - X|/\lambda)}{T - X}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$g_{2k}^*(T) = \frac{D}{\pi M_y^\infty} \sqrt{1 - T^2} g_2(l_k T + (k - 2)d_{0.5(k+1)}),$$

przepisujemy (32) i (33) dla każdej z trzech szczelin w postaci

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left\{ R(T, X) g_{21}^*(T) + \eta_1 R(T\eta_1 + \xi_1, X) g_{22}^*(T) + \right. \\ \left. + \eta_2 R(T\eta_2 + \xi_1 + \xi_2, X) g_{23}^*(T) \right\} dT = 1, \\ \int_{-1}^1 \left\{ R(T, X\eta_1 + \xi_1) g_{21}^*(T) + \eta_1 R(T\eta_1, X\eta_1) \times \right. \\ \left. \times g_{22}^*(T) + \eta_2 R(T\eta_2 + \xi_2, X\eta_1) g_{23}^*(T) \right\} dT = 1, \\ \int_{-1}^1 \left\{ R(T, X\eta_2 + \xi_1 + \xi_2) g_{21}^*(T) + \right. \\ \left. + \eta_1 R(T\eta_1, X\eta_2 + \xi_2) g_{22}^*(T) + \right. \\ \left. + \eta_2 R(T\eta_2, X\eta_2) g_{23}^*(T) \right\} dT = 1 \quad (X \in [-1, 1]); \end{aligned} \quad (35)$$

$$\int_{-1}^1 g_{2k}^*(T) / \sqrt{1 - T^2} dT = 0.$$

Do wyznaczenia współczynników intensywności sił ścinających K_{1k}^\pm i momentów K_{Mk}^\pm wykorzystamy zależności z monografii (Mazurak i Bereżnickij, 1990; Savruk, 1981), które w rozważanym przypadku mają postać

$$\begin{pmatrix} K_{1k}^\pm \\ K_{Mk}^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \frac{2\alpha E h^2}{1 - \nu} \\ \mp m \end{pmatrix} \frac{\sqrt{l_k} \pi M_y^\infty}{D} g_{2k}^*(\pm 1). \quad (36)$$

Na podstawie (30) i (36) związek pomiędzy współczynnikami K_{1k}^\pm i K_{Mk}^\pm ma postać:

$$K_{1k}^\pm = 3\alpha K_{Mk}^\pm / h.$$

Po uwzględnieniu wzorów (34) i (36), bezwymiarowe współczynniki intensywności sił $\tilde{K}_{1k}^\pm = K_{1k}^\pm h / (M_y^\infty \sqrt{l_k})$ i momentów $\tilde{K}_{Mk}^\pm = K_{Mk}^\pm / (M_y^\infty \sqrt{l_k})$ (WIM) można zapisać następująco:

$$\tilde{K}_{Mk}^\pm = \pm \pi (1 + \nu) g_{2k}^*(\pm 1), \quad \tilde{K}_{1k}^\pm = 3\alpha \tilde{K}_{Mk}^\pm.$$

Zaznaczmy, że gdy $\gamma = 0$ i $h/l_1 \rightarrow 0$ wartości \tilde{K}_{Mk}^\pm różnią się od odpowiednich wartości otrzymanych z zało-

żeń klasycznej teorii zginania płyt (Šac'kyj, 1988), stałym współczynnikiem $(1 + \nu)/(3 + \nu)$.

Układ równań (35) rozwiązuje się numerycznie za pomocą metody mechanicznych kwadratur (Panasúk i inni, 1976), co prowadzi do układu liniowych równań algebraicznych względem węzłowych wartości $g_{2k}^*(T_s)$; przy czym wartości funkcji określające WIM są

$$g_{2k}^*(\pm 1) = \mp \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (-1)^{s+0.5(1\mp 1)S} g_{2k}^*(T_s) \operatorname{tg}^{\mp 1} \left(\frac{2s-1}{4S} \pi \right),$$

gdzie $T_s = \cos \left(\frac{2s-1}{2S} \pi \right)$, S – ilość węzłów metody mechanicznych kwadratur.

4. ANALIZA NUMERYCZNA I WNIOSKI

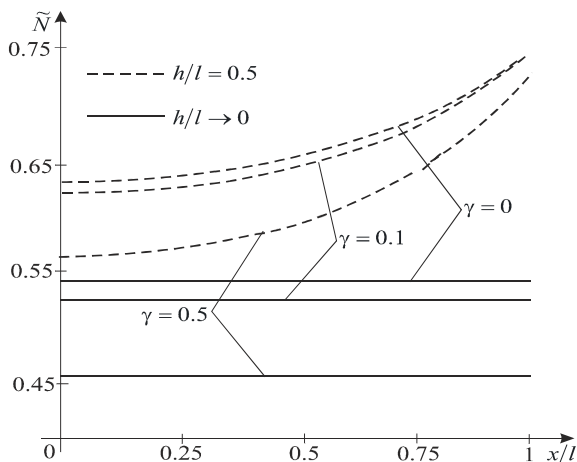
Numeryczna analiza zagadnienia przeprowadzona została dla materiału o współczynniku Poissona $\nu = 0,3$.

4.1. Przypadek jednej szczeliny

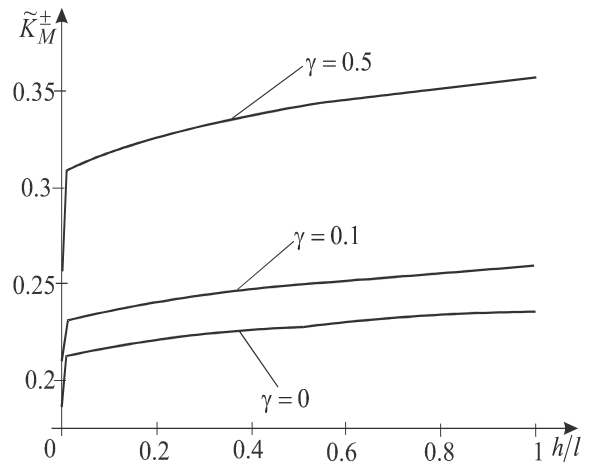
Rys. 2 przedstawia rozkład bezwymiarowych sił kontaktowych $\tilde{N} = Nh/M_y^\infty$ wzdłuż szczeliny przy różnych względnych grubościach tarczy h/l i szerokościach strefy kontaktu brzegów szczeliny. Widać, że uwzględnienie szerokości strefy kontaktu powoduje zmniejszenie obliczonej bezwymiarowej siły kontaktowej, przy czym w przypadku granicznym $h/l \rightarrow 0$ jej wartość nie zmienia się wzdłuż szczeliny.

Na Rys. 3 pokazano zależności bezwymiarowych WIM \tilde{K}_M^\pm od względnej grubości tarczy przy różnych wartościach γ . Te dane dają podstawę do wniosku, że uwzględnienie rzeczywistej szerokości strefy kontaktu prowadzi do zwiększenia obliczonych wartości WIM.

W przypadkach szczególnym $\gamma = 0$ i $h/l \rightarrow 0$ otrzymujemy wyniki zgodne z pracami (Opanasovyč i inni, 2002) oraz (Šac'kyj, 1988).



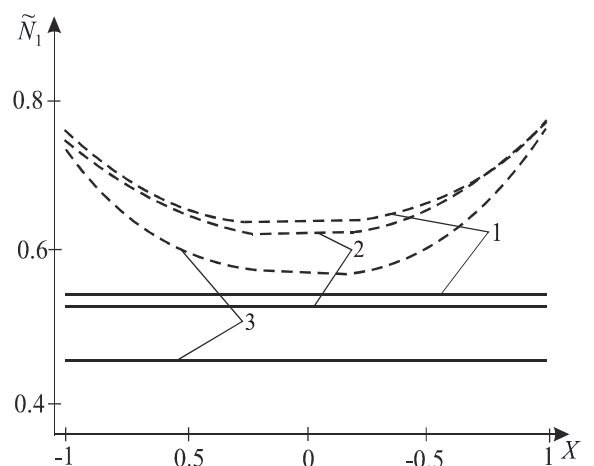
Rys. 2. Zależności rozłożonej bezwymiarowej siły kontaktowej przy różnych wartościach h/l i γ



Rys. 3. Zależności bezwymiarowych WIM przy różnych wartościach γ

4.2. Przypadek dwóch szczelin

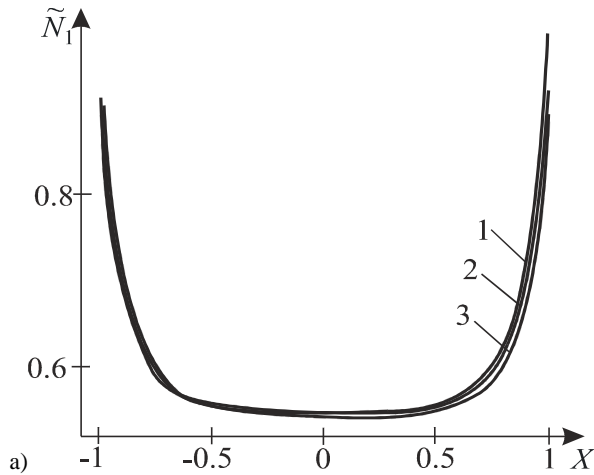
Rys. 4 – 8 ilustrują rozkłady bezwymiarowej siły kontaktowej $\tilde{N}_j = N_j h/M_y^\infty$ między brzegami j -ej szczeliny od bezwymiarowej współrzędnej X . Dane na Rys. 4 odpowiadają wartościom parametrów $\eta = l_2/l_1 = 1$, $\xi = d_1/l_1 - 1 - \eta = 1$: krzywa 1 odpowiada wartości parametru $\gamma = 0$, krzywa 2 – $\gamma = 0,1$, krzywa 3 – $\gamma = 0,5$; linie ciągłe odpowiadają przypadkowi $h/l_1 \rightarrow 0$, a przerywane – $h/l_1 = 0,5$. Rysunki te świadczą o tym, że uwzględnienie szerokości strefy kontaktu w przypadku jednej szczeliny prowadzi do zmniejszenia obliczonej bezwymiarowej siły kontaktowej, a w przypadku granicznym $h/l_1 \rightarrow 0$ jej wartość wzdłuż szczeliny pozostaje niezmienna. Oprócz tego, teoria Reissnera przewiduje większe niż to wynika z technicznej teorii zginania siły kontaktowe. Obecność drugiej szczeliny prowadzi do zwiększenia sił kontaktowych między brzegami szczelin porównywalnie z przypadkiem jednej szczeliny (patrz Rys. 2).



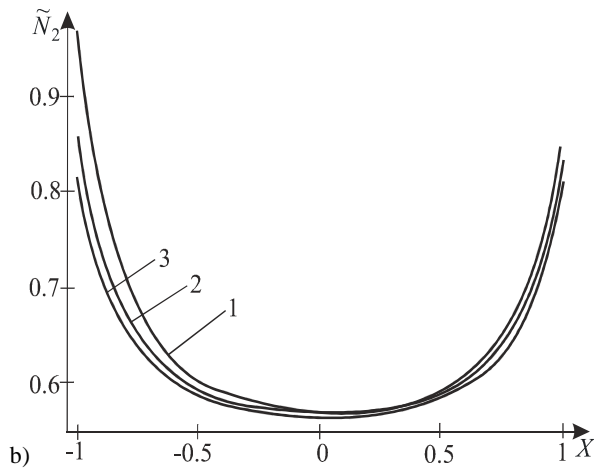
Rys. 4. Zależności bezwymiarowej siły kontaktowej przy różnych wartościach h/l_1 i γ

Na Rys. 5 przedstawiono zależność bezwymiarowej siły kontaktowej \tilde{N}_j między brzegami szczelin, gdy $\gamma = 0,1$,

$h/l_1 = 0,1$, $\eta = 0,5$. Przy czym, krzywe 1 otrzymano przy $\xi = 0,3$, krzywe 2 – przy $\xi = 1$, krzywe 3 – przy $\xi = \infty$. Analiza numeryczna wykazała, że podczas zwiększenia odległości względnej ξ między szczelinami, wartości sił \tilde{N}_j dążą do wyników dla jednej izolowanej szczeliny w nieograniczonej tarczy.

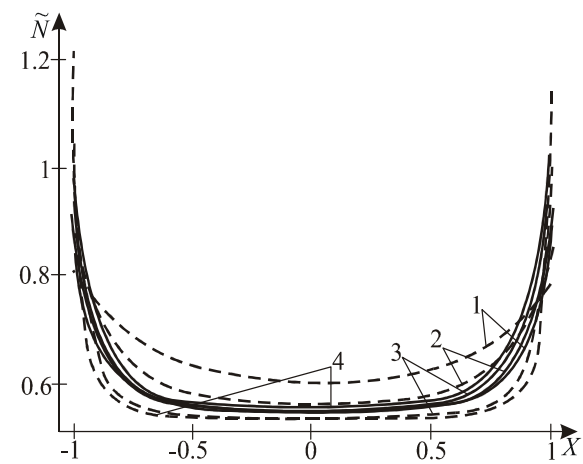


a)

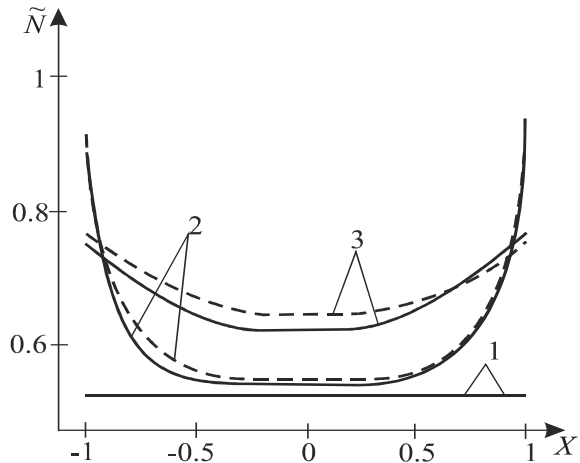


b)

Rys. 5. Zależności bezwymiarowej siły kontaktowej przy różnych wartościach ξ



Rys. 6. Zależności bezwymiarowej siły kontaktowej przy różnych wartościach η

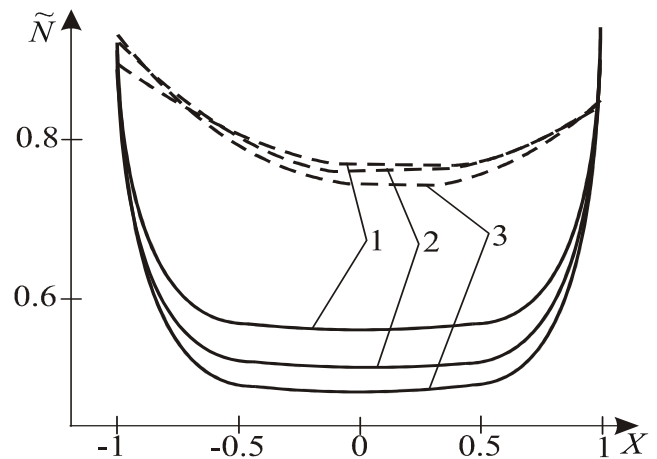


Rys. 7. Zależności bezwymiarowej siły kontaktowej przy różnych wartościach h/l_1

Na Rys. 6 – 8 linie ciągłe odpowiadają pierwszej szczelinie, a przerywane - drugiej.

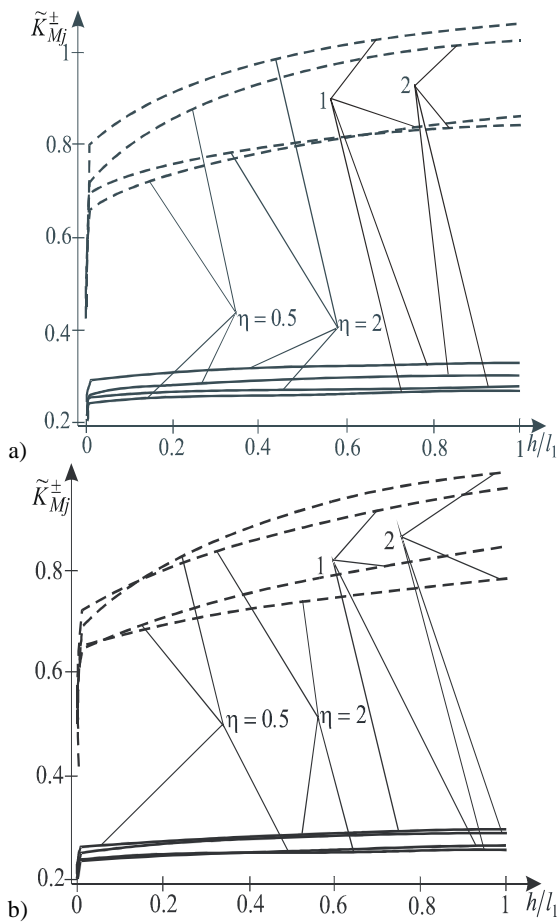
Rys. 6 otrzymano przy $\gamma = 0,1$, $h/l_1 = 0,1$, $\xi = 1$. Krzywymi 1 – 4 odpowiadają następujące bezwymiarowe długości szczelin: $\eta = 0,3; 0,6; 2; 3$. Otrzymane wyniki pozwalają wnioskować, że zwiększenie względnej długości drugiej szczeliny prowadzi do nieznacznego zwiększenia sił kontaktowych na pierwszej szczelinie i jej zmniejszenia na drugiej. Przy $\eta \rightarrow 0$ siły kontaktowe na pierwszej szczelinie, a przy $\eta \rightarrow \infty$ – na drugiej są takie, jak dla przypadku jednej izolowanej szczeliny.

Dane dla Rys. 7 otrzymano przy $\gamma = 0,1$, $\eta = 0,8$, $\xi = 1$, przy czym krzywe 1 odpowiadają $h/l_1 \rightarrow 0$, krzywe 2 – $h/l_1 = 0,1$, a krzywe 3 – $h/l_1 = 0,5$. Zwiększenie względnej grubości tarczy powoduje zmniejszenie sił kontaktowych obok końców szczelin. Siły kontaktowe na drugiej szczelinie są większe od sił na pierwszej.

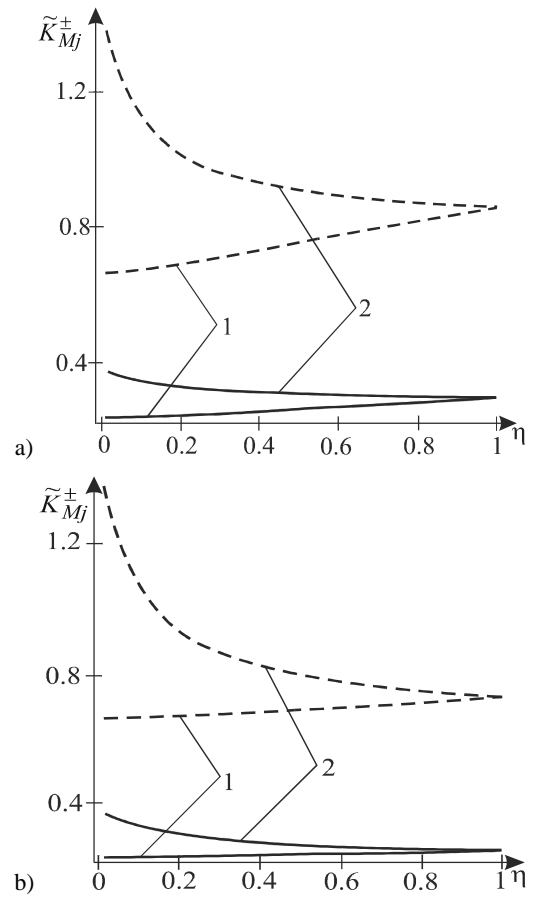


Rys. 8. Zależności bezwymiarowej siły kontaktowej przy różnych wartościach γ

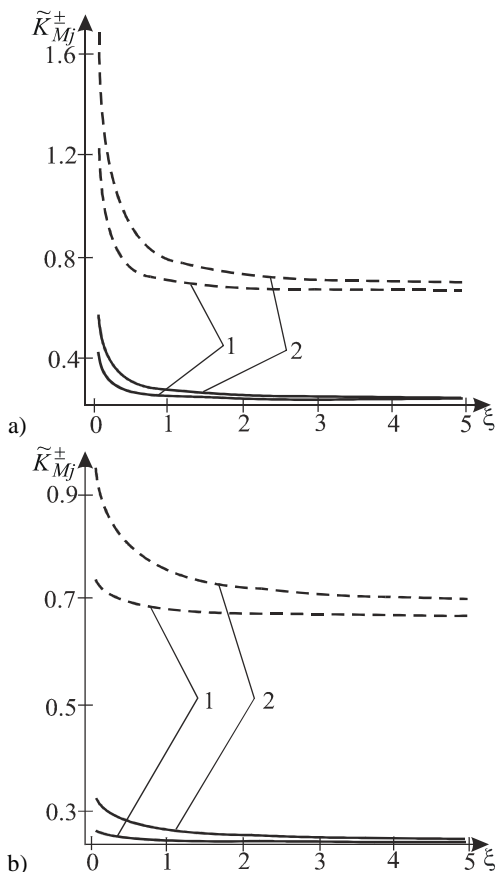
Dane dla Rys. 8 otrzymano przy $h/l_1 = 0,1$, $\eta = 0,1$, $\xi = 0,1$; krzywymi 1 odpowiada $\gamma = 0$, krzywymi 2 – $\gamma = 0,3$; krzywymi 3 – $\gamma = 0,5$. Widać, że zwiększenie szerokości γ strefy kontaktu zwiększa siły kontaktowe na końcach szczelin.



Rys. 9. Zależności bezwymiarowych WIM od h/l_1 dla różnych wartości względnej długości szczeliny η



Rys. 11. Zależności bezwymiarowych WIM od względnej długości η drugiej szczeliny



Rys. 10. Zależności bezwymiarowych WIM od względnej odległości ξ między szczelinami

Na podstawie Rys. 4 – 8 można wnioskować, że siły kontaktowe między brzegami szczelin będą większe w wewnętrznych względem układu wierzchołkach szczelin.

Na Rys. 9 – 11 pokazano zależności bezwymiarowych WIM \tilde{K}_{Mj}^{\pm} w bardziej bliskich (rysunki a) i oddalonych (rysunki b) wierzchołkach j -tej szczeliny. Na rysunkach tych krzywymi 1 odpowiadają WIM dla pierwszej szczeliny; a krzywymi 2 – WIM dla drugiej szczeliny. Liniami ciągłymi oznaczono wyniki otrzymane przy założeniu kontaktu brzegów, a liniami przerywanymi - z jego pominięciem.

Rys. 9 otrzymano został przy założeniu $\gamma = 0,1$ i $\zeta = 0,1$. Widać, że zwiększenie długości drugiej szczeliny zwiększa WIM szczeliny pierwszej i zmniejsza jej własny WIM. Oprócz tego uwzględnienie kontaktu brzegów szczelin prowadzi do dużego zmniejszenia WIM.

Rys. 10 odpowiada wartości parametrów $h/l_1 = 0,1$, $\eta = 0,5$. Wraz z oddalaniem szczelin od siebie WIM każdej z nich zmniejsza się i w granicy dąży do wartości, właściwej dla jednej izolowanej szczeliny w nieograniczonej tarczy.

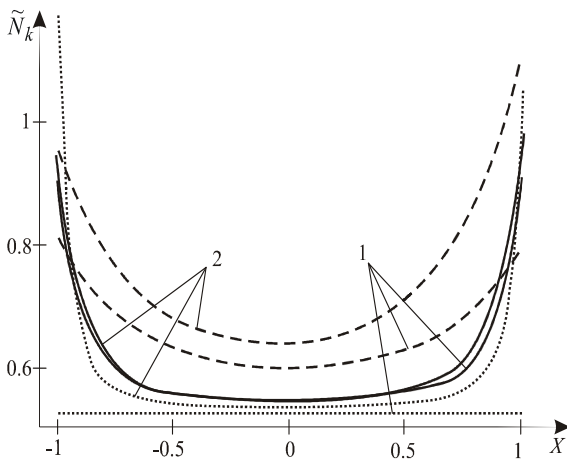
Rys. 11 otrzymano przy $\gamma = 0,1$; $h/l_1 = 0,1$; $\zeta = 0,5$ i zmiennej wartości η . Widać, że zmiana względnej długości drugiej szczeliny zwiększa WIM szczeliny pierwszej i zmniejsza WIM szczeliny drugiej, chociaż ostatnie pozostają zawsze większe od pierwszych.

W przypadku $\gamma = 0$ obliczenia prowadzą się do wyników podanych w pracy (Opanasovyc i Seliverstov, 2000), a w przypadku $\eta = 1$ – (Opanasovyc i Seliverstov, 2001).

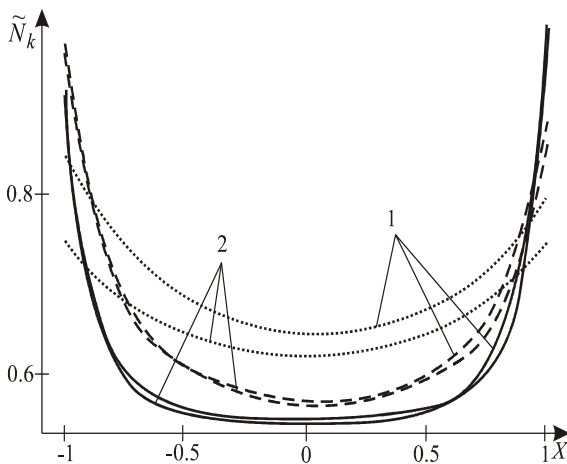
4.3. Przypadek trzech szczelin

Na Rys. 12–14 przedstawiono wyniki obliczeń dla przypadku trzech szczelin. Linie ciągłe odpowiadają pierwszej szczelinie, przerywane – drugiej, a linie kreskowo-kropkowe – trzeciej szczelinie.

Rys. 12–13 ilustrują zależności bezwymiarowych sił kontaktowych $\tilde{N}_k(X) = N_k h / M_y^\infty$ między brzegami k -tej szczeliny od bezwymiarowej współrzędnej X , $k = 1, 2, 3$. Rys. 12 otrzymano przy $\gamma = 0,1$; $h/l_1 = 0,1$; $\eta_1 = l_2/l_1 = 0,3$; $\xi_1 = d_1/l_1 = 2,3$; $\xi_2 = d_2/l_1 = 2,5$ dla równych długości trzeciej szczeliny. Krzywym 1 odpowiada wartość $\eta_2 = l_3/l_1 \rightarrow 0$, krzywym 2 – $\eta_2 = 2$. Widać, że zwiększenie η_2 powoduje zwiększenie sił kontaktowych na szczelinach (przy $\eta_2 \rightarrow 0$ otrzymuje się wyniki dla dwóch szczelin (patrz Rys. 6)).



Rys. 12. Zmiana bezwymiarowej siły kontaktowej dla różnych długości trzeciej szczeliny

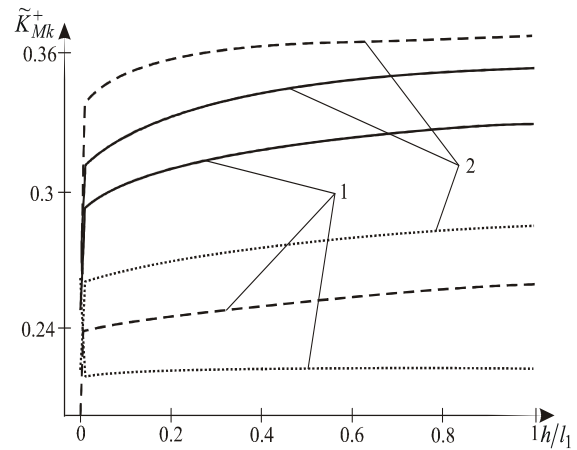


Rys. 13. Zmiana bezwymiarowej siły kontaktowej przy różnych odległościach środków drugiej i trzeciej szczelin

Rys. 13 otrzymany został przy $\gamma = 0,1$; $h/l_1 = 0,1$; $\eta_1 = 0,5$; $\eta_2 = 0,2$; $\xi_1 = 1,8$ i różnych odległościach środków drugiej i trzeciej szczeliny. Krzywym 1 odpowiada wartość $\xi_2 = 1$, krzywym 2 – wartość graniczna $\xi_2 \rightarrow \infty$. Zaprezentowane wyniki pozwalają wnioskować, że zwiększenie ξ_2

prowadzi do zmniejszenia sił kontaktowych na szczelinach. Analiza numeryczna wykazała, że oddalenie w nieskończoność trzeciej szczeliny prowadzi do wyników dla dwóch szczelin (patrz Rys. 6) oraz dla jednej wyodrębnionej szczeliny (patrz Rys. 2).

Na podstawie Rys. 12 i 13 można stwierdzić, że obecność trzeciej szczeliny wykazuje mały wpływ na wartość sił kontaktowych na pierwszej szczelinie.



Rys. 14. Zależności bezwymiarowych WIN od h/l_1 dla różnych wartości długości drugiej szczeliny

Rys. 14 odzwierciedla zależności bezwymiarowych WIM \tilde{K}_{Mk}^+ w wierzchołkach k -tej szczeliny przy następujących wartościach parametrów zagadnienia: $\gamma = 0,1$; $\eta_1 = 2$; $\xi_1 = 4$; $\xi_2 = 4,5$ przy czym, krzywym 1 odpowiada przypadek $\eta_2 \rightarrow 0$, krzywym 2 – $\eta_2 = 2$. Można stwierdzić, że zwiększenie długości drugiej szczeliny zwiększa WIM, a w przypadku granicznym $\eta_2 \rightarrow 0$ otrzymuje się wyniki numeryczne dla dwóch szczelin (patrz Rys. 9).

BIBLIOGRAFIA

1. Bereżnickij L. T., Delávskij M. V., Panasúk V. V. (1979) *Izhib tonkih plastin s defektami tipa trėšin*, Kiev.
2. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables* (1970), Ed. by M. Abramowitz and I. A. Stegun, Dover, New York.
3. Mazurak L. P., Bereżnickij L. T. (1990) *Izhib transversal'no-izotropnyh plastin s defektami tipa trėšin*, Nauk. dumka, Kiev.
4. Muskhelishvili N. I. (1977a) *Singular Integral Equations*, Berlin: Springer.
5. Muskhelishvili N. I., (1977b) *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Berlin: Springer.
6. Opanasovyč V. K. (2007) Zgyn plastyny z naskriznoú prámolinijnou trėšynoú z urahuvannám šyryny oblasti kontaktu ii poverhon', *Naukovi notatky Luc'kogo tehničnogo universytetu*, Vol. 20 (2), 123-127.
7. Opanasovyč V. K. (2001) Syngulárni integral'ni rivnánna zadači zgynu plastyny z trėšynoú za teoriéu Rajssnera, *Praci naukovogo tovarystva im. Ševčenko*, Tom VI, Materialoznavstvo i mehanika materialiv, L'viv, 120-125.

8. **Opanasovyč V. K., Delâvs'kyj M. V., Podhorecki A.** (1999) Novyj pidhid do rozrahunku napruženogo stanu plyty z trišynoū za teoriēu Rejssnera, *Mehanika rujnuvannâ materialiv i micnist' konstrukcij: v 3-h t.*, Pid zag. red. Panasūka V., Tom 2, Analityčni metody v mehanici rujnuvannâ materialiv, 186-189.
9. **Opanasovyč V. K., Novosad V. P., Seliverstov R. G.** (2002) Vrahuvannâ kontaktu beregiv trišyny pid čas zgyu transversal'no-izotropnoi plastyny, *Mehanika i fizyka rujnuvannâ budivel'nyh materialiv ta konstrukcij*, Zbirnyk naukovyh prac', Vol. 5, Za zag. red. O. Ê. Andrejkiva, J. J. Lučka, V. V. Božydarnyka, Kamenâr, L'viv, 148-153.
10. **Opanasovyč V. K., Seliverstov R. G.** (2001) Zgyn plyty z dvoma rivnymy prâmolinijnymy kolinearnymy trišynamy za teoriēu Rejssnera, *Fiz.-him. mehanika materialiv*, No 1, 53-56.
11. **Opanasovyč V. K., Seliverstov R. G.** (2000) Napruženyj stan plyty z dvoma prâmolinijnymy kolinearnymy trišynamy za teoriēu Rejssnera, *Visnyk L'viv. un-tu*, Ser. meh.-mat., Vol. 57, 124-127.
12. **Panasūk V. V., Savruk M. P., Dacyšyn A. P.** (1976) *Raspredeleniē naprâženij okolo trešin v plastinah i oboločkah*, Nauk. dumka, Kiēv.
13. **Prusov I. A.** (1975) *Metod soprâženâ v teorii plit*, Izd-vo Belorus. un-ta, Minsk.
14. **Savruk M. P.** (1981) *Dvumernyē zadači uprugosti dlâ tel s trešinami*, Nauk. dumka, Kiēv.
15. **Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.** (1959) *Theory of plates and shells*: 2d ed. New York : McGraw-Hill.
16. **Šac'kyj I. P.** (1990) Vzaimodejstviē kollinearnyh razrezov s kontaktiruišimi kromkami v izgibaēmoj pllastine, *Fiz.-him. mehanika materialov*, 70-75.
17. **Šac'kyj I. P.** (1988) Zgyn plastyny, oslablenoi rozrizom z kontaktuūčymy beregamy, *Dop. AN URSR, Ser. A. Fiz.-mat. ta tehn. nauky*, No 7, 49-51.
18. **Šac'kyj I. P., Perepička V. V.** (1992) Zgyn napivneskinčenkoi plastyny, oslablenoi rozrizom z kontaktuūčymy beregamy, *Fiziko-himična mehanika materialiv*, Tom 28, No 2, 54-58.
19. **Šac'kyj I., Perepička V., Dalâk T., Šerbij A.** (2000) Zadači teorii plastyn ta obolonok iz vzaēmopov'âzanymy krajovymy umovamy na rozrizah, *Matem. problemy mehaniky neodnorodnyh struktur v 2-h t.*, T. 2, L'viv, 51-54.

BENDING OF REISSNER'S PLATE CONTAINING CRACKS WITH THE ACCOUNT OF THEIR FACES CONTACT ZONE WIDTH

Abstract: This paper considers the bending of unbounded isotropic plate loaded at infinity with uniformly distributed bending moments. The plate is weakened with three collinear cracks with traction-free faces. It is assumed that the crack faces are in a smooth contact on the top face of a plate along their length. The contact region for each crack has a constant height. Due to the contact of crack faces the solution of the problem is obtained as a superposition of two ones: plane stress problem and problem of Reissner plate bending. Basing on the complex variable method the system of singular integral equations is obtained. It is solved numerically using the mechanical quadrature technique. The analysis of numerical data is provided.

Pracę wykonano w ramach pracy statutowej S/WM/1/03 w Politechnice Białostockiej.