

## WSPÓŁCZYNNIKI INTENSYWNOŚCI NAPRĘŻEŃ W SZCZELINACH WYCHODZĄCYCH Z WIERZCHOŁKA KARBU V

Andrzej KAZBERUK\*

\*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

[a.kazberuk@pb.edu.pl](mailto:a.kazberuk@pb.edu.pl)

**Streszczenie:** Przedstawiono metodę obliczania współczynników intensywności naprężeń w szczelinach wychodzących z wierzchołka zaokrąglonego karbu V w nieskończonej, izotropowej, rozciąganej płaszczyźnie sprężystej. Wartości numeryczne współczynników intensywności naprężeń otrzymano dla dwóch podstawowych symetrycznych przypadków – pojedynczej szczeliny i układu dwóch równych szczelin. Przeprowadzono analizę wpływu wielkości promienia zaokrąglenia wierzchołka karbu V na obliczane współczynniki intensywności naprężeń szczelin. Uzyskane rozwiązanie asymptotyczne ma charakter ogólny – współczynniki intensywności naprężeń w szczelinach są wyrażone poprzez współczynnik intensywności naprężeń w wierzchołku karbu V – umożliwiając oszacowanie parametrów mechaniki pęknięcia w symetrycznych ciałach skończonych osłabionych rozrywanymi karami.

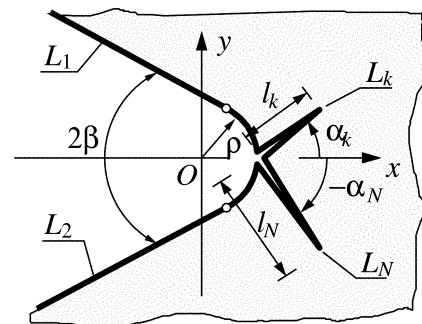
### 1. WPROWADZENIE

Problemy mechaniki pęknięcia dotyczące szczelin wychodzących z wierzchołka nieskończonego karbu w płaszczyźnie sprężystej, są często wykorzystywane jako asymptotyczne przybliżenia rozwiązań w obszarach skończonych. Model ten jest adekwatny, ponieważ długość tworzącej się szczeliny w procesie poprzedzającym pęknięcie jest mała w stosunku do pozostałych wymiarów ciała. Ponadto, znajomość współczynników intensywności naprężeń w wierzchołkach szczelin wychodzących z wierzchołka karbu, umożliwia rozwiązywanie zagadnień sprężysto-plastycznych mechaniki pęknięcia w ramach modelu pasm plastyczności (Panasiuk i in., 1975, Panasiuk i Savruk, 1992). Bardzo istotnym zagadnieniem przy tworzeniu kryteriów pęknięcia, jest również uwzględnienie wpływu zaokrąglenia wierzchołka karbu na wartości współczynników intensywności naprężeń w szczelinach wychodzących z jego wierzchołka (Leguillon i Yosibash, 2003).

Problemiowi rozkładu naprężeń w sprężystym klinie z symetryczną szczeliną w wierzchołku poświęcone są prace Doran'a (1969), Ouchterlony (1977), Smetanina (1993) i innych. Rozwiązanie uzyskiwano zazwyczaj używając transformacji Mellin'a i faktoryzacji Wiener'a-Hopf'a. Zamknięte, przybliżone rozwiązanie problemu ostrego karbu V z symetryczną szczeliną w wierzchołku uzyskali Savruk i Ritsar (1999) metodą osobliwych równań całkowych. Przyjmując obciążenie w postaci asymptotyki pola naprężeń, Savruk i Kazberuk (2006) otrzymali związek pomiędzy współczynnikiem koncentracji naprężeń w wierzchołku karbu zaokrąglonego i współczynnikiem intensywności naprężeń w wierzchołku odpowiedniego karbu ostrego. Wykorzystując zbliżone podejście można obliczyć współczynniki intensywności naprężeń dla układu szczelin wychodzących z wierzchołka zaokrąglonego karbu V podanego rozrywaniu.

### 2. UKŁAD SZCZELIN W WIERZCHOŁKU ZAOKRĄGLONEGO KARBU V

Rozważa się nieskończony, symetrycznie rozrywany karb typu V, wycięty w jednorodnej płaszczyźnie sprężystej. Karb ma ramiona proste rozwarne pod kątem  $2\beta$  ( $0 \leq 2\beta \leq \pi$ ) i wierzchołek zaokrąglony odcinkiem łuku kołowego o promieniu  $\rho$ . Z wierzchołka karbu wychodzą szczeliny o długościach  $l_k$ . Kąty nachylenia szczelin do osi  $Ox$  oznaczono  $\alpha_k$ . Stosunki promienia zaokrąglenia karbu do długości szczelin określają parametry  $\varepsilon_k = \rho/l_k$ .



Rys. 1. Szczeliny wychodzące z wierzchołka karbu zaokrąglonego

W pracy przyjęto za Sewerynem (1994) następującą definicję współczynnika intensywności naprężeń w wierzchołku karbu ostrego:

$$\tilde{K}_I^V = \lim_{r \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0} [(2\pi r)^\lambda \sigma_{\theta\theta}(r, \theta)],$$

gdzie  $\lambda$  jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem równania charakterystycznego (Williams 1952)

$$(1 - \lambda) \sin(2\alpha) + \sin(2\alpha(1 - \lambda)) = 0, \quad \alpha = \pi - \beta.$$

Zadanie rozwiązano metodą osobliwych równań całkowych (Savruk, 1981), przyjmując że kontur karbu modelują dwie zakrzywione szczeliny. Zespolone potencjały naprężeń Kolosova-Muskhelishvili (1966) zapisano w postaci superpozycji

$$\Phi_*(z) = \Phi_0(z) + \Phi(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_0(z) + \Psi(z).$$

Brzegi karbu są nieobciążone, a stan naprężeń w nieskończoności opisują następujące potencjały  $\Phi_0(z)$ ,  $\Psi_0(z)$  (Benthem 1987):

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= -\frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi z)^\lambda} \frac{\lambda-1}{A(\lambda)} \sin(2\alpha), \\ \Psi_0(z) &= -\frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi z)^\lambda} \frac{\lambda-1}{A(\lambda)} \sin(2\lambda\alpha), \end{aligned} \quad (1)$$

$$A(\lambda) = (\lambda-1)[(\lambda-2)\sin(2\alpha) + \sin(2\lambda\alpha)], \quad \alpha = \pi - \beta.$$

Nieznane zespolone potencjały  $\Phi(z)$ ,  $\Psi(z)$  opisują zaburzenie pola naprężeń wywołane obecnością karbu (kontury  $L_1+L_2$ ) oraz szczelin ( $L_k$ ,  $k=3, \dots, N$ ). Równowagę na konturach brzegowych określa warunek graniczny:

$$\begin{aligned} N(t) + iT(t) &= p(t) = \\ &= -\left\{ \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{dt}{dt} \left[ t \overline{\Phi_0'(t)} + \overline{\Psi_0(t)} \right] \right\}, \\ t \in L_k, \quad k &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2)$$

Poszukiwane potencjały naprężeń mają następujące przedstawienia całkowe (Savruk, 1981):

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{g'(t)}{t-z} dt, \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \left[ \frac{\overline{g'(t)}}{t-z} dt - \frac{\bar{t}g'(t)}{(t-z)^2} dt \right], \quad L = \bigcup_{k=1}^N L_k. \end{aligned}$$

Spełniając warunek graniczny (2), otrzymuje się osobliwe równanie całkowe (Savruk, 1981; Savruk i inni, 1989):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int \left[ K_{km}(t, t') g'(t) dt + L_{km}(t, t') \overline{g'(t)} dt \right] &= p(t'), \\ t' \in L_m, \quad m &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie

$$\begin{aligned} K_{km}(t, t') &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{t-t'} + \frac{\overline{dt'}}{dt' \bar{t}-\bar{t}'} \right], \\ L_{km}(t, t') &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\bar{t}-\bar{t}'} + \frac{\overline{dt'}}{dt' (\bar{t}-\bar{t}')^2} \right], \quad t \in L_k, \quad t' \in L_m. \end{aligned} \quad (4)$$

Uzyskanie rozwiązania równania (3) wymaga spełnienia warunku jednoznaczności przemieszczeń na konturach brzegowych (Savruk, 1981):

$$\int_L g'(t) dt = 0, \quad L = \bigcup_{k=1}^N L_k. \quad (5)$$

Można wykazać (Savruk i inni, 1989), że warunek (5) będzie automatycznie spełniony jeżeli jądra (4) równania całkowego (3) w punktach ( $t = l_k^-$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ) przecięcia konturów  $L_k$  przyjmą wartości zerowe. Uwzględniając tą właściwość, równanie (3) zapisano w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int \left[ K_{km}^*(t, t') g_k'(t) dt + L_{km}^*(t, t') \overline{g_k'(t)} dt \right] &= p(t'), \\ t' \in L_m, \quad m &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie

$$\begin{aligned} K_{km}^*(t, t') &= K_{km}(t, t') - K_{km}(l_k^-, t'), \\ L_{km}^*(t, t') &= L_{km}(t, t') - L_{km}(l_k^-, t'). \end{aligned} \quad (8)$$

Jak widać, dla  $t = l_k^-$  oba zmodyfikowane jądra (8) są równe zero

$$K_{km}^*(l_k^-, t') = L_{km}^*(l_k^-, t') = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Przyjmując promień zaokrąglenia wierzchołka karbu  $\rho$  jako podstawową jednostkę długości równania konturów brzegowych zapisuje się w postaci parametrycznej

$$t = \rho \omega_k(\xi), \quad t \in L_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad (9)$$

gdzie

$$\omega_1(\xi) = \exp(i\varphi(\xi)) \begin{cases} 1, & 0 \leq \varphi(\xi) \leq \varphi_B, \\ \operatorname{cosec}(\varphi(\xi) + \beta), & \varphi(\xi) > \varphi_B, \end{cases}$$

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2}(\xi+1)(\pi-\beta), \quad \varphi_B = \pi/2 - \beta,$$

$$\omega_2(\xi) = \overline{\omega_1(\xi)},$$

$$\omega_k(\xi) = 1 + \frac{1}{2\varepsilon_k}(\xi+1)\exp(i\alpha_k), \quad 0 \leq \alpha_k < \alpha.$$

Dokonując zamiany zmiennych (9), równanie całkowe (7) zapisuje się w formie kanonicznej

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \left[ M_{km}(\xi, \eta) g_k'(\xi) + N_{km}(\xi, \eta) \overline{g_k'(\xi)} \right] d\xi &= p_m(\eta), \\ -1 \leq \eta \leq 1, \quad m &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie

$$M_{km}(\xi, \eta) = \rho K_{km}^*(\rho\omega_k(\xi), \rho\omega_m(\eta)) = \rho [K_{km}(\rho\omega_k(\xi), \rho\omega_m(\eta)) - K_{km}(\rho\omega_k(-1), \rho\omega_m(\eta))]$$

$$N_{km}(\xi, \eta) = \rho L_{km}^*(\rho\omega_k(\xi), \rho\omega_m(\eta)) = \rho [L_{km}(\rho\omega_k(\xi), \rho\omega_m(\eta)) - L_{km}(\rho\omega_k(-1), \rho\omega_m(\eta))]$$

oraz

$$g'_k(\xi) = g'(\rho\omega_k(\xi))\omega'(\xi), \quad p_m(\eta) = p(\rho\omega_m(\eta)).$$

Uwzględniając zależność asymptotyczną (1), prawa strona równania (10) ma postać następującą:

$$p_m(\eta) = -\frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi\rho)^\lambda} \left[ \Phi_0(\omega_m(\eta)) + \overline{\Phi_0(\omega_m(\eta))} + \frac{\omega'_m(\eta)}{\omega_m(\eta)} \left[ \omega_m(\eta)\overline{\Phi'_0(\omega_m(\eta))} + \overline{\Psi_0(\omega_m(\eta))} \right] \right].$$

Rozwiązania osobliwego równania całkowego (10) poszukuje się w klasie funkcji nieograniczonych na brzegach (Savruk, 1981)

$$g'_k(\xi) = \frac{u_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

Stosując kwadraturę całkową Gauss'a-Chebyshev'a otrzymuje się układ algebraicznych równań liniowych będący dyskretnym analogiem równania całkowego (10)

$$\sum_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} [M_{km}(\xi_i, \eta_j) u_k(\xi_i) + N_{km}(\xi_i, \eta_j) \overline{u_k(\xi_i)}] \right\} = p_m(\eta_j)$$

$$m = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_k - 1,$$

$$\xi_i = \cos \frac{\pi(2i-1)}{2n_k}, \quad i = 1, \dots, n_k,$$

$$\eta_j = \cos \frac{\pi j}{n_k} \quad j = 1, \dots, n_k - 1.$$

Wynikowy układ  $\sum_{k=1}^N n_k - N$  równań liniowych uzupełnia się  $N$  równaniami wynikającymi z warunku

$$u_k(-1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

zerowania współczynników intensywności naprężeń w punktach przecięcia szczelin. Stosując interpolację Lagrange'a na węzłach Chebyshev'a, oblicza się wartości funkcji  $u_k(\xi)$  w dowolnych punktach  $\xi \neq \xi_i$ :

$$u_k(\xi) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (-1)^{i+1} u_k(\xi_i) \frac{T_{n_k}(\xi) \sqrt{1-\xi_i^2}}{\xi - \xi_i}. \quad (12)$$

W rezultacie, rozwiązywany jest następujący układ równań liniowych:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} [M_{km}(\xi_i, \eta_j) u_k(\xi_i) + N_{km}(\xi_i, \eta_j) \overline{u_k(\xi_i)}] \right\} = p_m(\eta_j), & j = 1, \dots, n_k - 1, \quad m = 1, 2, \dots, N, \\ \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (-1)^{i+n_k} \tan \frac{\pi(2i-1)}{4n_k} u_k(\xi_i) = 0, & k = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (13)$$

Współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołkach szczelin  $L_k$  ( $k=3, N$ ) obliczane są w sposób następujący (Savruk i inni 1989):

$$K_{I,k}(l_k^+) - iK_{II,k}(l_k^+) = -\lim_{t \rightarrow l_k^+} \sqrt{2\pi|t - l_k^+|} g_{k'}(t) = (F_I - iF_{II}) \tilde{K}_I^V(\pi l_k)^{1/2-\lambda}, \quad t \in L_k, \quad k = 3, \dots, N \quad (14)$$

gdzie bezwymiarowe współczynniki intensywności naprężeń  $F_I$  i  $F_{II}$  obliczane są ze wzoru (Savruk 1981):

$$F_I - iF_{II} = -\frac{1}{2^\lambda} \sqrt{|\omega'_k(+1)|} \frac{u_k(+1)}{\omega'_k(+1)}.$$

Wartości funkcji  $u_k(+1)$  w wierzchołkach szczelin obliczane są ze wzoru

$$u_k(+1) = -\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (-1)^i u_k(\xi_i) \cot \frac{\pi(2i-1)}{4n_k}.$$

wynikające z ogólnej zależności (12).

### 3. POJEDYNCZA SYMETRYCZNA SZCZELINA W WIERZCHOŁKU KARBU

Przyjmując  $N = 3$ ,  $\alpha_3 = 0$  i  $l_3 = l$  otrzymuje się symetryczny układ karbu z pojedynczą szczeliną w wierzchołku. Symetria układu i obciążenia względem osi  $Ox$  implikuje następujące zależności (Savruk i inni 1989):

$$u_2(\xi_i) = \overline{u_1(\xi_i)}, \quad n_1 = n_2, \quad i = 1, \dots, n_2, \\ \text{Im } u_3(\xi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n_3,$$

i pozwala na dwukrotną redukcję rzędu rozwiązywanego układu równań.

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla kątów rozwarcia karbu w przedziale  $5^\circ \leq 2\beta \leq 175^\circ$ . Względny promień krzywizny wierzchołka zmieniano w zakresie  $0,001 \leq \varepsilon = \rho/l \leq 1000$ . Uzyskane wartości bezwymiaro-

wych współczynników intensywności naprężeń przedstawiono na rys. 2a. Dla karbu ostrego ( $\varepsilon=0$ ) wartości współczynników intensywności naprężeń obliczono modyfikując równania parametryczne krzywych  $L_1$  i  $L_2$  opisujących kontur karbu  $t = l\omega_k(\xi)$ ,  $k = 1, 2$ ,

$$\omega_1(\xi) = -\frac{1+\xi}{1-\xi} \exp(-i\beta), \quad \omega_2(\xi) = \overline{\omega_1(\xi)}, \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

Jak można zauważyć, krzywe na rys. 2a szybko osiągają wartości asymptotyczne. Dla  $\varepsilon < 1$ , tzn. gdy długość szczeliny jest większa od promienia zaokrąglenia wierzchołka karbu, obliczone wartości współczynników intensywności naprężeń są bliskie wartościom otrzymywanym dla szczelin w wierzchołku odpowiedniego karbu ostrego.

Jak należało się spodziewać dla  $2\beta \rightarrow 0$ , karb przechodzi w szczelinę i obliczony współczynnik intensywności naprężeń  $F_I \rightarrow 1$ . Przy  $2\beta \rightarrow \pi$  ramiona karbu tworzą krawędź półpłaszczyzny i wówczas współczynnik intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny osiąga dobrze znaną wartość  $F_I \rightarrow 1,1215$  (patrz np. Savruk, 1988).

Obliczone wartości  $F_I(\beta)$  porównano z zależnością aproksymacyjną uzyskaną na drodze analitycznej (Savruk, Ritsar 1999):

$$F_I = \frac{2^{1/2-\lambda} \Gamma((1-\lambda)/c)}{\sqrt{\pi c} \Gamma((1-\lambda)/c + 0,5)},$$

$$c = \frac{\pi}{2} \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}, \quad \alpha = \pi - \beta. \quad (15)$$

Maksymalna różnica porównywanych wielkości  $F_I$  obliczonych numerycznie i przybliżonych zależnością (15) wystąpiła dla  $\beta \approx 70^\circ$  nie przekraczając 1%.

Obliczone, asymptotyczne wartości współczynników intensywności naprężeń w szczelinach zlokalizowanych w wierzchołku nieskończonego karbu V mogą posłużyć do oszacowania współczynnika intensywności naprężeń dla szczeliny wychodzącej z wierzchołka karbu o skończonej głębokości. Na przykład współczynnik intensywności naprężeń dla szczeliny w wierzchołku ostrego karbu o kącie rozwarcia  $2\beta = \pi/3$  wyciętego w krawędzi półpłaszczyzny jest równy (Savruk 1988):

$$\tilde{K}_I^V = 1,186\sqrt{\pi}pd^\lambda = 1,203p(\pi d)^\lambda,$$

gdzie  $d$  jest głębokością karbu a wykładnik osobliwości naprężeń jest równy  $\lambda=0,4878$ . Obliczona, asymptotyczna wartość współczynnika intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny zlokalizowanej w wierzchołku karbu nieskończonego wynosi  $F_I = 1,000$ . Zatem szacunkowa wartość współczynnika intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny jest równa:

$$K_I = F_I \tilde{K}_I^V (\pi l)^{1/2-\lambda} = 1,203(l/d)^{-\lambda} F_I p\sqrt{\pi l} = F_I^* p\sqrt{\pi l}. \quad (16)$$

Wartości bezwymiarowych współczynników  $F_I^*$  obliczono dla różnych stosunków  $l/d$  długości szczeliny do głębokości karbu i zestawiono w tab. 1.

Dla szczelin o niewielkiej długości (w porównaniu z głębokością karbu), względny błąd oszacowania (16) wynosi ok. 2%. Dla szczelin o większej długości, błąd oszacowania narasta asymptotycznie. Podobne wyniki otrzymano porównując dane i oszacowane wartości współczynników intensywności naprężeń dla szczeliny wychodzącej z wierzchołka karbu zaokrąglonego wyciętego w rozciąganej półpłaszczyźnie [15]. Dla stałej względnej długości szczeliny  $l/d = 0,1$  wyrażenie (16) przyjmuje postać:

$$K_I = 3,699F_I p\sqrt{\pi l} = F_I^* p\sqrt{\pi l} \quad (17)$$

**Tab. 1.** Porównanie współczynników intensywności naprężeń oszacowanych ze wzoru (16) i opublikowanych przez Hasebe and Iida (1978)

$l/d$	0,005	0,098	0,016	0,186	0,548
$F_I^*$	16,44	11,49	8,93	2,73	1,61
$F_I^{H,I}$	16,07	11,25	8,76	2,83	1,88
$\Delta F_I^* [\%]$	2,3	2,1	1,9	-3,4	-14,2

**Tab. 2.** Porównanie współczynników intensywności naprężeń oszacowanych ze wzoru (17) i opublikowanych Nisitani i Oda (Savruk, 1988)

$\varepsilon = \rho/l$	1,25	2,5	5,0	10,0
$\rho/d$	0,125	0,25	0,5	1,0
$F_I$	0,9679	0,9105	0,8008	0,5650
$F_I^*$	3,580	3,368	2,962	2,423
$F_I^{N,O}$	3,668	3,532	3,250	2,856
$\Delta F_I^* [\%]$	-2,4	-4,6	-8,9	-15,2

Jak pokazano w tab. 2, dla niewielkich wartości promienia zaokrąglenia wierzchołka karbu (w porównaniu z jego głębokością), błąd oszacowania (17) jest akceptowalny.

#### 4. DWIE SYMETRYCZNE SZCELINY W WIERZCHOŁKU KARBURU

Rozważa się dwie prostoliniowe szczeliny (kontury  $L_3$  i  $L_4$ ), symetryczne względem osi  $Ox$ , o równych długościach  $l_3 = l_4 = l$ , wychodzące z zaokrąglonego wierzchołka karbu V. Kąt jaki tworzą szczeliny oznaczono  $2\tilde{\alpha}$  (patrz schemat na rys. 3). Podobnie jak w poprzednim przykładzie,  $\varepsilon = \rho/l$  jest względnym promieniem zaokrąglenia wierzchołka karbu. Symetria układu oraz symetria obciążenia powoduje, że zachodzą następujące warunki:

$$u_2(\xi_i) = \overline{u_1(\xi_i)}, \quad n_1 = n_2, \quad i = 1, \dots, n_2,$$

$$u_4(\xi_i) = \overline{u_3(\xi_i)}, \quad n_3 = n_4, \quad i = 1, \dots, n_3. \quad (18)$$

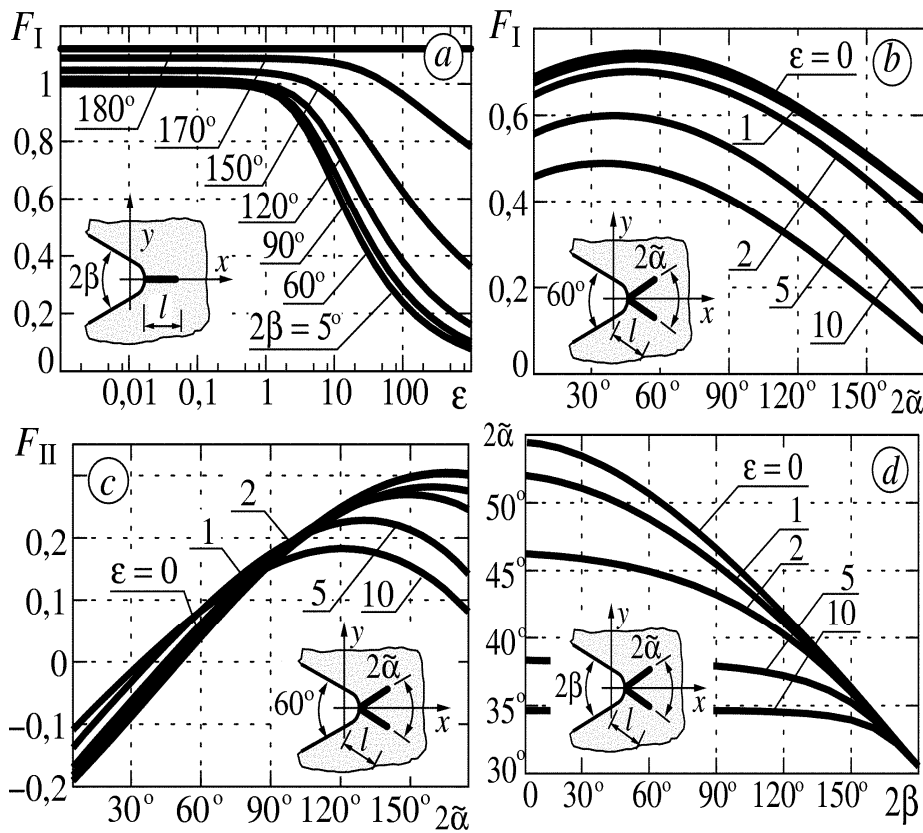
Podstawiając warunki (18) do (13), otrzymuje się wyni-  
kowy układ równań liniowych.

Obliczenia udało się przeprowadzić dla dowolnej kombinacji parametrów  $\beta$ ,  $\epsilon$ , i  $\tilde{\alpha}$  z przedziałów:  $5^\circ \leq 2\beta \leq 175^\circ$ ,  $0,001 \leq \epsilon \leq 100$ ,  $5^\circ \leq 2\tilde{\alpha} \leq 170^\circ$ . Otrzymane wartości bezwymiarowych współczynników intensywności naprężeń dla skrajnych wartości kąta rozwarcia karbu  $2\beta$  są zgodne z wynikami dla układu rozgałęzionych szczelin w nieograniczonej, rozciąganej płaszczyźnie  $2\beta \rightarrow 0$  oraz dla układu dwóch szczelin w krawędzi rozciąganej półpłaszczyzny  $2\beta \rightarrow \pi$  (patrz Savruk 1988).

Ze względu na dużą liczbę niezależnych parametrów zadania, prezentację wyników ograniczono do przypadków o znaczeniu praktycznym. Na rys. 2b,c przedstawiono zależność współczynników intensywności naprężeń dla szcze-

lin umieszczonych w wierzchołku karbu o kącie rozwarcia ramion  $2\beta=60^\circ$  od względnego promienia zaokrąglenia wierzchołka karbu. Podobnie jak w przypadku pojedynczej szczeliny, dla  $\epsilon < 1$  wpływ zaokrąglenia na obliczane współczynniki intensywności naprężeń jest niewielki, a otrzymywane wartości  $F_I$  i  $F_{II}$  są zbliżone do odpowiednich wartości dla karbu ostrego.

Dla pewnych wartości kąta  $2\tilde{\alpha}$  (rys. 2d) wartości współczynnika intensywności naprężeń  $F_I$  osiągają maksimum. Wartości te otrzymano rozwiązując równanie nieliniowe  $K_{II}(\tilde{\alpha}) = 0$  (dla kątów rozwarcia karbu z przedziału  $5^\circ \leq 2\beta \leq 180^\circ$ ) metodą siecznych.



Rys. 2. Bezwymiarowy współczynnik intensywności naprężeń  $F_I$  w wierzchołku pojedynczej szczeliny w funkcji względnego promienia zaokrąglenia karbu (a); bezwymiarowe współczynniki intensywności naprężeń  $F_I$  (b) i  $F_{II}$  (c) dla symetrycznego układu szczelin, w funkcji kąta pomiędzy szczelinami  $2\tilde{\alpha}$  dla kąta rozwarcia karbu  $2\beta=60^\circ$ ; kąt  $2\tilde{\alpha}$  przy  $F_{I,max}$ ,  $F_{II}=0$  w zależności od kąta rozwarcia karbu  $2\beta$  (d)

## 5. WNIOSKI

Dokonano obliczeń współczynników intensywności naprężeń dla ważnego problemu mechaniki pękania. Otrzymane rozwiązanie asymptotyczne ma ogólny charakter – współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołkach szczelin są wyrażone poprzez współczynnik intensywności naprężeń w wierzchołku karbu V, z którego wychodzą. Jak pokazano, zależność ta może być wykorzystana do szacowania współczynników intensywności naprężeń

w wielu przypadkach szczególnych elementów z karami V poddanych symetrycznemu rozrywaniu

Zaprezentowano nową technikę metody osobliwych równań całkowych umożliwiającą efektywne rozwiązywanie zagadnień z układami przecinających się szczelin. Używając typowego sprzętu komputerowego, w krótkim czasie, obliczono z dużą dokładnością wartości współczynników intensywności naprężeń dla praktycznie pełnych zakresów zmienności parametrów geometrycznych zadania. Dane te mogą być podstawą opracowania wzorów aproksymacyjnych o charakterze inżynierskim.

## LITERATURA

STRESS INTENSITY FACTORS AT CRACK TIPS  
LOCATED AT ROUNDED V-NOTCH VERTEX

1. **Aleksandrov V.M., Smetanie B.I., Cobol' B.V.** (1993) *Tonkie koncentratory naprężenij v uprugih telah*, Nauka, Moskva.
2. **Bentham J.P.** (1987) Stresses in the region of rounded corners, *International Journal of Solids and Structures*, 23(2), 239 – 252.
3. **Doran H.E.** (1969) The wedge with a symmetrical crack at the vertex in plane elastostatics, *J. Inst. Maths Applics.*, 5(4), 363-372.
4. **Hasebe N., Iida J.** (1978) A crack originating from triangular notch on a rim of semi-infinite plate, *Eng. Fract. Mech.*, 13(7), 773-782,.
5. **Leguillon D., Yosibash Z.** (2003) Crack onset at a v-notch. Influence of the notch tip radius, *Int. J. Fract.* 122, 1-21.
6. **Muskhelišvili N. I.** (1966) *Nekotorye osnovnye zadaci matematičeskoj teorii uprugosti*, Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR, 5 edn.
7. **Ouchterlony F.** (1977) Symmetric cracking of wedge by concentrated loads, *Int. J. Eng. Sci.*, 15(2), 109-116.
8. **Panasyuk V.V., Savruk M.P.** (1992) Plastic strips model in elastic-plastic problems of fracture mechanics, *Advances in Mechanics*. 15(3-4), 123–147.
9. **Panasyuk V.V., Vitvitskii P.M., Yarema S.Ya.** (1975) Plastic deformation around crack and fracture criteria, *Eng. Fract. Mech.*, 7(2), 305-319.
10. **Savruk M. P., Kazberuk A.** (2007) *A unified approach to problems of stress concentration near V-shaped notches with sharp and rounded tip.*, 43(2), 182-196.
11. **Savruk M. P.** (1981) *Dvumernye zadaci uprugosti dla tel s trešinami*, Naukova Dumka, Kiev.
12. **Savruk M. P.** (1988) *Koëfficienty intensivnosti naprężenij v telah s trešinami*, vol. 2 of *Mehanika razrušeniâ i pročnosť materialov: Sprav. posobie pod red. V.V. Panasûka*, Naukova Dumka, Kiev.
13. **Savruk M. P., Osiv P. N., Prokopčuk I. V.** (1989) *Čislennyj analiz v ploskih zadacah teorii trešin*, Naukova Dumka, Kiev.
14. **Savruk M. P., Ricar R.B.** (1999) Zamknij nablizenij rozvâzok ploskoi teorii pryžnosti dla klina s simetričnoû trešinoû, *Mehanika rujnuvannâ materialiv i konstrukcij (vip. 2)*, v z-t pid red. V.V. Panasûka –Lviv, Kamenar, 2, 125-128.
15. **Savruk M.P., Kazberuk A.** (2006) Relationship between the stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded notches, *Materials Science*, 42(6), 725-738.
16. **Seweryn A.** (1994) Brittle fracture criterion for structures with sharp notches. *Engineering Fracture Mechanics*, 47, 673 – 681.
17. **Williams M.L.** (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, *J. Appl. Mech.*, 19(4), 526-530.

**Abstract:** The problem of the stress intensity factors for system of cracks emanating from infinite rounded V-notch apex subjected to tearing load was solved. Numerical values was obtained for two most important symmetrical cases – the single crack and the system of two cracks of equal length. The influence of the notch apex rounding radius on the stress intensity factors at crack tips was analyzed. The asymptotic solution which was obtained has general nature – stress concentration factors at the crack tip are expressed as a function of V-notch stress intensity factor, so this relationship could be applied to estimate essential fracture mechanics parameters in the wide range of particular symmetrical problems of fracture of V-notched structural elements subjected to tearing loads.