

EFEKTY NAPRĘŻENIOWE, DEFORMACYJNE I ENERGETYCZNE W OKOLICY WIERZCHOŁKOWEJ SZCZELINY Z PODWÓJNYM SYMETRYCZNYM ODGAŁĘZIENIEM

Tomasz BOGUSZEWSKI*, Krzysztof MOLSKI*

*Katedra Budowy i Eksploatacji Maszyn, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

tboguszewski@doktoranci.pb.edu.pl, kmolski@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy analizowano pola naprężeń i względne przemieszczenia brzegów niewielkich symetrycznych pęknięć powstałych w wierzchołku płaskiej szczeliny pod pewnym kątem do jej płaszczyzny. Zaproponowano analityczno-numeryczną metodę wyznaczania uogólnionej wartości współczynnika uwalniania energii G . Dla płaskiego i antypłaskiego stanu odkształcenia wyznaczono względne przemieszczenia brzegów odgałęzionych szczelin w zależności od kierunku nachylenia odgałęzionego pęknięcia i rodzaju obciążenia zewnętrznego. W obliczeniach wykorzystano metodę elementów skończonych *MES*. Względne rozwarcie brzegów odgałęzień szczeliny opisano odpowiednimi funkcjami uwzględniającymi charakter osobliwości pola naprężeń w okolicy wierzchołkowej umożliwiającymi obliczenie współczynników G .

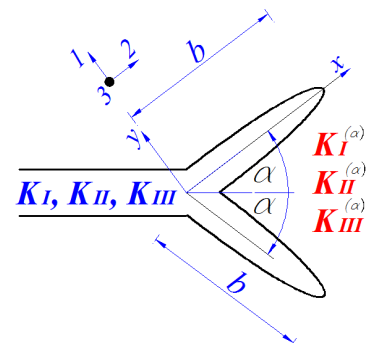
1. WPROWADZENIE

Bliższe badania wielu przyczyn uszkodzeń elementów konstrukcyjnych wskazują, że jedną z najczęstszych przyczyn występowania awarii są pęknięcia i wady materiałowe – nieciągłości (szczeliny) wynikające z procesu technologicznego, oddziaływania obciążenia oraz środowiska. Rozwój tych wad do rozmiarów krytycznych jest główną przyczyną uruchomienia procesu pęknięcia i występowania złomu kruchego lub zmęczeniowego.

Teoretyczne kryteria inicjacji i propagacji szczelin są niezbędne do określenia trwałości i wytrzymałości konstrukcji przy danym obciążeniu. Problem ten jest szczególnie skomplikowany w przypadkach występowania złożonego stanu obciążenia, zwłaszcza zmiennego, gdzie potencjalna trajektoria pęknięcia jest krzywoliniowa i rozgałęziona. Obliczanie komponentów σ_{ij} pól naprężeń w okolicy wierzchołkowej pęknięcia jest ważnym elementem oceny wytrzymałości elementów konstrukcyjnych i nie stanowi problemu w sytuacji, gdy pęknięcie wzrasta stycznie do kierunku szczeliny głównej lub wtedy, gdy trajektoria szczeliny zmęczeniowej łagodnie się zakrzywia. Można wówczas zastosować znane rozwiązania analityczne opracowane przez Sneddon (1946) i Irwina (1957) wykorzystywane w liniowej mechanice pęknięcia. Wyznaczone w ten sposób wartości naprężeń i względnych przemieszczeń stanowią podstawę do wyznaczania wielkości charakterystycznych decydujących o prędkości pęknięcia, w tym energii uwalnianej w czasie propagacji pęknięcia. Ma ona istotne znaczenie przy formułowaniu kryteriów pęknięcia, zwłaszcza w złożonych stanach obciążeń.

W przypadku, gdy odgałęzione pęknięcie lub pęknięcia powstają pod pewnym kątem α do kierunku szczeliny głównej (Rys. 1), względne przemieszczenia brzegów nie są znane, a wartości współczynników intensywności naprężenia $K_I^{(\alpha)}$, $K_{II}^{(\alpha)}$ i $K_{III}^{(\alpha)}$ w otoczeniu wierzchołków powstałych szczelin mogą diametralnie odbiegać od ich odpowiedników K_I , K_{II} i K_{III} prawdziwych dla szczeliny głównej

bez odgałęzień. Zagadnieniom tym poświęcono wiele prac, jak np.: Palaniswamy i Knauss (1972), Husain i inni (1974), Chatterjee (1975), Wang (1978), Seweryn (2004), w których zaproponowano różne metody oszacowania pól przemieszczeń oraz zmian energii w zależności od kąta nadpęknięcia i obciążeń zewnętrznych.



Rys. 1. Niewielkie symetryczne pęknięcia o długości b powstałe pod kątem α do płaszczyzny szczeliny głównej oraz odpowiednie współczynniki intensywności naprężenia

2. CEL I ZAKRES PRACY

Celem pracy było wyznaczenie względnych przemieszczeń brzegów niewielkich symetrycznych szczelin powstałych w strefie wierzchołkowej szczeliny głównej. Umożliwiają one określenie wartości uwalnianej energii, której nie można wyznaczyć za pomocą znanych rozwiązań analitycznych. Rozpatrywano niewielkie symetryczne odgałęzienia o długości b powstałe w wierzchołku szczeliny głównej pod kątem α . Uwzględniono trzy niezależne przypadki obciążenia odniesione do płaszczyzny szczeliny głównej: dwuosiowe rozciąganie, ścinanie wzdłużne i ścinanie antypłaskie (poprzeczne). Wartości pól względnych przemieszczeń brzegów odgałęzienia wyznaczono metodą elementów skończonych – *MES*. Istotne są również zmiany

rozkładów pól naprężeń w okolicy wierzchołkowej szczeliny głównej spowodowane obecnością dwóch odgałęzień.

Zakres pracy obejmował:

- wybór geometrii pęknięcia i sposobu jego modelowania;
- dobranie odpowiedniej siatki elementów skończonych;
- obliczenie względnych przemieszczeń brzegów;
- aproksymację względnych przemieszczeń brzegów odgałęzionego pęknięcia odpowiednimi funkcjami uwzględniającymi charakter osobliwości pola naprężeń;
- obliczenie współczynnika G uwalniania energii;
- obliczenie pól naprężeń zredukowanych w okolicy wierzchołkowej w obecności dodatkowych odgałęzień.

3. MODEL NUMERYCZNY MES

Trzy płaskie prostokątne tarcze, przedstawione schematycznie na Rys. 2, opisano odpowiednio zagęszczoną siatką elementów skończonych (Rys. 3).

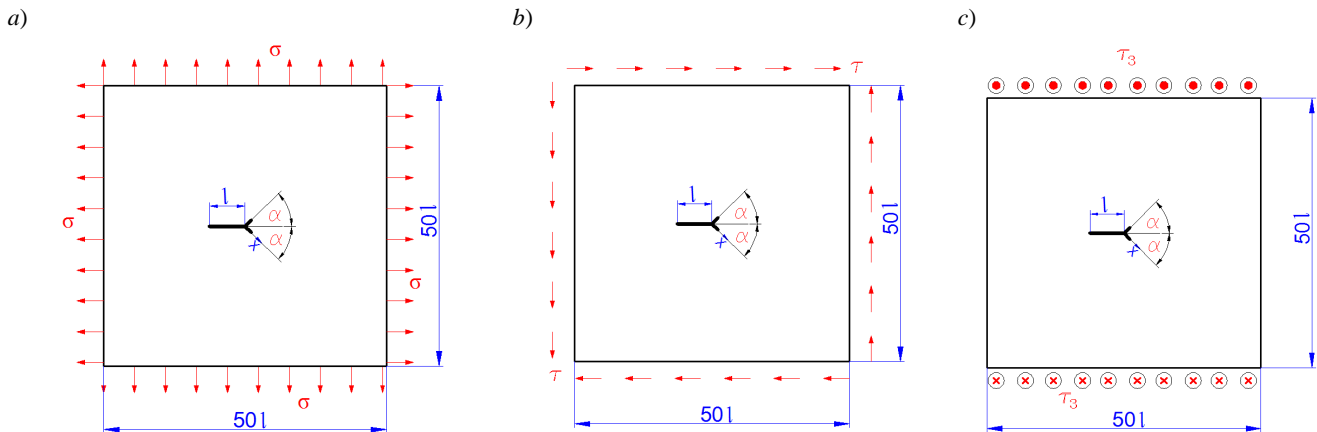
Przyjęto następujące obciążenia:

- dla rozciągania i ścinania wzdłużnego – jednorodne jednostkowe obciążenie nominalne, σ i τ , odniesione do płaszczyzny szczeliny głównej;

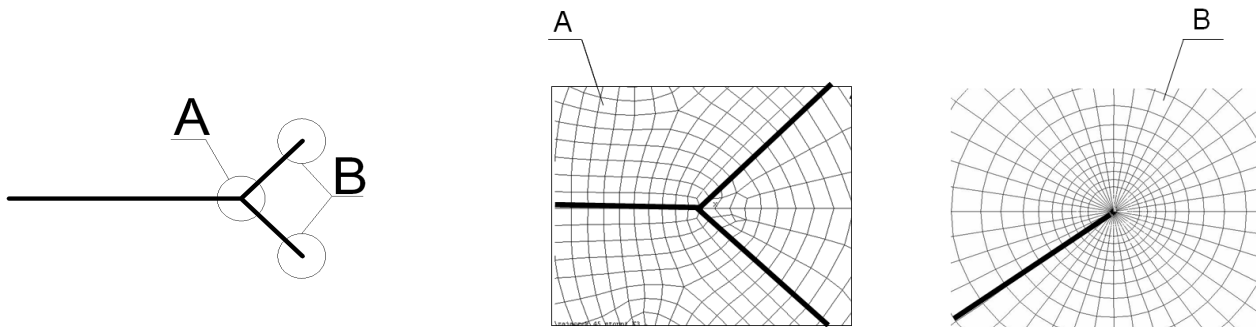
- dla ścinania poprzecznego (w antyplaskim stanie odkształcenia), jednorodne jednostkowe naprężenie styczne τ_3 skierowane prostopadle do płaszczyzny tarczy i również odniesione do płaszczyzny szczeliny głównej.

W rozpatrywanych przypadkach przyjęto jednostkową długość szczeliny głównej l oraz stosunek długości b/l równy 0,01 i 0,005, w celu sprawdzenia stabilności uzyskanego rozwiązania numerycznego. Względna zmiana długości odgałęzień nie spowodowała znaczących różnic pól naprężeń i przemieszczeń. Zmniejszając dwukrotnie długość odgałęzień, różnice wyników nie przekraczały 1%.

Zmieniano kąt α nachylenia odgałęzień w stosunku do szczeliny głównej w zakresie od 45^0 do 90^0 , co 15^0 . Do obliczeń wykorzystano program ANSYS. Dla przypadku rozciągania i ścinania wzdłużnego użyto ośmiowęzłowych elementów skończonych typu PLANE82 w płaskim stanie odkształcenia, natomiast dla przypadku ścinania poprzecznego – ośmiowęzłowego elementu PLANE77. Wierzchołki szczelin otoczono specjalnymi elementami trójkątnymi, o wielkości względnej rzędu 1% długości b , uwzględniającymi charakter osobliwości pola naprężeń typu $r^{-0,5}$, gdzie r oznacza odległość od wierzchołka szczeliny.



Rys. 2. Szczelina o długości l z niewielkim symetrycznym odgałęzieniem pod kątem α , w tarczy: a) rozciąganej, b) ścinanej wzdłużnie oraz c) ścinanej poprzecznie, gdzie obciążenia zewnętrzne odniesione są do płaszczyzny szczeliny głównej

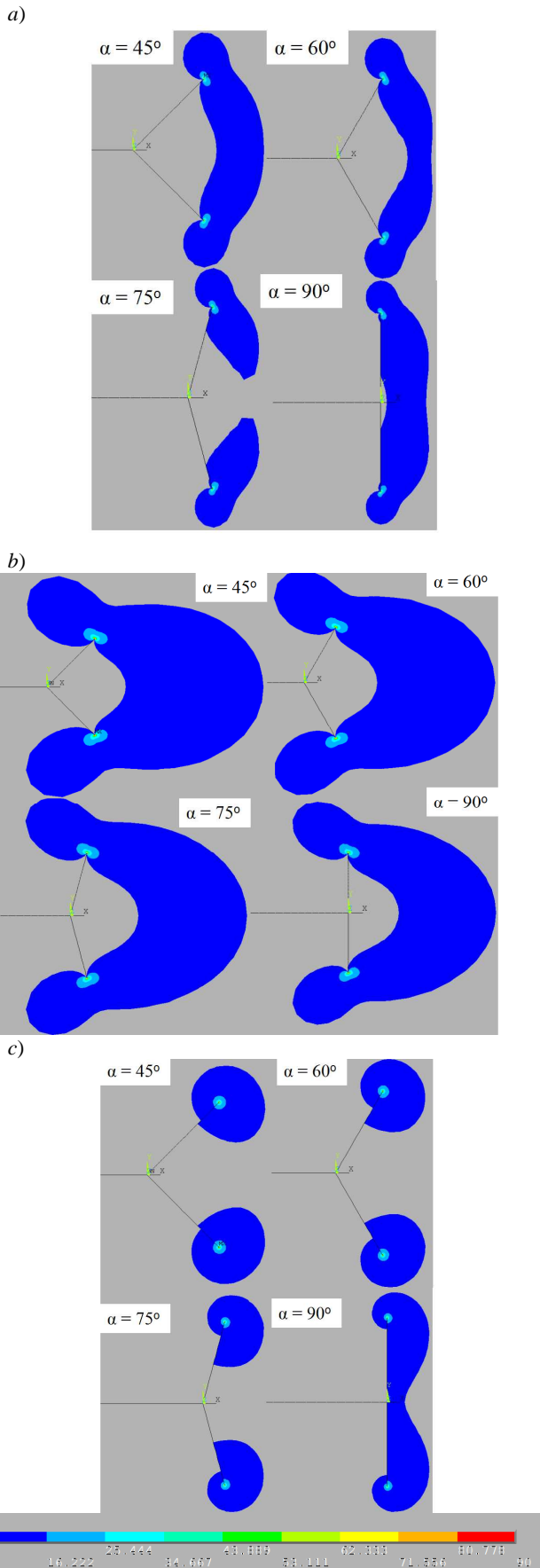


Rys. 3. Siatka elementów skończonych w okolicy rozwidlenia szczeliny A oraz wierzchołka symetrycznego odgałęzienia B.

4. POLA NAPRĘŻEŃ W STREFIE ODGAŁĘZIENIA

Na Rys. 4a i 4b przedstawiono mapy naprężeń zredukowanych według hipotezy H-M-H, a na rysunku 4c) pola naprężeń τ_{\max} w strefie odgałęzionych pęknięć dla trzech

przypadków obciążenia. Odpowiednie obciążenia nominalne przyłożone na odległych brzegach tarczy miały wartość jednostkową. Wyniki obliczeń numerycznych wskazują, że wielkość i kształt osobliwego pola naprężeń tworzącego się w strefie wierzchołkowej zależy od kąta α oraz rodzaju obciążenia.



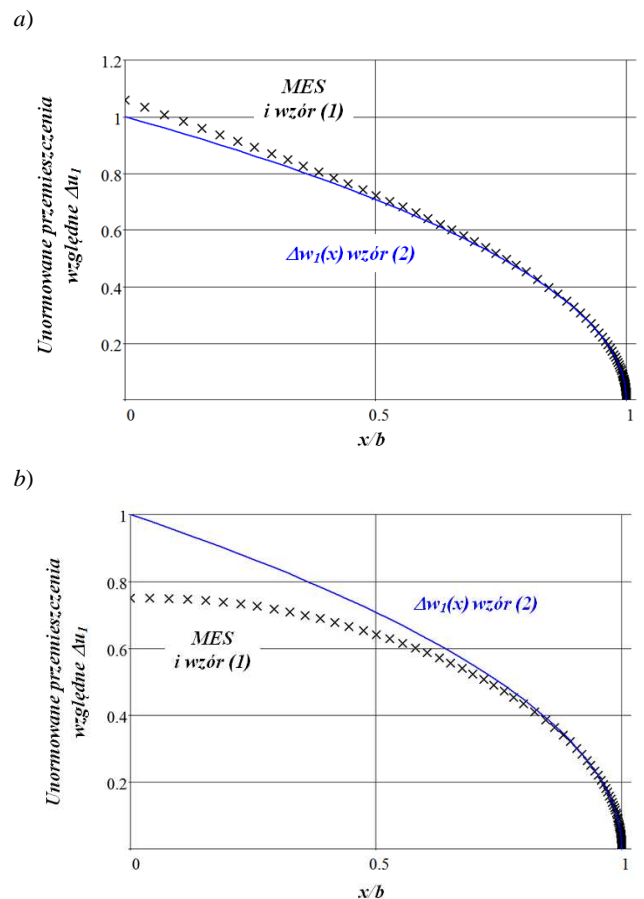
Rys. 4. Pola naprężeń zredukowanych według hipotezy H-M-H w okolicy odgałęzień dla: a) dwuosiowego rozciągania, b) ścinania wzdłużnego oraz wartości τ_{max} dla ścinania antypłaskiego c). Jednostkowe obciążenia nominalne odniesione do płaszczyzny szczeliny głównej

5. OPIS ANALITYCZNY ROZWARCIA SZCZELINY

Względne przemieszczenia brzegów odgałęzienia, uzyskane dla obciążeń wzdłużnych ($j=1$), poprzecznych ($j=2$) oraz prostopadłych do płaszczyzny tarczy ($j=3$), aproksymowano w każdym przypadku następującą funkcją:

$$\Delta u_j(x, \alpha) = (A_j \cdot x^3 + B_j \cdot x^2 + C_j \cdot x + D_j) \cdot \sqrt{b-x} \quad (1)$$

której współczynniki zależne od kąta α : $A_j(\alpha)$, $B_j(\alpha)$, $C_j(\alpha)$, $D_j(\alpha)$, dopasowywano za każdym razem metodą najmniejszych kwadratów do rozwiązania numerycznego MES. Przyjęta funkcja (1) uwzględnia charakter osobliwości związanej z wierzchołkiem odgałęzienia i opisuje odpowiednimi wielomianami wartości obliczonych przemieszczeń. Początek układu współrzędnych umieszczono w wierzchołku szczeliny głównej, a położenie wierzchołka odgałęzienia odpowiadało wartości b .



Rys. 5. Unormowane przemieszczenie względne brzegów odgałęzienia przy ścinaniu w płaszczyźnie szczeliny głównej: $\alpha=75^\circ$ - obliczenia według $K_I^{(a)}$ (Rys. 5a), $\alpha=90^\circ$ (Rys. 5b) - obliczenia według $K_{II}^{(a)}$, x – rozwiązanie MES, linia ciągła w wierzchołku odgałęzienia – obliczenia na podstawie wzoru (2)

W celu wyznaczenia zasięgu oddziaływania osobliwych pól naprężeń w okolicy wierzchołkowej dokonano, w każdym przypadku, aproksymacji względnych przemieszczeń obydwu brzegów odgałęzienia, wykorzystując znane klasyczne wzory na przemieszczenia względne w zależności

od lokalnego współczynnika $K_j^{(\omega)}$:

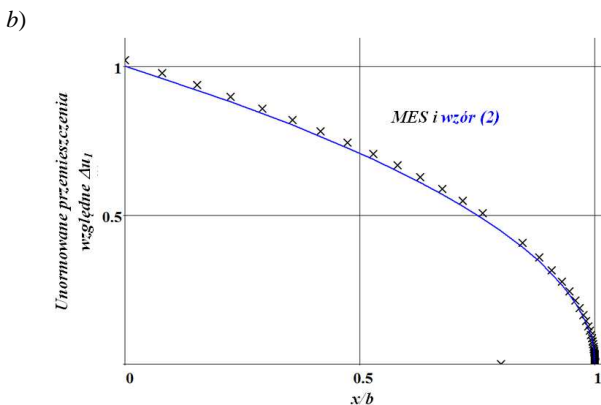
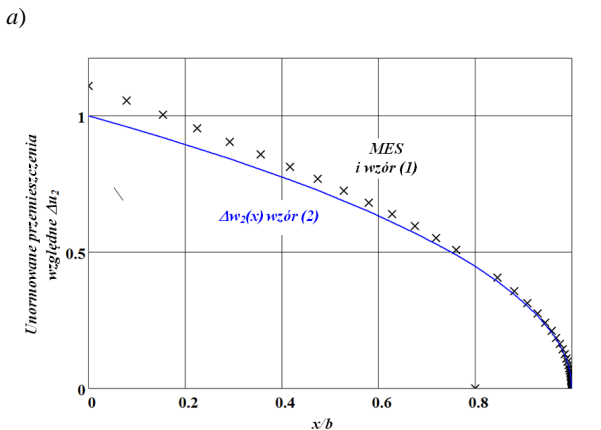
$$\Delta w_j(x, \alpha) = \frac{4\sqrt{2} \cdot (1 - \nu^2)}{\sqrt{\pi} \cdot E} \cdot K_j^{(\alpha)} \cdot \sqrt{b-x}, \text{ dla } j = 1, 2 \quad (2)$$

$$\Delta w_j(x, \alpha) = \frac{4\sqrt{2} \cdot (1 + \nu)}{\sqrt{\pi} \cdot E} \cdot K_j^{(\alpha)} \cdot \sqrt{b-x}, \text{ dla } j = 3$$

W celu umożliwienia porównania otrzymanych wyników *MES* z rozwiązaniem analitycznym ważnym w okolicy wierzchołkowej pojedynczej szczeliny (Ishida i Nishino, 1982; Tada i inni, 1973), wszystkie wyznaczone względne przemieszczenia brzegów małego odgałęzienia unormowano względem wartości N_j opisanych wzorami (3), które odpowiadają przemieszczeniom w *PSO* brzegów w odległości b za wierzchołkiem hipotetycznej szczeliny prostoliniowej o współczynniku intensywności naprężenia $K_j^{(\omega)}$.

$$N_j = \frac{4\sqrt{2} \cdot (1 - \nu^2)}{\sqrt{\pi} \cdot E} \cdot K_j^{(\alpha)} \cdot \sqrt{b}, \text{ dla } j = 1, 2 \quad (3)$$

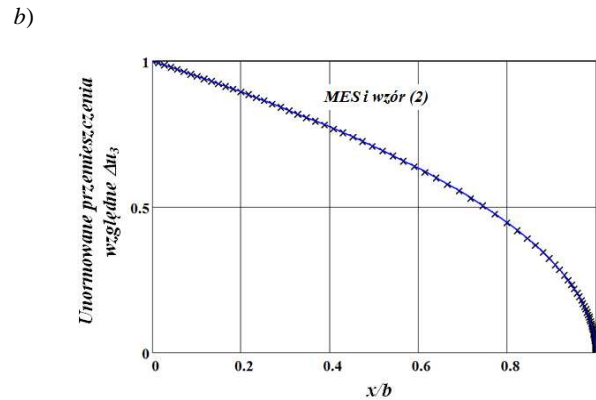
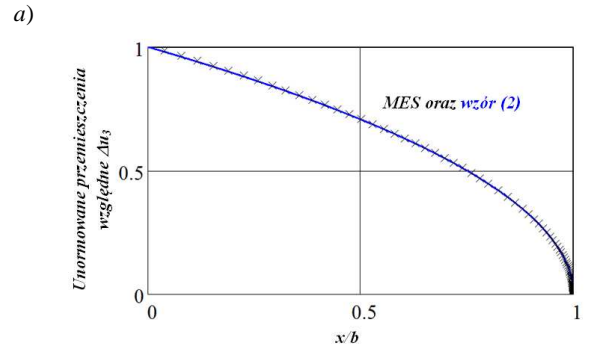
$$N_j = \frac{4\sqrt{2} \cdot (1 + \nu)}{\sqrt{\pi} \cdot E} \cdot K_j^{(\alpha)} \cdot \sqrt{b}, \text{ dla } j = 3$$



Rys. 6. Przemieszczenie względne brzegów odgałęzienia przy rozciąganiu w płaszczyźnie szczeliny głównej, $\alpha=75^\circ$, x – rozwiązanie *MES*. Linia ciągła: a) – obliczenia według $K_{II}^{(\alpha)}$ oraz b) według $K_I^{(\alpha)}$ na podstawie wzoru (2)

Na Rys. 5a przedstawiono unormowane przemieszczenia względne brzegów odgałęzienia w kierunku osi x dla kąta $\alpha=75^\circ$, przy jednostkowym obciążeniu ścinającym

w płaszczyźnie szczeliny głównej. Dla porównania zamieszczono hipotetyczne przemieszczenia obliczone według wzoru (2). Widoczne są znaczące różnice ilościowe i jakościowe między rozwiązaniem *MES* a rozwiązaniami wykorzystującymi lokalne czynniki osłabienia. W wyniku zastosowania wzoru (1) do opisu rozwarcia brzegów na całej długości nadpęknięcia otrzymano krzywe praktycznie pokrywające się z rozwiązaniem *MES*, których nie pokazano na Rys. 5 – 7 dla zachowania przejrzystości.



Rys. 7. Przemieszczenie względne brzegów odgałęzienia dla ścinania antypłaskiego: a) $\alpha=75^\circ$, b) $\alpha=90^\circ$, x – *MES*. Linia ciągła – obliczenia według $K_{III}^{(\alpha)}$, wzór (2)

Podobne porównanie przedstawiono na Rys. 5b) dla odgałęzienia pod kątem $\alpha=90^\circ$ i przy obciążeniu ścinającym τ w płaszczyźnie szczeliny głównej. Wybrane krzywe względnych przemieszczeń brzegów odgałęzionego pęknięcia przedstawiono również na Rys. 6 i 7.

Z przeprowadzonej analizy względnych przemieszczeń brzegów pęknięcia wynika, że zarówno kształt jak i wielkość rozwarcia zależą od kąta α oraz typu obciążenia, ponadto są one jakościowo odmienne od znanego rozwiązania opartego na teorii szczelin prostoliniowych.

Wyznaczenie wartości przemieszczeń brzegów w strefie początkowej odgałęzionego pęknięcia możliwe jest wyłącznie metodami numerycznymi, a wszelkie próby interpolacji, bez uwzględniania rozwiązania *MES*, mogą być obciążone poważnymi błędami.

6. WSPÓŁCZYNNIK UWALNIANIA ENERGII

Wielkość energii uwalnianej dla każdego z dwóch symetrycznych odgałęzień o długości b , wyrażonej współ-

czynnikiem G , wyznaczono z następującego wzoru:

$$G(\alpha) = \left| \begin{matrix} G_I(\alpha) + \\ G_{II}(\alpha) + \\ G_{III}(\alpha) \end{matrix} \right| = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cdot b} \left| \begin{matrix} \int_0^b \sigma_{\alpha\alpha}(x) \cdot \Delta u_1(x, \alpha) \cdot dx + \\ \int_0^b \tau_{xy}(x) \cdot \Delta u_2(x, \alpha) \cdot dx + \\ \int_0^b \tau_{yz}(x) \cdot \Delta u_3(x, \alpha) \cdot dx \end{matrix} \right| \quad (4)$$

gdzie: $\sigma_{\alpha\alpha}$, τ_{xy} , τ_{yz} – naprężenie normalne i styczne w płaszczyźnie odgałęzienia wynikające z rozwiązania analitycznego dla szczeliny głównej, Δu_j – względne przemieszczenia (wzdłużne lub poprzeczne) brzegów odgałęzienia obliczone MES i opisane wzorem (1), b – długość odgałęzienia.

Tab. 1. Unormowane wartości współczynników $G_I^*(\alpha)$ i $G_{II}^*(\alpha)$ dla rozciągania, obliczone proponowaną metodą oraz według lokalnych wartości współczynnika intensywności naprężeń $K_I^{(\alpha)}$ oraz $K_{II}^{(\alpha)}$

Dwuosiowe rozciąganie						
Kąt $\alpha [^\circ]$	Obecne rozwiązanie			Rozwiązanie według [8]		
	$G_I^*(\alpha)$	$G_{II}^*(\alpha)$	$G^*(\alpha)$	$G_{IPK}^*(\alpha)$	$G_{IIPK}^*(\alpha)$	$G_{PK}^*(\alpha)$
45	0,485	0,028	0,513	0,488	0,019	0,507
60	0,383	0,067	0,449	0,380	0,053	0,432
75	0,259	0,098	0,357	0,247	0,085	0,333
90	0,145	0,107	0,253	0,155	0,095	0,250

Tab. 2. Unormowane wartości współczynników $G_I^*(\alpha)$ i $G_{II}^*(\alpha)$ dla ścinania w płaszczyźnie szczeliny obliczone proponowaną metodą oraz według lokalnych wartości współczynnika intensywności naprężeń $K_I^{(\alpha)}$ oraz $K_{II}^{(\alpha)}$ (Seweryn, 2004)

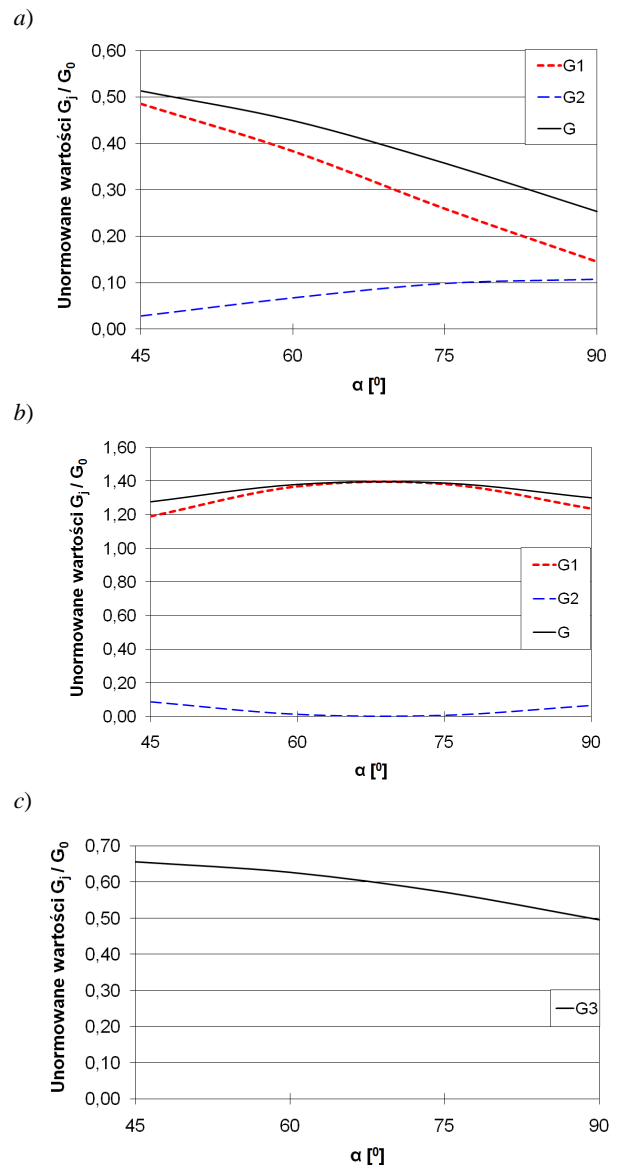
Ścinanie w płaszczyźnie szczeliny						
Kąt $\alpha [^\circ]$	Obecne rozwiązanie			Rozwiązanie według $K_I^{(\alpha)}$ oraz $K_{II}^{(\alpha)}$		
	$G_I^*(\alpha)$	$G_{II}^*(\alpha)$	$G^*(\alpha)$	$G_{IPK}^*(\alpha)$	$G_{IIPK}^*(\alpha)$	$G_{PK}^*(\alpha)$
45	1,191	0,086	1,277	1,324	0,008	1,332
60	1,369	0,012	1,381	1,338	0,008	1,347
75	1,383	0,006	1,389	1,342	0,006	1,348
90	1,237	0,065	1,302	1,187	0,055	1,243

Tab. 3. Unormowane wartości współczynników $G_{III}^*(\alpha)$ dla ścinania antyplaskiego obliczone proponowaną metodą oraz według lokalnych wartości współczynnika intensywności naprężeń $K_{III}^{(\alpha)}$ (Seweryn, 2004)

Ścinanie antyplaskie		
Kąt $\alpha [^\circ]$	Obecne rozwiązanie	Rozwiązanie według $K_{III}^{(\alpha)}$
	$G_{III}^*(\alpha)$	$G_{IIIPK}^*(\alpha)$
45	0,656	0,649
60	0,627	0,621
75	0,572	0,564
90	0,496	0,487

Wzór ten wyraża klasyczną definicję współczynnika uwalniania energii prawdziwą dla szczeliny prostoliniowej z tą różnicą, że obecnie wartości względnych przemieszczeń brzegów pęknięcia na długości b nie są znane. Zmiana x , (wzdłuż odgałęzienia) związana jest z lokalnym ukła-

dem współrzędnych (Rys. 1). Wartości naprężeń normalnych i stycznych, uwalnianych wzdłuż powierzchni odgałęzienia, są znane i zależą od wartości współczynników K_I , K_{II} i K_{III} szczeliny głównej, natomiast funkcje względnych przemieszczeń brzegów odgałęzienia nie są znane (oprócz kąta $\alpha=0$) i muszą być wyznaczone metodami numerycznymi. Zagadnienie to rozwiązano obecnie dla trzech niezależnych przypadków obciążenia zdefiniowanych wcześniej i przyłożonych dostatecznie daleko od szczeliny z symetrycznym odgałęzieniem. Unormowane wartości $G_j^*(\alpha)$ współczynnika $G(\alpha)$ dla odpowiednich obciążeń przedstawiono w Tab. 4, 5 i 6. Zostały one odpowiednio unormowane względem wartości $G_0(0)$, czyli dla prostej szczeliny głównej o długości $l+b$.



Rys. 8. Unormowane wartości energii uwalnianej $G_j(\alpha)$ dla a) rozciągania, b) ścinania wzdłużnego i c) ścinania poprzecznego

Dla porównania zamieszczono hipotetyczne wartości unormowane $G_{jPK}(\alpha)$ wyliczone według wzorów podanych w pracy Palaniswamy i Knaussa (1972) w oparciu o lokalne współczynniki intensywności naprężenia $K_I^{(\alpha)}$, $K_{II}^{(\alpha)}$ i $K_{III}^{(\alpha)}$.

Wyniki obliczeń unormowanych współczynników $G_I^*(\alpha)$, $G_{II}^*(\alpha)$ i $G_{III}^*(\alpha)$ przedstawiono na Rys. 8a – 8c.

Podobne zagadnienia dotyczące szczeliny głównej z pojedynczym odgałęzieniem przedstawiono w pracy Chatterjee (1975).

7. WNIOSKI

Na podstawie przeprowadzonej analizy numerycznej można stwierdzić, że kształt względnego rozwarcia brzegów każdego z symetrycznych odgałęzień odbiega pod względem jakościowym od kształtu rozwarcia okolicy wierzchołka szczeliny prostej. Dotyczy to przede wszystkim przypadków rozciągania i ścinania wzdłużnego, gdzie różnice między rozwarciem obliczonym z wykorzystaniem *MES* a wyznaczonym ze wzorów klasycznych z uwzględnieniem lokalnych wartości $K_I^{(a)}$ i $K_{II}^{(a)}$ zasadniczo się różnią. Natomiast w przypadku ścinania antypłaskiego różnice przemieszczeń i odpowiadających im energii $G_{III}(\alpha)$ są nieznaczne. W pracy analizowano kąt α w zakresie 45^0 - 90^0 , dla którego kształty rozwarcia odgałęzień są znacząco odmienne od przemieszczeń brzegów szczeliny prostoliniowej oraz odpowiadają kątom spotykanym w zagadnieniach praktycznych.

Zaproponowana metoda wyznaczania współczynnika $G(\alpha)$ umożliwi uogólnienie koncepcji współczynnika uwalniania energii w sytuacji powstawania podwójnego odgałęzienia w wierzchołku szczeliny głównej. Przeprowadzona analiza pozwala opisać ilościowo i jakościowo wartość energii uwalnianej w czasie powstawania takich odgałęzień, przy czym możliwe jest wyznaczenie nie tylko wartości całkowitej współczynnika uwalniania energii, ale również poszczególnych jego składników $G_I(\alpha)$, $G_{II}(\alpha)$ i $G_{III}(\alpha)$.

W przypadku rozciągania współczynnik $G_I(\alpha)$ maleje monotonicznie ze wzrostem kąta pęknięcia, natomiast współczynnik $G_{II}(\alpha)$ wzrasta wraz z narastaniem kąta α .

W przypadku ścinania wzdłużnego szczeliny głównej, maksimum uwalnianej energii odpowiada kątowi około 75 stopni.

Wartości $G_j(\alpha)$ obliczane metodą bezpośrednią, przez całkowanie iloczynu przemieszczeń i uwalnianych naprężeń, są zbliżone do ich odpowiedników obliczanych z lokalnych wartości współczynników intensywności naprężeń $K_j^{(a)}$ dla wierzchołka odgałęzienia.

LITERATURA

1. **Boguszewski T., Molski K.** (2008), Energetyczne aspekty wzrostu szczelin rozgałęzionych, *XVI Francusko-Polskie Seminarium Mechaniki*, Instytut PBM PW, Warszawa, 13-20.
2. **Boguszewski T., Molski K.** (2009), Efekty naprężeniowe, deformacyjne i energetyczne w okolicy wierzchołkowej szczeliny z pojedynczym odgałęzieniem, *Acta Mechanica et Automatica*, Vol. 3 No. 3, Politechnika Białostocka, Białystok, 9-15.
3. **Chatterjee S.N.** (1975) The stress field in the neighborhood of a branched crack in infinite elastic sheet, *Int. J. Solid Struct.*, 11.
4. **Husain M.A., Pu S.L., Underwood J.** (1974), *Strain energy release rate for a crack under combined Mode-I and II*, ASTM STP, 560, 2-28.
5. **Irwin G.R.** (1957), Analysis of stress and strains near the end of crack traversing a plate, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 24, 361-365.
6. **Ishida M., Nishino T.** (1982) Formulae of Stress Intensity Factor of Bent Cracks in Plane Problems, *Trans. Japan Soc. Mech. Engr.*, Vol 48-430, 729-738.
7. **Murakami Y.**, ed. (1987), *Stress Intensity Factors Handbook*, Sec. 7, *Nonlinear Shaped Cracks in an Infinite Plate*, Pergamon Press, 349-372.
8. **Palaniswamy K., Knauss E.G.** (1972), Propagation of a crack under general in-plane tension, *Int. J. Fract. Mech.*, 8, 114-117.
9. **Seweryn A.** (2004), *Modelowanie zagadnień kumulacji uszkodzeń i pęknięcia w złożonych stanach obciążeń*, Białystok, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, 2004.
10. **Sneddon I.N.** (1946), The distribution of stress in the neighborhood of crack in a elastic solid, *Proc. Roy Soc. London*, A 187, 229-260,
11. **Tada H., Paris P., Irwin G.R.** (1973), *The stress analysis of crack handbook*, Boston, Academic Press.

ANALYSIS OF STRESSES, COD AND ENERGY RELEASED RATE G FOR SYMMETRICALLY BRANCHING CRACKS

Abstract: Mutual interactions between two neighboring singular stress fields for symmetrically branching cracks are analyzed. Using the finite element method and ANSYS program, relative crack opening displacements and range of validity of the singular stress fields have been obtained. Some special functions were chosen for describing crack face opening and calculating the energy release rate G and its particular components. Numerical results made it possible to explain the influence and applicability of stress intensity factors for such cracks and show qualitatively additional effects and cracking conditions around the crack tip for plane and anti-plane crack problems.