

MODELOWANIE PAR KINEMATYCZNYCH MECHANIZMÓW Z ZASTOSOWANIEM ELEMENTÓW SPRĘŻYSTYCH

Krzysztof AUGUSTYNEK*

*Katedra Informatyki Stosowanej, Wydział Zarządzania i Informatyki, Akademia Techniczno-Humanistyczna,
ul. Willowa 2, 43-309 Bielsko-Biała

kaugustynek@ath.eu

Streszczenie: Mechanizmy są przykładami łańcuchów kinematycznych zamkniętych o strukturze drzewa. Zapis równań ruchu takich układów we współrzędnych złączowych, wymaga wcześniejszego myślowego rozcięcia łańcuchów zamkniętych i sformułowania równań więzów domykających. W rezultacie dynamika mechanizmu jest opisana układem równań różniczkowo-algebraicznych, które są trudne do rozwiązania. W pracy przedstawiono sposób, w którym oddziaływania między rozciętymi myślowo ciałami modelowane są z użyciem sprężyn o odpowiednio dobranych współczynnikach sztywności. Podejście takie eliminuje równania więzów domykających, dzięki czemu równania ruchu przyjmują postać równań różniczkowych zwyczajnych.

1. WSTĘP

Modelowanie mechanizmów we współrzędnych złączowych wymaga myślowego rozcięcia wszystkich łańcuchów zamkniętych (Harlecki, 2002). W rezultacie otrzymuje się zastępczy układ otwarty, którego ruch opisują współrzędne złączowe (Wittbrodt i inni, 2006). Dynamiczne równania ruchu mechanizmu otrzymuje się w wyniku połączenia równań ruchu układu zastępczego z równaniami więzów domykających rozciętych par kinematycznych. Stanowią one układ równań różniczkowo-algebraicznych o indeksie 3. Rozwiązywanie równań o tak wysokim indeksie jest trudne i najczęściej sprowadza się je do układu równań różniczkowych zwyczajnych przez wykonanie kolejnych różniczek równań więzów (Blajer, 1998; Harlecki, 2002). Podejście takie może prowadzić do naruszenia równań więzów oraz ich pierwszej pochodnej, co można zniwelować przez zastosowanie metod stabilizacji równań więzów np. metody Baumgarte'a, wzbogaconego sformułowania Lagrange'a czy też podejścia Brauna-Goldfarba (Blajer, 1998, 2011; Frączek, 2002).

Inny sposób modelowania rozciętych par kinematycznych polega na odbieraniu możliwości ruchu łączonym elementom przez zastosowanie układu sprężyn translacyjnych lub/i rotacyjnych o odpowiednio dużych współczynnikach sztywności (Adamiec-Wójcik i inni, 2008). Zaletą takiego podejścia jest mniejsza liczba równań opisujących ruch mechanizmu oraz brak niewiadomych sił oraz momentów reakcji, działających w rozciętych połączeniach. W pracy (Adamiec-Wójcik i inni, 2008) przedstawiono model zastępczy połączenia sferycznego, w którym deformacje elementów sprężystych określono w układzie bazowym. W niniejszej pracy przedstawione będą modele zastępcze połączeń: sferycznego, obrotowego, przesuwnego oraz cylindrycznego. Odkształcenia zastępczych elementów sprężystych wyznaczane będą w układzie lokalnym związanym z jednym z łączonych ciał.

2. OPIS RUCHU MECHANIZMU

W niniejszej pracy przyjęto, że mechanizm może być złożony z członów sztywnych lub podatnych, przy czym do dyskretyzacji członów podatnych stosowana jest metoda sztywnych elementów skończonych (Wittbrodt i inni, 2006). Na Rys. 1 przedstawiono mechanizm w postaci łańcucha kinematycznego o strukturze drzewa z pojedynczym łańcuchem zamkniętym. Łańcuch ten rozcięto myślowo w parze łączącej człon l oraz człon p . W szczególnym przypadku, gdy człony są podatne, rozcięta para łączy sztywne elementy skończone, na jakie je podzielono. W miejsce rozciętej pary wprowadzono siły oraz momenty reakcji określające oddziaływania zachodzące między łączonymi ciałami. W dalszych rozważaniach przyjęto, że oddziaływania te przekazywane są przez układ sprężyn translacyjnych oraz rotacyjnych o odpowiednio dobranych współczynnikach sztywności.

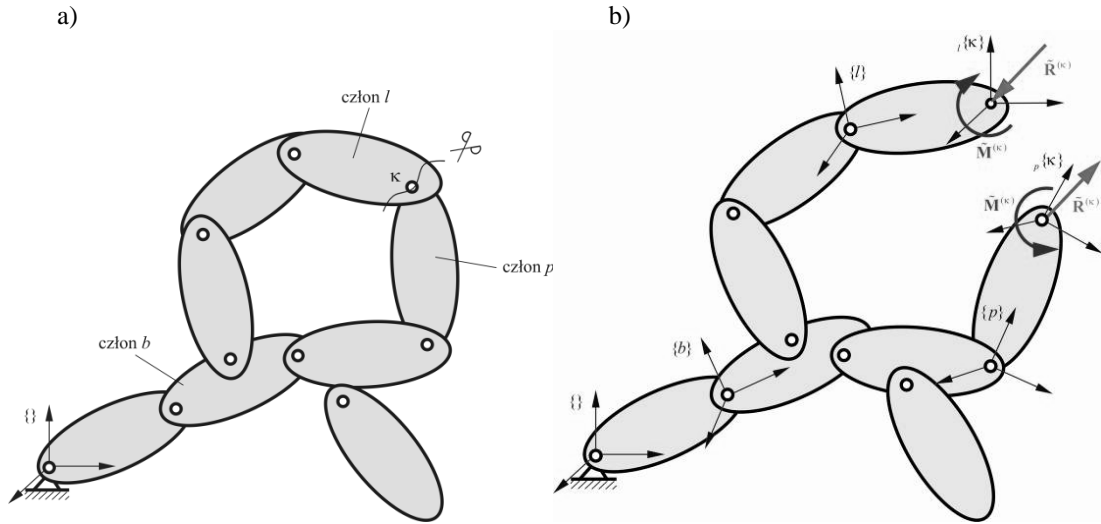
Współrzędne uogólnione opisujące ruch członów l oraz p względem podstawy można zapisać w postaci:

$$\mathbf{q}^{(l)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(b)} \\ \bar{\mathbf{q}}^{(l)} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{q}^{(p)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(b)} \\ \bar{\mathbf{q}}^{(p)} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

gdzie: $\bar{\mathbf{q}}^{(l)} = [\bar{q}_i^{(l)}]_{i=1, \dots, \bar{n}^{(l)}}$, $\bar{\mathbf{q}}^{(p)} = [\bar{q}_i^{(p)}]_{i=1, \dots, \bar{n}^{(p)}}$ – współrzędne określające ruch łączonych ciał względem członu b , $\mathbf{q}^{(b)} = [q_i^{(b)}]_{i=1, \dots, n^{(b)}}$ – wektor współrzędnych uogólnionych określających ruch ciała b względem podstawy.

Ruch członu bazowego b oraz ciał poprzedzających ten człon w łańcuchu kinematycznym jest wspólny dla obu łączonych ciał. Można wykazać, że siły działające w rozciętych połączeniach nie zależą od współrzędnych uogólnionych członu bazowego, lecz są zależne jedynie od współrzędnych uogólnionych opisujących ruch członów l oraz p względem członu bazowego.



Rys. 1. Przykładowy mechanizm przed (a) oraz po (b) rozcięciu łańcucha zamkniętego

Macierze transformacji z układów $\{l\}$ oraz $\{p\}$, związanych z członami l oraz p , do układu inercjalnego można wyrazić jako złożenie:

$$\mathbf{B}^{(l)} = \mathbf{B}^{(b)} \tilde{\mathbf{B}}^{(l)} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}^{(p)} = \mathbf{B}^{(b)} \tilde{\mathbf{B}}^{(p)} \quad (2.2)$$

gdzie: $\mathbf{B}^{(b)} = \mathbf{B}^{(b)}(\mathbf{q}^{(b)})$ - macierz transformacji z układu bazowego $\{b\}$ do układu inercjalnego $\{i\}$, $\tilde{\mathbf{B}}^{(l)} = \tilde{\mathbf{B}}^{(l)}(\tilde{\mathbf{q}}^{(l)})$, $\tilde{\mathbf{B}}^{(p)} = \tilde{\mathbf{B}}^{(p)}(\tilde{\mathbf{q}}^{(p)})$ - macierze określające położenie i orientację łączonych ciał względem układu $\{b\}$.

Z członami l oraz p związane dodatkowo układy ${}_l\{\kappa\}$ oraz ${}_p\{\kappa\}$ tak, aby ich początki znajdowały się w punkcie κ określającym połączenie. Macierze transformacji z tych układów do układu bazowego można zapisać w postaci:

$${}_l\tilde{\mathbf{B}}^{(\kappa)} = \tilde{\mathbf{B}}^{(l)} {}_l\mathbf{A}^{(\kappa)} \quad (3.1)$$

$${}_p\tilde{\mathbf{B}}^{(\kappa)} = \tilde{\mathbf{B}}^{(p)} {}_p\mathbf{A}^{(\kappa)} \quad (3.2)$$

gdzie ${}_l\mathbf{A}^{(\kappa)}$, ${}_p\mathbf{A}^{(\kappa)}$ są macierzami transformacji o stałych elementach. Macierze te określają położenie oraz orientację układów ${}_l\{\kappa\}$ oraz ${}_p\{\kappa\}$ względem układów lokalnych ciał, z którymi je związane.

3. MODEL ZASTĘPCZY POŁĄCZENIA SFERYCZNEGO

Na Rys. 2 przedstawiono przegub kulisty łączący ciała l oraz p . Przegub ten zastąpiono układem trzech sprężyn translacyjnych, z których każda działa w kierunku równoległym do osi układu ${}_l\{\kappa\}$.

Energię odkształcenia sprężystego układu zastępczego określa zależność:

$$V_s = \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)T} \mathbf{C}_T^{(\kappa)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)} \quad (4)$$

gdzie: $\Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)}$ – wektor określający położenie początku układu ${}_p\{\kappa\}$ względem układu ${}_l\{\kappa\}$, $\mathbf{I}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$, $\mathbf{C}_T^{(\kappa)}$ – macierz współczynników sztywności sprężyn translacyjnych,

$$\Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)} = \Phi {}_l\tilde{\mathbf{B}}^{(\kappa)-1} {}_p\tilde{\mathbf{B}}^{(\kappa)} \mathbf{I}_0, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ – ma-}$$

$$\text{cierz zwięzająca, } \mathbf{C}_T^{(\kappa)} = \begin{bmatrix} c_{T,x}^{(\kappa)} & 0 & 0 \\ 0 & c_{T,y}^{(\kappa)} & 0 \\ 0 & 0 & c_{T,z}^{(\kappa)} \end{bmatrix}.$$

Energia ta jest zależna tylko od współrzędnych opisujących ruch członów l oraz p względem członu bazowego. Pochodne z energii (4) względem współrzędnych uogólnionych można zapisać następująco:

$$\frac{\partial V_s}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(l)}} = {}_l\tilde{\mathbf{E}}^{(\kappa)T} \mathbf{C}_T^{(\kappa)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial V_s}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(p)}} = {}_p\tilde{\mathbf{E}}^{(\kappa)T} \mathbf{C}_T^{(\kappa)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)} \quad (5.2)$$

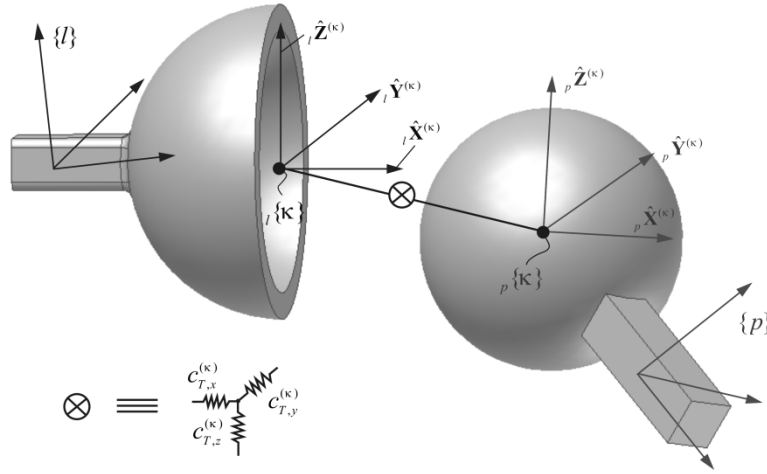
$$\text{gdzie: } {}_l\tilde{\mathbf{E}}^{(\kappa)} = \left[\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)}}{\partial \tilde{q}_\xi^{(l)}} \right]_{\xi=1, \dots, \tilde{n}^{(l)}}, \quad {}_p\tilde{\mathbf{E}}^{(\kappa)} = \left[\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(p)}} \right]_{\eta=1, \dots, \tilde{n}^{(p)}}$$

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)}}{\partial \tilde{q}_\xi^{(l)}} = \Phi {}_l\tilde{\mathbf{B}}_\xi^{(\kappa)-1} {}_p\tilde{\mathbf{B}}^{(\kappa)} \mathbf{I}_0, \quad \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(p)}} = \Phi {}_l\tilde{\mathbf{B}}^{(\kappa)} {}_p\tilde{\mathbf{B}}_\eta^{(\kappa)} \mathbf{I}_0.$$

Przy odpowiednio dużych współczynnikach sztywności sprężyn, człony l oraz p poruszają się ruchem zbliżonym do kulistego. Siły reakcji, działające w modelowanym połączeniu, można otrzymać po obliczeniu sił sprężystych zgodnie ze wzorem:

$$\tilde{\mathbf{R}}^{(\kappa)} = \mathbf{C}_T^{(\kappa)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)} \quad (6)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{R}}^{(\kappa)} = [\tilde{R}_x^{(\kappa)} \ \tilde{R}_y^{(\kappa)} \ \tilde{R}_z^{(\kappa)}]^T$ jest wektorem sił reakcji działających w przegubie kulistym.



Rys. 2. Model zastępczy połączenia sferycznego

4. MODEL ZASTĘPCZY POŁĄCZENIA OBROTOWEGO, POSTĘPOWEGO I CYLINDRYCZNEGO

W modelu zastępczym połączenia obrotowego, postępowego oraz cylindrycznego oprócz sprężyn translacyjnych występują sprężyny rotacyjne, odbierające możliwość względnego obrotu członów l oraz p . Całkowita energia potencjalna takiego połączenia jest sumą energii potencjalnej pochodzącej od deformacji sprężyn translacyjnych oraz rotacyjnych, co można zapisać następująco:

$$V_R^{(k)} = \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)T} \mathbf{C}_T^{(k)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)T} \mathbf{C}_R^{(k)} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)} \quad (6)$$

gdzie: $\Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)} = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)} \\ \Delta \tilde{\varphi}_y^{(k)} \\ \Delta \tilde{\varphi}_z^{(k)} \end{bmatrix}$, $\Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)}$, $\Delta \tilde{\varphi}_y^{(k)}$, $\Delta \tilde{\varphi}_z^{(k)}$ – kąty po-

między osiami ${}_l \hat{\mathbf{X}}^{(k)}$, ${}_l \hat{\mathbf{Y}}^{(k)}$, ${}_l \hat{\mathbf{Z}}^{(k)}$ układu ${}_l \{k\}$ a osiami ${}_p \hat{\mathbf{X}}^{(k)}$, ${}_p \hat{\mathbf{Y}}^{(k)}$, ${}_p \hat{\mathbf{Z}}^{(k)}$ układu ${}_p \{k\}$ (Rys. 3), $\mathbf{C}_R^{(k)}$ – macierz współczynników sztywności sprężyn rotacyjnych,

$$\mathbf{C}_R^{(k)} = \begin{bmatrix} c_{R,x}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & c_{R,y}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & c_{R,z}^{(k)} \end{bmatrix}, \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)}, \mathbf{C}_T^{(k)} - \text{zdefiniowane w (4)}.$$

Pochodne z energii (6) względem współrzędnych uogólnionych określają zależności:

$$\frac{\partial V_R^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(l)}} = \left[\frac{\Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(l)}} \right]^T \mathbf{C}_T^{(k)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} + \left[\frac{\Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(l)}} \right]^T \mathbf{C}_R^{(k)} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)} \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial V_R^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(p)}} = \left[\frac{\Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(p)}} \right]^T \mathbf{C}_T^{(k)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} + \left[\frac{\Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(p)}} \right]^T \mathbf{C}_R^{(k)} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)} \quad (7.2)$$

Dla elementów wektora $\Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)}$ zachodzą związki:

$${}_l \hat{\mathbf{X}}^{(k)T} {}_p \bar{\mathbf{X}}^{(k)} = \cos \Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)} \quad (8.1)$$

$${}_l \hat{\mathbf{Y}}^{(k)T} {}_p \bar{\mathbf{Y}}^{(k)} = \cos \Delta \tilde{\varphi}_y^{(k)} \quad (8.2)$$

$${}_l \hat{\mathbf{Z}}^{(k)T} {}_p \bar{\mathbf{Z}}^{(k)} = \cos \Delta \tilde{\varphi}_z^{(k)} \quad (8.3)$$

gdzie: ${}_l \hat{\mathbf{X}}^{(k)} = {}_p \hat{\mathbf{X}}^{(k)} = [1 \ 0 \ 0]^T$, ${}_l \hat{\mathbf{Y}}^{(k)} = {}_p \hat{\mathbf{Y}}^{(k)} = [0 \ 1 \ 0]^T$, ${}_l \hat{\mathbf{Z}}^{(k)} = {}_p \hat{\mathbf{Z}}^{(k)} = [0 \ 0 \ 1]^T$, ${}_p \bar{\mathbf{X}}^{(k)} = {}_l \mathbf{R}^{(k)} {}_p \hat{\mathbf{X}}^{(k)}$, ${}_p \bar{\mathbf{Y}}^{(k)} = {}_l \mathbf{R}^{(k)} {}_p \hat{\mathbf{Y}}^{(k)}$, ${}_p \bar{\mathbf{Z}}^{(k)} = {}_l \mathbf{R}^{(k)} {}_p \hat{\mathbf{Z}}^{(k)}$, ${}_l \mathbf{R}^{(k)}$ – macierz rotacji z układu ${}_p \{k\}$ do układu ${}_l \{k\}$.

Biorąc pod uwagę, że:

$${}_l \mathbf{R}^{(k)} = {}_l \bar{\mathbf{R}}^{(k)T} {}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)} \quad (9)$$

gdzie ${}_l \bar{\mathbf{R}}^{(k)}$, ${}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)}$ są macierzami rotacji występującymi w macierzach transformacji ${}_l \bar{\mathbf{B}}^{(k)}$, ${}_p \bar{\mathbf{B}}^{(k)}$, oraz wykonując odpowiednie przekształcenia można napisać:

$$({}_l \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_1^T ({}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_1 = \cos \Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)} \quad (10.1)$$

$$({}_l \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_2^T ({}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_2 = \cos \Delta \tilde{\varphi}_y^{(k)} \quad (10.2)$$

$$({}_l \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_3^T ({}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_3 = \cos \Delta \tilde{\varphi}_z^{(k)} \quad (10.3)$$

gdzie $({}_l \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_i$, $({}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_i$, $i=1,2,3$, jest i -tą kolumną macierzy rotacji.

Różniczkując zależności (8) względem współrzędnych uogólnionych otrzymuje się:

- dla $\xi=1, \dots, \bar{n}^{(l)}$:

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\xi^{(l)}} = \frac{1}{\cos \Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)}} ({}_l \bar{\mathbf{R}}_\xi^{(k)})_1^T ({}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_1 \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\varphi}_y^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\xi^{(l)}} = \frac{1}{\cos \Delta \tilde{\varphi}_y^{(k)}} ({}_l \bar{\mathbf{R}}_\xi^{(k)})_2^T ({}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_2 \quad (11.2)$$

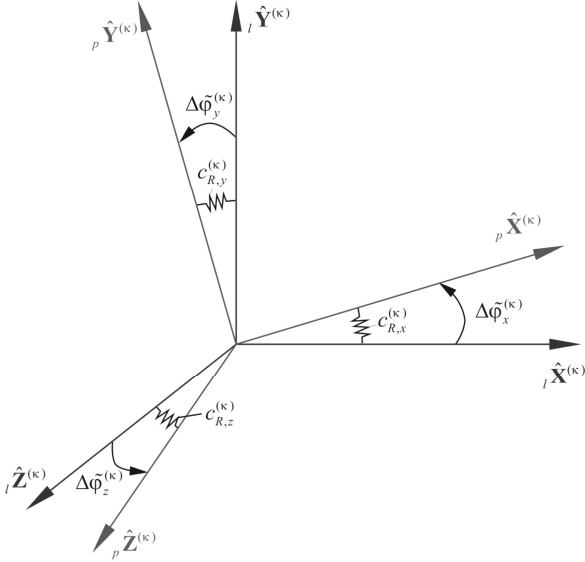
$$\frac{\partial \Delta \tilde{\varphi}_z^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\xi^{(l)}} = \frac{1}{\cos \Delta \tilde{\varphi}_z^{(k)}} ({}_l \bar{\mathbf{R}}_\xi^{(k)})_3^T ({}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_3 \quad (11.3)$$

- dla $\eta=1, \dots, \bar{n}^{(p)}$:

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(p)}} = \frac{1}{\cos \Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)}} ({}_l \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_1^T ({}_p \bar{\mathbf{R}}_\eta^{(k)})_1 \quad (12.1)$$

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\varphi}_y^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(p)}} = \frac{1}{\cos \Delta \tilde{\varphi}_y^{(k)}} \left({}_l \tilde{\mathbf{R}}^{(k)} \right)_2^T \left({}_p \tilde{\mathbf{R}}_\eta^{(k)} \right)_2 \quad (12.2)$$

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\varphi}_z^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(p)}} = \frac{1}{\cos \Delta \tilde{\varphi}_z^{(k)}} \left({}_l \tilde{\mathbf{R}}^{(k)} \right)_3^T \left({}_p \tilde{\mathbf{R}}_\eta^{(k)} \right)_3 \quad (12.3)$$



Rys. 3. Schemat wyznaczenia deformacji sprężyn rotacyjnych

Po uwzględnieniu związków (11), (12) pochodne z energii odkształcenia sprężystego przyjmują postać:

$$\frac{\partial V_R^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(l)}} = {}_l \tilde{\mathbf{E}}^{(k)T} \mathbf{C}_T^{(k)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} + {}_l \tilde{\mathbf{A}}^{(k)} \mathbf{C}_R^{(k)} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)} \quad (13.1)$$

$$\frac{\partial V_R^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(p)}} = {}_p \tilde{\mathbf{E}}^{(k)T} \mathbf{C}_T^{(k)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} + {}_p \tilde{\mathbf{A}}^{(k)} \mathbf{C}_R^{(k)} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)} \quad (13.2)$$

gdzie: ${}_l \tilde{\mathbf{A}}^{(k)} = \left[\frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\xi^{(l)}} \right]_{\xi=1, \dots, \tilde{n}^{(l)}}$, ${}_p \tilde{\mathbf{A}}^{(k)} = \left[\frac{\partial \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(p)}} \right]_{\eta=1, \dots, \tilde{n}^{(p)}}$.

Modele poszczególnych połączeń otrzymuje się przez odpowiedni dobór współczynników sztywności sprężyn. Jeśli przyjąć, że osie ${}_l \hat{\mathbf{Z}}^{(k)}$ oraz ${}_p \hat{\mathbf{Z}}^{(k)}$ pokrywają się z osią połączenia, to wartości współczynników sztywności dla połączenia obrotowego, postępowego i cylindrycznego są określone w Tab. 1.

Tab. 1. Wartości współczynników sztywności modeli podatnych połączeń

Typ połączenia	$c_{T,x}^{(k)}$	$c_{T,y}^{(k)}$	$c_{T,z}^{(k)}$	$c_{R,x}^{(k)}$	$c_{R,y}^{(k)}$	$c_{R,z}^{(k)}$
Obrotowe	∞	∞	∞	0	0	∞
Postępowe	∞	∞	0	∞	∞	∞
Cylindryczne	∞	∞	0	0	0	∞

W obliczeniach numerycznych, w miejsce sztywności równych nieskończoności, stosuje się liczby o dużych wartościach. Należy zauważyć, że zbyt wysoka wartość tych współczynników może prowadzić do komplikacji numerycznych. W rzeczywistości współczynniki sztywności

dobiera się na podstawie kilku symulacji numerycznych, w trakcie których sprawdza się czy łączone ciała wykonują ruch względny.

5. RÓWNANIA RUCHU MECHANIZMU

Dynamiczne równania ruchu mechanizmu wyprowadzono z równań Lagrange'a II rodzaju w postaci:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (14)$$

gdzie: E – energia kinetyczna członów sztywnych oraz podatnych, V – energia potencjalna odkształcenia sprężystego członów podatnych oraz połączeń zastępczych, \mathbf{Q} – wektor sił zewnętrznych oraz sił wynikających z bezwładności członów, \mathbf{q} – wektor wszystkich współrzędnych uogólnionych.

Po wykonaniu przekształceń opisanych w pracy (Wittbrodt i inni, 2006) równania ruchu można zapisać następująco:

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} \quad (15)$$

gdzie \mathbf{A} jest macierzą mas, natomiast \mathbf{F} jest wektorem prawych stron zawierającym pozostałe składniki występujące w równaniach Lagrange'a. W rezultacie dynamika mechanizmu jest opisana układem równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu. Liczba występujących równań

jest co prawda mniejsza, w porównaniu do podejścia z więzami, natomiast otrzymany układ może być źle uwarunkowany (sztywny).

6. EKSPERYMENT NUMERYCZNY

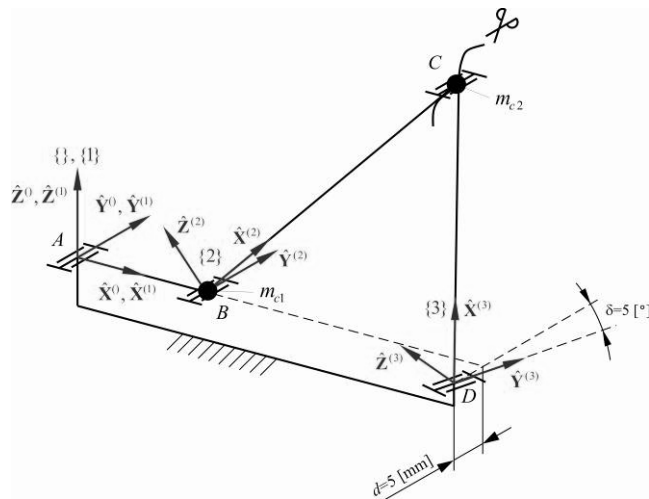
W symulacjach numerycznych badano czworobok przegubowy złożony ze sztywnej korbki oraz podatnego łącznika i wahacza (Rys. 4). Wymiary czworoboku oraz dane poszczególnych członów wzięto z pracy (Adamiec-Wójcik i Augustynek, 2005). W wyniku przesunięcia oraz obrotu pary łączącej wahacz z ostoją mechanizm staje się układem przestrzennym.

Ruch układu wymuszano momentem działającym na korbkę w postaci:

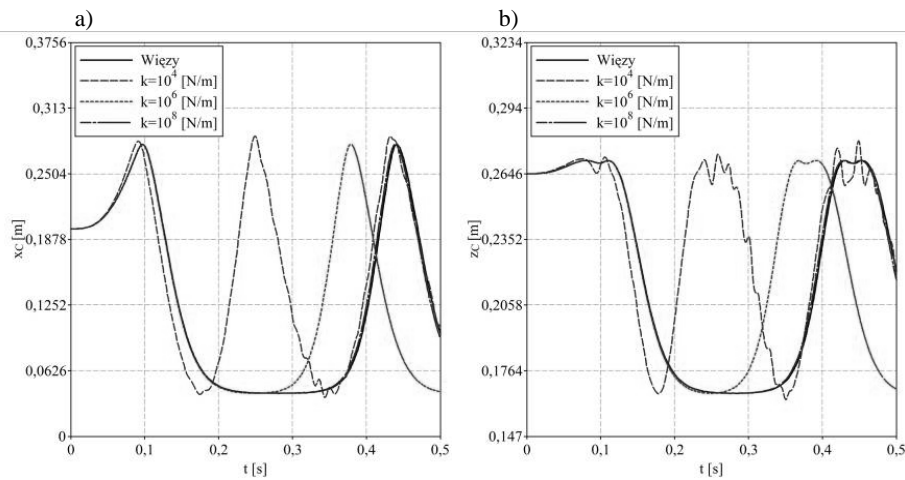
$$M^{(1)} = \begin{cases} M_0 \frac{t}{t_0}, & t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases} \quad (16)$$

gdzie M_0 jest momentem działającym w chwili t_0 . W obliczeniach przyjęto, że $M_0 = 1.5[\text{Nm}]$ oraz $t_0 = 0.1[\text{s}]$.

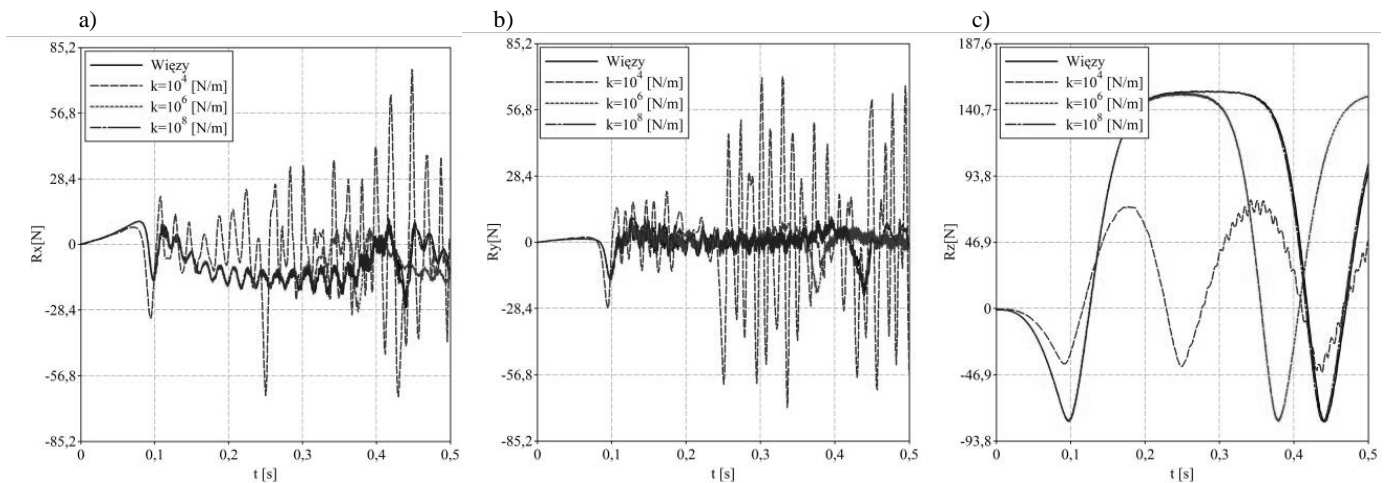
Do dyskretyzacji członów podatnych stosowano metodę sztywnych elementów skończonych (Wittbrodt i inni, 2006). Na podstawie przeprowadzonych testów numerycznych przyjęto podział łącznika oraz wahacza na 5 sztywnych elementów skończonych.



Rys. 4. Schemat czworoboku przegubowego



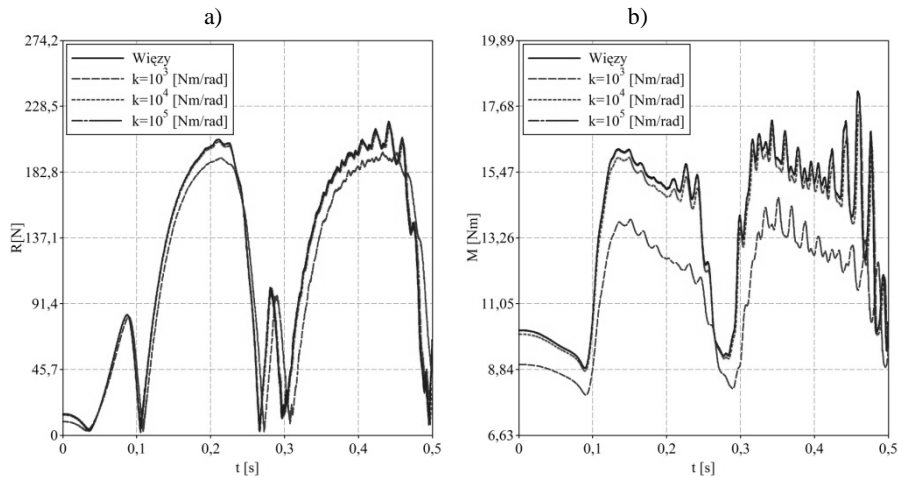
Rys. 5. Przebieg przemieszczeń punktu C w układzie { } w zależności od sztywności sprężyn zastępczego połączenia sferycznego



Rys. 6 Przebieg sił działających w zastępczym połączeniu sferycznym w zależności od sztywności sprężyn translacyjnych

Występujący łańcuch zamknięty rozcięto w parze kinematycznej C, łączącej łącznik z wahaczem. W symulacjach przyjmowano, że para ta może być kulista lub obrotowa, a do jej modelowania stosowano opisane wcześniej modele zastępcze. Wyniki otrzymane z użyciem modeli zastępczych porównywano z wynikami otrzymanymi dla modelu, w którym formułowano równania więzów domykających.

Wpływ współczynników sztywności sprężyn translacyjnych zastępczego połączenia sferycznego na przemieszczenia punktu C oraz siły działające w tym połączeniu przedstawiono na Rys. 5 oraz 6. W symulacjach przyjmowano, że współczynniki sztywności wszystkich sprężyn są jednako-



Rys. 7. Przebieg wypadkowej (a) siły oraz (b) momentu reakcji w zastępczym połączeniu obrotowym w zależności od sztywności sprężyny rotacyjnej

Z przedstawionych przebiegów wynika, że ruch mechanizmu jest zgodny z więzami, jeśli przyjmie się współczynniki sztywności równe 10^8 [N/m]. Współczynniki te, stosowano dalej w odniesieniu do sprężyn translacyjnych występujących w zastępczym połączeniu obrotowym. Wpływ współczynnika sztywności sprężyny rotacyjnej na wypadkową siłę oraz moment reakcji występujący w parze kinematycznej C pokazano na Rys. 7.

Z przedstawionych przebiegów można zauważyć, że siły działające w połączeniu otrzymane dla sztywności 10^4 oraz 10^5 [Nm/rad] niewiele różnią się między sobą.

7. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono modele zastępcze połączeń w mechanizmach z zastosowaniem elementów sprężystych. Cechą przedstawionego podejścia jest mniejszy rozmiar zagadnienia, wynikający z braku równań więzów domykających. Skutkiem przyjęcia dużych sztywności zastępczych sprężyn wyjściowy układ równań różniczkowych, opisujący dynamikę mechanizmu, może być źle uwarunkowany. W dalszych pracach badany będzie wpływ metod całkowania, w tym metod przeznaczonych dla układów sztywnych, na efektywność obliczeń modeli mechanizmów z połączeniami zastępczymi.

LITERATURA

1. **Adamiec-Wójcik I., Augustynek K.** (2005) Modelling dynamics of flexible multibody systems by means of the rigid finite element method, *Multibody Dynamics 2005 on Advances in Computational Dynamics: ECCOMAS Thematic Conference*, Madrid.
2. **Adamiec-Wójcik I., Maczyński A., Wojciech S.** (2008), *Zastosowanie metody transformacji jednorodnych w modelowaniu dynamiki urządzeń offshore*, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa.
3. **Błajer W.** (1998), *Metody dynamiki układów wieloczłonowych*, Wydawnictwo Politechniki Radomskiej, Radom.
4. **Błajer W.** (2011), *Methods for constraint violation suppression in numerical simulation of constrained multibody systems – A comparative study*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200, pp. 1568-1576.
5. **Frączek J.** (2002), *Modelowanie mechanizmów przestrzennych metodą układów wieloczłonowych*, *Prace Naukowe-Mechanika*, z.196, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
6. **Harelcki A.** (2002), *Metoda analizy dynamicznej mechanicznych układów wieloczłonowych z tarciem suchym w parach kinematycznych*, *Rozprawy Naukowe*, Nr 2, Wydawnictwo Akademii Techniczno-Humanistycznej, Bielsko-Biała.
7. **Wittbrodt E., Adamiec-Wójcik I., Wojciech S.** (2006), *Dynamics of flexible multibody systems: rigid finite element method*, Springer, Berlin.

MODELLING OF JOINTS IN MECHANISMS BY MEANS OF SPRING ELEMENTS

Abstract: Mechanisms are examples of closed kinematic chains with a tree-like structure. In order to derive the equations of motion, closed kinematic chains have to be cut and constraint equations have to be formulated. As a result equations of motion form set of differential-algebraic equations with index 3, which are difficult to solve. The paper presents a method modeling interactions between bodies at the cut joints by means of spring elements with appropriate stiffness. Such approach eliminates constraints equations, and thus the equations of motion form a set of ordinary differential equations.