

O PEWNYCH ZAGADNIENIACH MECHANIKI PĘKANIA CIAŁ Z OSTRYMI I ZAOKRĄGLONYMI KARBAMI V

Mykhaylo P. SAVRUK*, Andrzej KAZBERUK*

*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

savruk@pb.edu.pl, a.kazberuk@pb.edu.pl

Streszczenie: Przedstawiono przegląd badań z zakresu mechaniki pęknięcia ciał stałych z karbami typu V. Część pierwszą poświęcono metodom rozwiązywania płaskich zadań teorii sprężystości dla obszarów z punktami kątowymi na konturach brzegowych. Zwrócono szczególną uwagę na opracowane przez Autorów jednolite podejście do rozwiązywania zagadnień koncentracji naprężeń w otoczeniu korbów ostrych i zaokrąglonych w obszarach sprężystych. W drugiej części przeanalizowano kryteria pęknięcia ciał z karbami. Na podstawie rozwiązania zagadnienia sprężysto-plastycznego w ramach modelu pasm plastyczności, nieskończonego zaokrąglonego karbu w płaszczyźnie, zaproponowano nowe odkształceniowe kryterium pęknięcia ciał z takimi karbami.

1. WPROWADZENIE

Mechanika pęknięcia obejmuje analizę procesów deformacji i zniszczenia ciał stałych wywołanego obecnością zarówno szczelin jak i korbów. Obecnie, najbardziej rozwinięte są metody rozwiązywania zadań mechaniki pęknięcia dla ciał ze szczelinami. W przypadku ciał z karbami, metod tych jest znacznie mniej. Uwaga ta dotyczy zarówno korbów ostrych, w wierzchołkach których, zgodnie z liniową teorią sprężystości, powstają naprężenia nieskończone, jak i korbów o wierzchołkach zaokrąglonych małymi promieniami krzywizny, w których nawet przy niewielkim poziomie obciążenia, wartości naprężeń znacznie przekraczają wytrzymałość materiału, wykluczając użycie klasycznych kryteriów do oceny nośności elementu konstrukcyjnego z takim karbem. Taki stan badań można tłumaczyć dużymi trudnościami matematycznymi, które pojawiają się przy rozwiązywaniu zadań teorii sprężystości dla ciał z karbami. Tym samym, bardzo atrakcyjne stają się metody przybliżone rozwiązywania zadań tej klasy opierające się na danych o koncentracji naprężeń w wierzchołkach korbów zaokrąglonych (niekoniecznie małym promieniem krzywizny), które można uzyskać wieloma różnymi metodami. Innym ważnym problemem mechaniki pęknięcia ciał stałych z karbami jest konstrukcja kryteriów zniszczenia takich ciał. Na przykład, formalne rozszerzenie kryterium naprężeniowego mechaniki pęknięcia ciał ze szczelinami na ciała z karbami, prowadzi do uzależnienia wartości krytycznego współczynnika intensywności naprężeń od kąta rozwarcia karbu, czyli od kształtu ciała. Problem jeszcze bardziej komplikuje się w złożonych stanach naprężeń, ponieważ naprężenia w wierzchołku karbu mają różne osobliwości.

Poniżej przeanalizowano różne metody rozwiązywania płaskich zadań teorii sprężystości dla ciał z karbami i różne podejścia do budowy kryteriów pęknięcia takich ciał. Szczególną uwagę poświęcono результатам badań własnych, które

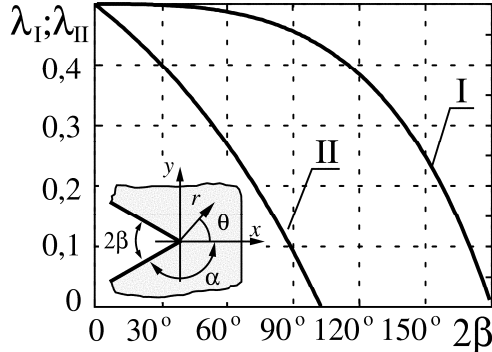
Autorzy uzyskali stosując jednolite podejście do rozwiązywania zagadnień rozkładu naprężeń w otoczeniu wierzchołków korbów ostrych i zaokrąglonych. Do rozwiązywania zagadnień koncentracji naprężeń w ciałach z zaokrąglonymi karbami wykorzystano metodę osobliwych równań całkowych. Dokładność uzyskiwanych wyników pozwoliła na określenie zależności asymptotycznej pomiędzy wielkością koncentracji naprężeń w wierzchołku karbu zaokrąglonego i współczynnikiem intensywności naprężeń dla odpowiedniego karbu ostrego. Stosując to samo podejście rozwiązano zagadnienie sprężysto-plastyczne, w ramach modelu pasm plastyczności. Na jego podstawie sformułowano odkształceniowe kryterium pęknięcia ciał quasi-kruchych z karbami ostrymi i zaokrąglonymi.

2. ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ W CIAŁACH SPRĘŻYSTYCH Z KARBAMI

W mechanice pęknięcia ważną rolę odgrywają badania pola naprężeń i przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka karbu, na krawędziach, którego zadano różne warunki brzegowe. Teoretyczne badania w tej dziedzinie zostały zapoczątkowane przez Wieghardt'a (1907), już w 1907 roku i kontynuowane w latach trzydziestych minionego wieku w pracach Brathz'a (1933a, 1933b). W 1952 roku Williams (1952) przedstawił kompletne rozwiązania zagadnienia klina, przy różnych warunkach brzegowych, w postaci rozwinięcia w szereg względem funkcji własnych. Później, ten sam problem różnymi metodami rozpatrywało wielu innych badaczy m.in. Karp i Karal (1962), Kalandija (1969), Rösel (1987), Vasilopoulos (1988), Savruk i inni (1989), Seweryn i Molski (1996) i Seweryn (2003).

Rozpatrzmy szczegółowo rozkład naprężeń wokół karbu typu V wyciętego w sprężystej, izotropowej płaszczyźnie w warunkach płaskiego stanu naprężenia lub odkształcenia. W wierzchołku karbu, pole naprężeń ma osobliwości typu

wykładniczego, z wykładnikami różnymi dla symetrycznego (λ_I) i antysymetrycznego (λ_{II}) stanu naprężeń. Składowe tensora naprężeń we współrzędnych biegunowych, w otoczeniu wierzchołka karbu można przedstawić podobnie jak w pracach Seweryna i Molskiego (1996) i Seweryna (2003):



Rys. 1. Zależność wykładników osobliwości naprężeń λ_I (krzywa I) i λ_{II} (krzywa II) w wierzchołku karbu typu V od kąta rozwarcia karbu 2β

$$\sigma_{rr} = \frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi r)^{\lambda_I} \Delta_1} \left[\frac{2+\lambda_I}{2-\lambda_I} \cos(2-\lambda_I)\alpha \cos \lambda_I \theta + \cos \lambda_I \alpha \cos(2-\lambda_I)\theta \right] + \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{II}} \Delta_2} \left[(1+\lambda_{II}) \sin \lambda_{II} \alpha \sin(2-\lambda_{II})\theta + (2+\lambda_{II}) \sin(2-\lambda_{II})\alpha \sin \lambda_{II} \theta \right] + O(r^0),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi r)^{\lambda_I} \Delta_1} \left[\cos(2-\lambda_I)\alpha \cos \lambda_I \theta - \cos \lambda_I \alpha \cos(2-\lambda_I)\theta \right] + \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{II}} \Delta_2} \left[(\lambda_{II}-2) \sin \lambda_{II} \alpha \sin(2-\lambda_{II})\theta + (2-\lambda_{II}) \sin(2-\lambda_{II})\alpha \sin \lambda_{II} \theta \right] + O(r^0),$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi r)^{\lambda_I} \Delta_1} \left[\frac{\lambda_I}{2-\lambda_I} \cos(2-\lambda_I)\alpha \sin \lambda_I \theta - \cos \lambda_I \alpha \sin(2-\lambda_I)\theta \right] + \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{II}} \Delta_2} \left[(2-\lambda_{II}) \sin \lambda_{II} \alpha \cos(2-\lambda_{II})\theta - \lambda_{II} \sin(2-\lambda_{II})\alpha \cos \lambda_{II} \theta \right] + O(r^0), \quad (1)$$

gdzie $\alpha = \pi - \beta$, ($0 \leq 2\beta < \pi$) – kąt rozwarcia karbu, r , θ – współrzędne układu biegunowego o początku w wierzchołku karbu (patrz schemat na Rys. 1);

$$\Delta_1 = \cos(2-\lambda_I)\alpha - \cos \lambda_I \alpha,$$

$$\Delta_2 = (2-\lambda_{II}) \sin \lambda_{II} \alpha - \lambda_{II} \sin(2-\lambda_{II})\alpha.$$

Współczynniki λ_I ($0 < \lambda_I \leq 1$) i λ_{II} ($0 < \lambda_{II} \leq 1$) są pierwiastkami równań

$$\begin{aligned} (1-\lambda_I)\sin 2\alpha + \sin 2(1-\lambda_I)\alpha &= 0; \\ (1-\lambda_{II})\sin 2\alpha - \sin 2(1-\lambda_{II})\alpha &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

których zależności od kąta β przedstawiono na Rys. 1.

Wielkości \tilde{K}_I^V i \tilde{K}_{II}^V są nazywane (uogólnionymi) WIN w wierzchołku karbu V dla odpowiednio symetrycznego i antysymetrycznego rozkładu naprężeń.

Składowe wektora przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka karbu mają następującą postać:

$$u_r = \frac{\tilde{K}_I^V r}{2G(1-\lambda_I)\Delta_1(2\pi r)^{\lambda_I}} \left[\frac{\kappa-1+\lambda_I}{2-\lambda_I} \cos(2-\lambda_I)\alpha \cos \lambda_I \theta + \cos \lambda_I \alpha \cos(2-\lambda_I)\theta \right] + \frac{\tilde{K}_{II}^V r}{2G(1-\lambda_{II})\Delta_2(2\pi r)^{\lambda_{II}}} \left[(2-\lambda_{II}) \sin \lambda_{II} \alpha \sin(2-\lambda_{II})\theta + (\kappa-1+\lambda_{II}) \sin(2-\lambda_{II})\alpha \sin \lambda_{II} \theta \right] + O(r),$$

$$u_\theta = \frac{-\tilde{K}_I^V r}{2G(1-\lambda_I)\Delta_1(2\pi r)^{\lambda_I}} \left[\frac{\kappa+1-\lambda_I}{2-\lambda_I} \cos(2-\lambda_I)\alpha \sin \lambda_I \theta + \cos \lambda_I \alpha \sin(2-\lambda_I)\theta \right] + \frac{\tilde{K}_{II}^V r}{2G(1-\lambda_{II})\Delta_2(2\pi r)^{\lambda_{II}}} \left[(2-\lambda_{II}) \sin \lambda_{II} \alpha \cos(2-\lambda_{II})\theta + (\kappa+1-\lambda_{II}) \sin(2-\lambda_{II})\alpha \sin \lambda_{II} \theta \right] + O(r), \quad (3)$$

gdzie G – moduł odkształcenia postaciowego; $\kappa=3-4\mu$ – dla płaskiego stanu odkształcenia, $\kappa=(3-\mu)/(1+\mu)$ – w przypadku płaskiego stanu naprężenia; μ – współczynnik Poissona.

Uogólnione WIN \tilde{K}_I^V i \tilde{K}_{II}^V , wprowadzone we wzorach (1), (3), są zdefiniowane poprzez naprężenia w sposób następujący

$$\begin{aligned} \tilde{K}_I^V &= \lim_{r \rightarrow 0} [(2\pi r)^{\lambda_I} \sigma_{\theta\theta}(r,0)], \\ \tilde{K}_{II}^V &= \lim_{r \rightarrow 0} [(2\pi r)^{\lambda_{II}} \tau_{r\theta}(r,0)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Należy zauważyć, że w literaturze współczynnikami intensywności naprężeń w wierzchołkach karbów nazywane są również wielkości:

$$K_I^V = (2\pi)^{1/2-\lambda_I} \tilde{K}_I^V, \quad K_{II}^V = (2\pi)^{1/2-\lambda_{II}} \tilde{K}_{II}^V.$$

Jak wynika z zależności (1), naprężenia w punkcie wierzchołkowym konturu granicznego w ciele sprężystym mają dwie różne osobliwości typu wykładniczego, które odpowiadają stanom symetrycznemu i antysymetrycznemu rozkładu naprężeń względem dwusiecznej karbu. Sytuacja ta znacznie utrudnia poszukiwanie rozwiązań numerycznych zadań teorii sprężystości dla obszarów o niegładkich granicach. Dlatego w analizie numerycznej często wykorzystuje się podejścia przybliżone nie uwzględniające osobliwości

w punktach kątowych lub uwzględniające tylko jedną osobliwość wyższego rzędu, jak w pracach Keer'a i Chantaramungkorn'a (1975) i Gecit'a (1983).

Pierwsze wartości liczbowe WIN w wierzchołku karbu krawędziowego w prostokątnej próbce poddanej rozciąganiu i zginaniu, otrzymano metodą kolokacji granicznych (Gross i Mendelson, 1972). Przy czym wykorzystano znane (Williams, 1952) rozwinięcie w szereg względem funkcji własnych rozwiązania płaskiego zagadnienia teorii sprężystości dla klina. Współczynniki tego szeregu wyznacza się z układu równań algebraicznych, które otrzymuje się spełniając warunki brzegowe w odpowiedniej liczbie punktów kolokacji. Takie podejście okazało się efektywne dla kątów rozwarcia korbów $2\beta < 60^\circ$. Dla korbów o większym rozwarceniu, zapewnienie wymaganej dokładności rozwiązania wymaga użycia większej liczby punktów kolokacji niż to konieczne do wyznaczenia współczynników obciążonego szeregu, tzn. otrzymywana liczba równań algebraicznych jest większa niż liczba niewiadomych. Aby uzyskać konsystentny układ równań wykorzystywano metodę najmniejszych kwadratów (Carpenter, 1984, 1985).

W rozwiązywaniu dwuwymiarowych zadań teorii sprężystości dla obszarów z korbami również wykorzystuje się metodę elementów skończonych. Podejście polega głównie na zastosowaniu specjalnych elementów skończonych, w których na podstawie asymptotycznych rozwiązań analitycznych, w otoczeniu wierzchołka karbu zakłada się stosowaną osobliwość pola naprężeń. Takimi specjalnymi elementami otacza się punkt osobliwy na granicy ciała (wierzchołek karbu). Można wyodrębnić trzy zasadnicze grupy takich elementów skończonych: elementy hybrydowe (np. Lin, Tong, 1980), asymptotyczne elementy zdegenerowane (Akin, 1976) i elementy analityczne (Seweryn i Adamowicz, 2002). Do wyznaczenia WIN również wykorzystuje się kilka podejść (Seweryn i Łukaszewicz, 2000; Seweryn 2003): metody bezpośrednie (Lin i Tong, 1980; Seweryn i Adamowicz, 2002, Seweryn, 2002), w których wartości WIN wyznaczone są wprost poprzez modelowanie osobliwych pól naprężeń w wierzchołku karbu; metody asymptotyczne (Seweryn, 1990), w których porównuje się rozkłady naprężeń w otoczeniu punktu osobliwego, otrzymywane na drodze analitycznej i numerycznej oraz metody energetyczne (Rice, 1960; Sinclair i inni, 1984; Livieri, 2003; Chen i Lu, 2004), gdzie wykorzystuje się całki energetyczne niezależne od konturu całkowania. Przegląd badań z zakresu wykorzystania metody elementów skończonych w zadaniach mechaniki pęknięcia ciał z korbami zawarty jest w pracach Fan'a i Long'a (1992), Givoli i Rivkin'a (1992, 1993), Seweryna i Molskiego (1996) oraz Seweryna (2003).

W rozwiązywaniu zagadnień z korbami również wykorzystywana jest metoda elementów brzegowych (Portela i inni, 1991; Seweryn, 2003), gdzie dyskretyzacji podlega jedynie brzeg obszaru, przy czym, podobnie jak w metodzie elementów skończonych, uwzględnienie osobliwości w punktach leżących w wierzchołkach korbów, wymaga użycia specjalnych elementów brzegowych. Metody elementów brzegowych i kolokacji granicznych wykorzystywane są również do wyznaczania funkcji wagowych w pewnych metodach numerycznych (Petkov i Gospodinov, 1992), które umożliwiają obliczanie WIN w wierzchołkach

korbów dla dowolnego obciążenia, wykorzystując jedynie całkowanie brzegowych wartości naprężeń na granicy ciała z odpowiednimi funkcjami wagowymi. Należy zauważyć, że metoda funkcji wagowych, inaczej niż ma to miejsce w teorii szczelin, nie znalazła szerszego zastosowania w rozwiązywaniu zadań dla obszarów z korbami, co można tłumaczyć dużymi trudnościami ze sformułowaniem funkcji wagowych dla obszarów z korbami.

Metoda osobliwych równań całkowych znalazła również zastosowanie w rozwiązywaniu płaskich zagadnień w obszarach z punktami kątowymi (Theocaris i Ioakimidis, 1979; Noda i inni, 1996; Seweryn 2003). Jednym z pierwszych zadań rozwiązanych tą metodą było obliczenie WIN dla krawędziowego karbu w rozciąganej półpłaszczyźnie (Theocaris i Ioakimidis, 1979), przy czym równania całkowe zadania otrzymano na podstawie osobliwych równań całkowych dla układu dowolnie zorientowanych prostoliniowych szczelin w półpłaszczyźnie sprężystej (Muskhelishvili, 1966). Obecność punktów kątowych na granicy ciała wymaga znacznych modyfikacji metody osobliwych równań całkowych i prowadzi do znaczących trudności w realizacji metody. Wiadomo, że ta metoda odznacza się dużą efektywnością dla obszarów o gładkich brzegach. Fakt ten można wykorzystać do obliczania WIN w wierzchołkach ostrych korbów stosując przejście graniczne, wychodząc od rozwiązania zadania dla odpowiednich korbów zaokrąglonych. Opisane podejście zrealizowano dla symetrycznego rozkładu naprężeń w ciałach sprężystych z korbami typu V. Poniżej, wyniki tych badań zostaną omówione bardziej szczegółowo.

3. JEDNOLITE PODEJŚCIE DO ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIENÍ ROZKŁADU NAPRĘŻEN W OTOCZENIU KARBÓW OSTRYCH I ZAOKRĄGLONYCH

Dokonanie przejścia granicznego od karbu zaokrąglonego do ostrego, wymaga znajomości zależności asymptotycznej pomiędzy wartościami współczynników intensywności i koncentracji naprężeń dla odpowiedniego karbu zaokrąglonego, którego promień krzywizny w wierzchołku dąży do zera. Pierwsze takie zależności otrzymał Benthem (1987) metodą równań całkowych Sherman-Lauricella (Muskhelishvili 1966) dla korbów o kształtach parabolicznym i hiperbolicznym. Rezultaty późniejszych badań zawierają prace Lazzarina i Tovo (1996), Strandberga (1999), Filippi i in. (2002). Próby ich wykorzystania do obliczania WIN w wierzchołkach korbów ostrych zakończyły się niepowodzeniem. Analiza porównawcza znanych zależności pomiędzy współczynnikami intensywności i koncentracji naprężeń wykazała, że zgadzają się one jedynie dla korbów o kątach $\beta=0$ (szczelina fizyczna) i $\beta=\pi/2$ (brzeg gładki). Dla innych wartości kąta β różnica pomiędzy publikowanymi wynikami sięgała 10%. Rozbieżności w wyżej opisanych danych, a także brak rozwiązania dla najbardziej realnego kształtu karbu zaokrąglonego, tzn. klina o ramionach prostoliniowych, zaokrąglonego w wierzchołku łukiem kołowym, skłoniły Autorów do przeprowadzenia własnych badań tego problemu (Savruk i Kazberuk, 2006, 2007a, b). Rozważono płaszczyzną sprężystą

z wyciętym korbem o kącie rozwarcia 2α ($\pi/2 < \alpha < \pi$), zaokrąglonym w wierzchołku łukiem kołowym o promieniu ρ (Rys. 2a). Założono, że brzeg karbu jest wolny od obciążeń a w nieskończoności stan naprężeń opisują następujące, zespolone potencjały naprężeń:

$$\Phi_0(z) = -\frac{K_I^V}{\sqrt{2\pi}} z^{-\lambda} \frac{\lambda-1}{A(\lambda)} \sin(2\alpha),$$

$$\Psi_0(z) = \frac{K_I^V}{\sqrt{2\pi}} z^{-\lambda} \frac{\lambda-1}{A(\lambda)} \sin(2\lambda\alpha),$$

$$A(\lambda) = (\lambda^2 - 3\lambda + 2) \sin(2\alpha) + (\lambda - 1) \sin(2\lambda\alpha), \quad (5)$$

gdzie $\lambda = \lambda_1$ – najmniejszy, dodatni pierwiastek pierwszego równania charakterystycznego (2); K_I^V – WIN w wierzchołku odpowiedniego karbu ostrego ($\rho=0$).

Numeryczne rozwiązanie zadania otrzymano metodą osobliwych równań całkowych w formie zaproponowanej przez Savruka (1981). Maksymalne naprężenia w wierzchołku karbu zaokrąglonego można przedstawić w formie

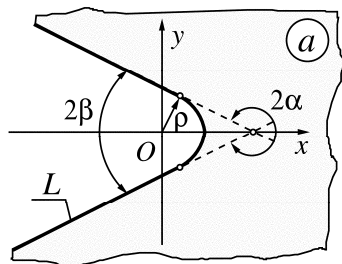
$$(\sigma_s)_{\max} = \frac{K_I^V}{\sqrt{2\pi}} R_I \rho^{-\lambda}, \quad (6)$$

gdzie współczynnik wygładzenia naprężeń R_I zależy od kąta rozwarcia karbu (krzywa 1 na Rys. 2b). Wartości R_I można wyznaczać ze wzoru aproksymacyjnego w funkcji kąta β (Savruk, Kazberuk 2006)

$$R_I = \frac{1 + 28,75\gamma + 98,04\gamma^2 - 102,1\gamma^3 + 47,4\gamma^4 - 8,465\gamma^5}{1 + 20,71\gamma}, \quad (7)$$

gdzie $\gamma = \pi/2 - \beta$, i którego względny błąd nie przekracza 0,1% dla wszystkich $0 \leq \beta \leq \pi/2$, oprócz przedziału $83\pi/180 \leq \beta \leq \pi/2$, gdzie błąd jest mniejszy od 0,4% (We wzorze (7) zmieniono nieznacznie wartość współczynnika przy γ^5 , podwyższając dokładność aproksymacji). Zależność parametru λ_1 od kąta β również można aproksymować funkcją

$$\lambda_1 \approx 1,247 \cos \beta - 1,312 \cos^2 \beta + 0,8532 \cos^3 \beta - 0,2882 \cos^4 \beta, \quad (8)$$

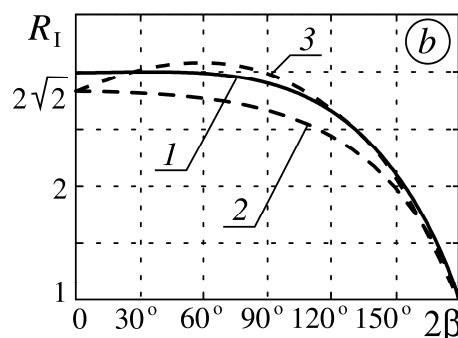


dla β z przedziału $0 \leq \beta \leq \pi/2$, z maksymalnym błędem bezwzględnym poniżej 0,001.

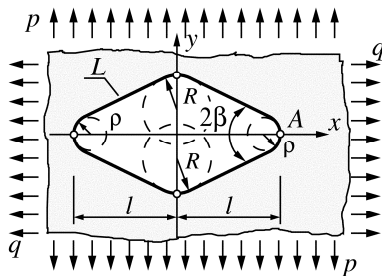
Na Rys. 2b przytoczono dane dla nieskończonego karbu hiperbolicznego (rozwiązanie Benthem'a (1987), krzywa 2) i dla zaokrąglonego karbu wyciętego w krawędzi półpłaszczyzny (według Strandberga (1999), krzywa 3). Strandbergowi nie udało się otrzymać wartości numerycznych dla małych β . Uważał on, podobnie jak inni badacze, że dla wąskich korbów U-podobnych ($\beta=0$) znana jest dokładna wartość współczynnika $R_I=2\sqrt{2}$, która wynika z rozwiązania dla otworu eliptycznego (patrz np. Savruk, 1988). Analiza przeprowadzona przez Savruka i Kazberuka (2006) wykazała, że zależności pomiędzy współczynnikami intensywności i koncentracji naprężeń dla korbów ostrych i zaokrąglonych są niejednoznaczne: dla jednakowej krzywizny wierzchołka uzyskuje się różne wartości R_I w zależności od kształtu karbu w otoczeniu wierzchołka. Tym samym, do oceny koncentracji naprężeń dla wąskich U-podobnych korbów zamiast wartości $R_I=2\sqrt{2}$, poprawniej przyjąć wartość $R_I=2,992$, która wynika ze wzoru (7). Zbliżony rezultat ($R_I=2,996$) otrzymał Livieri (2003) metodą elementów skończonych z wykorzystaniem energetycznej całki J .

Zależność (6) można wykorzystać do przybliżonej oceny wartości WIN w wierzchołku ostrego karbu używając znanych wartości współczynników koncentracji naprężeń. Również odwrotnie, znając WIN można oszacować współczynnik koncentracji naprężeń w wierzchołku karbu zaokrąglonego. Takie sformułowanie pozwala w jednolity sposób rozpatrywać zagadnienia koncentracji naprężeń dla korbów ostrych i zaokrąglonych.

W przypadku antysymetrycznego stanu naprężeń, naprężenia maksymalne na konturze karbu występują w pewnej odległości od jego wierzchołka. Odległość ta zmniejsza się wraz ze zmniejszaniem promienia ρ . Utrudnia to otrzymanie zależności podobnych do (6) w stanie antysymetrycznym, a tym bardziej w złożonych stanach naprężeń. Badania nad tym problemem dopiero się rozpoczęły. Dla karbu parabolicznego zależność typu (6) podano w pracy Benthem'a (1987), dla naprężeń antysymetrycznych względem osi konturu granicznego.



Rys. 2. Zaokrąglony karb V w płaszczyźnie sprężystej (a) i zależność współczynnika wygładzenia naprężeń R_I od kąta rozwarcia karbu 2β (b)



Rys. 3. Otwór rombowy z zaokrąglonymi wierzchołkami.

Poniżej przedstawiono przykłady zastosowań jednolitego podejścia do wyznaczania współczynników intensywności i koncentracji naprężeń w obszarach sprężystych z karami typu V i otworami. Rozpatrzono płaszczyznę sprężystą osłabioną rombownym otworem, którego wierzchołki zaokrąglono łukami o promieniach ρ i R . Przyjmuje się, że brzeg otworu (kontur L) jest wolny od obciążeń. Na nieskończoności przyłożono naprężenia rozciągające o intensywności p i q , działające w kierunkach wzajemnie prostopadłych. (Rys. 3).

Numeryczne rozwiązanie zadania otrzymano metodą osobliwych równań całkowych (Savruk 1981) dla otworu rombownego (Savruk, Kazberuk 2007a, 2007b) z zaokrąglonymi wierzchołkami, a także dla otworu owalnego – soczewkowego (Savruk, Kazberuk 2007b, Kazberuk 2007). Na podstawie tych rozwiązań oraz wykorzystując zależność (6) określono wartości bezwymiarowego WIN $F_1^V = K_1^V / (p l^\lambda \sqrt{\pi})$ w ostrym wierzchołku A otworu w funkcji kąta rozwarcia 2β dla jednokierunkowego ($q=0$) i wszechstronnego ($p=q$) rozciągania płaszczyzny z otworem rombownym (Rys. 4a) i soczewkowym (Rys. 4b).

Przedstawione dane dobrze zgadzają się z dostępnymi wynikami otrzymanymi innymi metodami (Morozov 1984, Noda i in. 1996, Dunn i in. 1997).

Znając WIN dla otworów ostrokątnych i opierając się na zależności (6) można łatwo skonstruować formuły interpolacyjne do wyznaczania współczynników koncentracji naprężeń $k_A = \sigma_{\max} / p$ w wierzchołkach A zaokrąglonych dowolnym promieniem krzywizny ρ (Savruk, Kazberuk 2007a). Obliczenia wykazały, że takie wzory można wygodnie zapisać w postaci

$$k_A = 1 - q/p + 2[1 - b \tanh[c \ln \epsilon]] / \epsilon^\lambda, \quad 0 < \epsilon = \rho/l \leq 1, \quad (9)$$

gdzie parametr b znajduje się z równania

$$2(1+b) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\epsilon^\lambda k_A] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\epsilon^\lambda (\sigma_s)_{\max}] / p = F_1^V R_l / \sqrt{2},$$

a stałą c można wyznaczyć, na przykład, metodą najmniejszych kwadratów. Przykładowe wartości dla przypadku wąskiego otworu (szczeliny fizycznej; $R=\infty$) długości $2l$ i stałej szerokości $2p$, o wierzchołkach w kształcie półokręgów o promieniu ρ ($\beta=0, \lambda=0,5, R_l=2,992$) są następujące:

$$F_1^V = 1, \quad b = 0,05677, \quad c = 0,3718 \quad (q = 0);$$

$$F_1^V = 1, \quad b = 0,05677, \quad c = 0,6502 \quad (q = p);$$

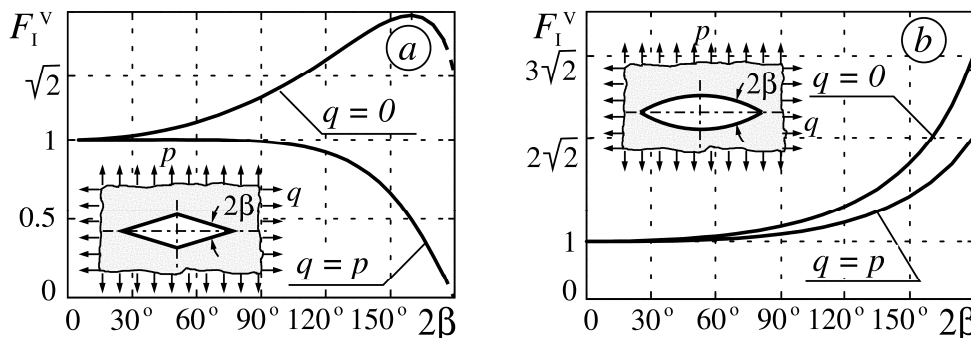
a dla otworu kwadratowego z zaokrąglonymi wierzchołkami ($2\beta=\pi/2, \lambda=0,45552, R_l=2,901$):

$$F_1^V = 1,484, \quad b = 0,2995, \quad (q = 0);$$

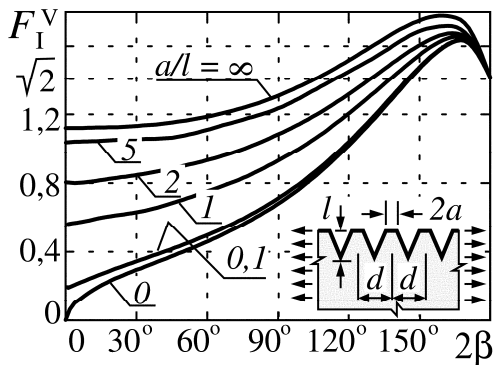
$$F_1^V = 1,158, \quad b = 0,01427, \quad c = 2,715, \quad (q = p).$$

Względny błąd oszacowania (9) dla wybranych wartości stałych b i c nie przekracza 0,5% dla całego zakresu zmienności parametru ϵ .

W praktyce współczynniki koncentracji naprężeń dla tego typu otworów oblicza się wykorzystując pojęcie „elipsy ekwiwalentnej” (Peterson 1974), tj. elipsy opisanej na danym koncentratorze naprężeń, której dłuższa półoś jest równa długości koncentratora a minimalny promień krzywizny jest równy promieniowi zaokrąglenia wierzchołka otworu. Obliczone w ten sposób współczynniki koncentracji naprężeń obarczone są niewielkim błędem względnym przy stosunkowo niewielkich wartościach parametru ϵ . Kiedy parametr ϵ dąży do zera, błąd narasta w sposób nieograniczony dla $\beta > 0$. Jedyne w przypadku szczeliny fizycznej ($\beta=0$) błąd osiąga wartość skończoną równą 5,4%. Zauważmy, że podobna sytuacja ma miejsce również w przypadkach przybliżonych rozwiązań analitycznych dla otworów kwadratowych i owalnych (Savin 1968), otrzymywanych metodą odwzorowań konforemnych. Zmniejszanie promienia zaokrąglenia wierzchołka otworu, (co można osiągnąć zwiększając liczbę członów szeregu rozwinięcia funkcji odwzorowującej) prowadzi do zmiany kształtu krzywej w otoczeniu wierzchołka w ten sposób, że zbliża się on do paraboli. Fakt ten, tłumaczy brak możliwości dokonania tymi metodami przejścia granicznego od współczynników koncentracji do współczynników intensywności naprężeń w wierzchołkach karmów i otworów ostrokątnych.



Rys. 4. Zależność bezwymiarowego WIN $F_1^V = K_1^V / (p l^\lambda \sqrt{\pi})$ w wierzchołku rombownego (a) i soczewkowego (b) otworu od kąta 2β



Rys. 5. Zależność bezwymiarowego WIN F_1^V od kąta rozwarcia 2β dla różnych stosunków odległości pomiędzy krawędziami okresowymi

Rozparzono układ periodycznych krawędzi w krawędzi półpłaszczyzny sprężystej (Savruk i Kazberuk, 2008) (patrz schemat na Rys. 5). Zadanie rozwiązano metodą osobliwych równań całkowych z wykorzystaniem zależności (6). Funkcję bezwymiarowego WIN $F_1^V = K_1^V / (p l^{\lambda} \sqrt{\pi})$ w zależności od kąta rozwarcia karbu 2β dla różnych wartości stosunku a/l pokazano na Rys. 7. W przypadku tym p to naprężenia rozciągające w nieskończoności, l – głębokość, d – okres, $2a$ – szerokość prostoliniowego odcinka krawędzi półpłaszczyzny pomiędzy krawędziami. Dla $2\beta = \pi$ osobliwość pola naprężeń zanika, stąd wartość $F_1^V = \sqrt{2}$, co jest następstwem przyjętej definicji WIN. Jeżeli $\beta \rightarrow 0$, wyniki obliczeń zbliżają się do znanych wartości WIN dla periodycznego systemu szczelin krawędziowych (Savruk, 1988). Krzywa $a/l = \infty$ odpowiada znanym wartościom (Savruk, Kazberuk, 2007a) dla pojedynczego karbu w krawędzi półpłaszczyzny i dobrze zgadza się z wcześniej opublikowanymi wynikami (Gross i Mendelson, 1972; Theocaris i Ioakimidis, 1979; Noda i inni, 1996; Strandberg, 1999; Dunn i inni, 1997; Chen, 1995; Noda i Takase, 2003; Dini, i Hills 2004) dla odpowiednich kątów rozwarcia karbu.

Przypadek rozciągania płaszczyzny sprężystej z dwoma symetrycznymi, zaokrąglonymi krawędziami przedstawiono schematycznie na Rys. 6a. Wykorzystując metodę osobliwych równań całkowych (Savruk, 1981), otrzymano

zależność współczynnika koncentracji naprężeń w wierzchołkach krawędzi $k_t = \sigma_{\max} / (P / (2a))$ od względnego promienia krzywizny $\chi = \rho / a$, gdzie $2a$ – szerokość przewężenia (Rys. 6a). Jeżeli parametr χ dąży do zera, iloczyn $k_t \chi^\lambda$ szybko osiąga wartości asymptotyczne, przy czym szybciej asymptotę osiągają krzywe odpowiadające małym kątom rozwarcia 2β . W ten sposób obliczono wielkości bezwymiarowego WIN $F_1^V = K_1^V \sqrt{\pi} a^{1-\lambda} / P$ w ostrych wierzchołkach krawędzi w funkcji kąta rozwarcia 2β (Rys. 6b).

Dla szczeliny zewnętrznej ($\beta = 0$) otrzymano $F_1^V = 1$, co odpowiada znanemu, dokładnemu rozwiązaniu (patrz np. Savruk, 1988). W drugim skrajnym przypadku ($2\beta = \pi$) przy $k_t = 1$, $\lambda = 0$, $R_1 = 1$, otrzymuje się $F_1^V = \pi / \sqrt{2}$.

Zależność bezwymiarowego WIN F_1^V od wykładnika osobliwości λ można aproksymować funkcją

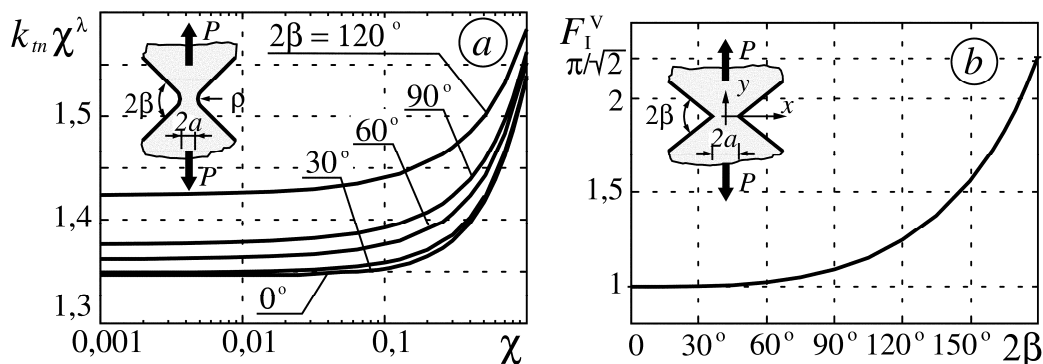
$$F_1^V = \frac{1 - 0,9134\lambda \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)}{1 + 0,4138\lambda \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)}, \quad 0 \leq \lambda \leq 0,5, \quad (10)$$

której względny błąd nie przekracza 0,5% dla całego przedziału zmienności parametru λ .

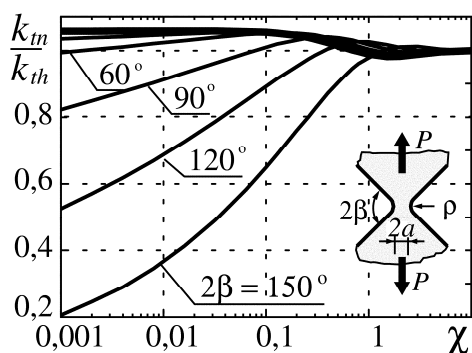
Powszechnie znane dokładne analityczne rozwiązanie dla współczynników koncentracji naprężeń w wierzchołkach symetrycznego układu krawędzi hiperbolicznych, otrzymał Neuber (1937):

$$k_{th} = \frac{\sigma_{\max}}{P / (2a)} = \frac{2(1 + \chi)}{\chi + (1 + \chi)\sqrt{\chi} \arctan \sqrt{1/\chi}}, \quad \chi = \frac{\rho}{a}, \quad (11)$$

gdzie ρ – promień krzywizny w wierzchołku karbu, a $2a$ – odległość pomiędzy wierzchołkami. Jak wynika ze wzoru (11), współczynnik koncentracji naprężeń jest funkcją tylko jednego parametru χ , przy czym parametr ten jest związany z kątem β zależnością $\chi = \tan^2 \beta$, tj. przy χ dążącym do zera, kąt β również zdąży do zera. Ta właściwość nie pozwala na znalezienie WIN dla krawędzi ostrych, poprzez przejście graniczne z wykorzystaniem rozwiązania (11), poza przypadkiem szczeliny zewnętrznej, gdy kąt $\beta = 0$.



Rys. 6. Zależność funkcji $k_t \chi^\lambda$ od względnego promienia krzywizny $\chi = \rho / a$ dla różnych kątów rozwarcia karbu 2β (a) i bezwymiarowego WIN $F_1^V = K_1^V \sqrt{\pi} a^{1-\lambda} / P$ w wierzchołku karbu ostry od kąta rozwarcia karbu 2β (b)



Rys. 7. Zależność wartości współczynników koncentracji naprężeń k_m i k_{th} od względnego promienia krzywizny χ dla różnych kątów rozwarcia 2β

Z porównania obliczonych współczynników koncentracji naprężeń dla karbów zaokrąglonych z rozwiązaniem (11) (Rys. 7) wynika, że zależność (11) dobrze opisuje karb zaokrąglony jedynie dla dużych względnych promieni krzywizny wierzchołka ($\chi \geq 10$). W przypadku szczeliny zewnętrznej ($\beta=0$) względna różnica dochodzi do 6%, przy wartości parametru χ dążącym do zera. Dla kątów rozwarcia karbów $2\beta > 0$ różnica ta dąży do nieskończoności, ponieważ uwzględniona we wzorze (11) osobliwość typu pierwiastek kwadratowy ze względnego promienia krzywizny, nie odpowiada wykładnikowi osobliwości dla karbów ostrych o różnym od zera kącie rozwarcia.

Używając metody najmniejszych kwadratów określono wzory aproksymujące wartość współczynnika koncentracji naprężeń w wierzchołku zewnętrznej szczeliny fizycznej ($\beta=0$):

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{P/(2a)} = \frac{1,058 - 0,440\chi + 1,970\chi^2}{1 - 0,352\chi + 1,970\chi^2} k_{th}, \quad \chi \geq 0, \quad (12)$$

gdzie k_{th} obliczane jest ze wzoru (11). Względny błąd aproksymacji (12) nie przekracza 0,5% dla dowolnych wartości parametru χ .

Wykorzystując związek pomiędzy współczynnikami koncentracji i intensywności naprężeń dla karbów ostrych (6), można zbudować zależność aproksymacyjną dla dowolnych kątów β w postaci

$$k_{td} \approx 1 + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{R_1 F_1}{\chi^\lambda (1 + a\chi^\lambda + b\chi)}, \quad (13)$$

gdzie wartości R_1 , λ i F_1 oblicza się odpowiednio ze wzorów (7), (8) i (10). Współczynniki a i b dla wybranych wartości kąta β przedstawiono w tabelicy 1. Dla tych przypadków względny błąd aproksymacji (13) nie przekracza 3%.

Formuły (12), (13), jako asymptotyczne zależności dla karbów głębokich, można wykorzystać do przybliżonej oceny wartości współczynników koncentracji naprężeń w elementach z takimi karbami, co pokazano na przykładzie rozciąganego pasma z obustronnymi karbami o zaokrąglonych wierzchołkach i kątach rozwarcia $2\beta = \pi/3$ (patrz schemat na Rys. 8).

Próbki takiego typu są wykorzystywane do badań wpływu karbów na wytrzymałość statyczną i zmęczeniową materiałów (Davis, 2004). W tym przypadku znana jest

(Noda i inni, 1995) dosyć dokładna zależność aproksymacyjna wartości współczynnika koncentracji naprężeń od parametrów $\varepsilon = \rho/l$ i $\gamma = 2l/d$:

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{P/(2a)} = (1 - 1,0340\gamma - 0,1447\gamma^2 + 0,9246\gamma^3 - 0,6667\gamma^4) k_{tV}, \quad (14)$$

gdzie d – szerokość pasma, l – głębokość;

$$k_{tV} = (1,035 + 0,0261\sqrt{\varepsilon} - 0,145\varepsilon + 0,0842\varepsilon\sqrt{\varepsilon}) k_{tE},$$

$$k_{tE} = (1,121 - 0,2846\sqrt{\varepsilon} + 0,3397\varepsilon - 0,1544\varepsilon\sqrt{\varepsilon}) k_{tH},$$

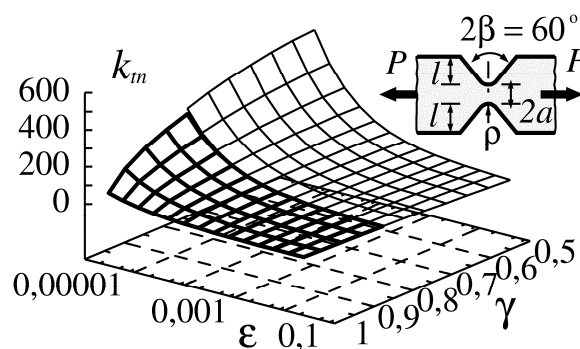
$$k_{tH} = 1 + 2/\sqrt{\varepsilon}.$$

Wzór (14) jest ważny dla $\gamma \leq 0,8$ i $\varepsilon\gamma \geq 0,02$ i w tych granicach, jego względny błąd nie przekracza 0,2%.

Porównanie wartości współczynników koncentracji naprężeń obliczone przy $\gamma=0,8$ ze wzoru (14) z odpowiednimi wartościami k_m dla karbów głębokich (13) wykazało, że względna różnica dla $\varepsilon > 0,005$ nie przekracza 1%. Wraz ze zmniejszaniem względnego promienia krzywizny karbu, ta rozbieżność monotonicznie zwiększa się, osiągając 2% przy $\varepsilon \approx 0,001$ oraz 5% przy $\varepsilon \approx 0,0001$. Wzór (13) może być dobrym uzupełnieniem aproksymacji (14) w przedziale $\gamma \geq 0,8$. Na Rys. 8 pokazano dostatecznie gładkie przejście pomiędzy wartościami obliczonymi z obu tych zależności.

Tab. 1. Wartości współczynników a i b we wzorze (13)

2β	a	b	2β	a	b
0°	0,731	0,715	60°	0,710	0,666
15°	0,714	0,733	90°	0,709	0,657
30°	0,718	0,699	120°	0,699	0,799
45°	0,710	0,682	150°	0,784	1,202



Rys. 8. Zależność współczynnika koncentracji naprężeń w wierzchołku przewężenia pomiędzy zaokrąglonymi karbami V o kącie rozwarcia $2\beta = \pi/3$ w funkcji parametrów ε i γ , obliczona ze wzorów (14) dla $\gamma \leq 0,8$ i (13) dla $\gamma \geq 0,8$

4. KRYTERIA PEKANIA CIAŁ STAŁYCH Z KARBAMI

Do oceny równowagi granicznej ciał z karbami, podobnie jak dla ciał ze szczelinami, wykorzystuje się kryteria naprężeniowe, odkształceniowe i energetyczne (Seweryn

i Łukaszewicz, 2002; Seweryn, 2003; Yosibash i inni, 2004). Obecnie, przypadkach obciążeń symetrycznych, najczęściej wykorzystywane jest naprężeniowe kryterium pękania w postaci (Čerepanov, 1974; Berkun i Procenko, 1985; Seweryn, 1994; Ibragimov, 1994; Dunn i inni, 1997a, 1997b):

$$\tilde{K}_I = K_{Ic}(\beta), \quad (15)$$

gdzie $K_{Ic}(\beta)$ – krytyczna wartość WIN, przy którym rozpoczyna się proces pękania. Wartości $K_{Ic}(\beta)$ zależą od kąta rozwarcia karbu, toteż nie można ich traktować jako charakterystyk materiałowych. Ustalenie zależności wartości $K_{Ic}(\beta)$ od kąta rozwarcia karbu β na drodze eksperymentalnej jest bardzo trudne, toteż często wyznacza się ją w sposób teoretyczny korzystając z innych kryteriów pękania.

Do oceny równowagi granicznej ciał z krawędziami wykorzystuje się także kryterium Novozhilova (1969a, 1969b), gdzie przyjmuje się, że pęknięcie następuje przez rozrywanie, a warunek zniszczenia ma postać:

$$\frac{1}{d_0} \int_0^{d_0} \sigma_{\theta\theta} dr \leq \sigma_c. \quad (16)$$

Tutaj $\sigma_{\theta\theta}$ – maksymalne naprężenia rozciągające wzdłuż promienia $\theta = \theta^*$, wychodzącego z wierzchołka koncentratora naprężeń, r – odległość od wierzchołka, σ_c – granica wytrzymałości nieuszkodzonego materiału, d_0 – parametr strukturalny. Podobne kryterium dla szczeliny zaproponował już Wieghardt (1907), później wykorzystywał je Neuber (1937) do oceny wytrzymałości ciał z ostrymi i zaokrąglonymi krawędziami. Co do fizycznej natury parametru d_0 uczeni wysuwają różne przypuszczenia (odległość międzyatomowa dla środowiska o regularnej strukturze atomowej, rozmiar ziarna w materiale polikrystalicznym itp.). Szacując graniczną równowagę ciała ze szczeliną z warunku (16) i kryterium Griffiths'a-Irwin'a, otrzymuje się związek parametru d_0 z krytycznym WIN K_{Ic} dla ciał ze szczelinami (Morozov, 1984; Knesl, 1991; Morozov, 2001; Seweryn 2003; Carpinteri i inni, 2008)

$$d_0 = (2/\pi) \left(K_{Ic} / \sigma_c \right)^2.$$

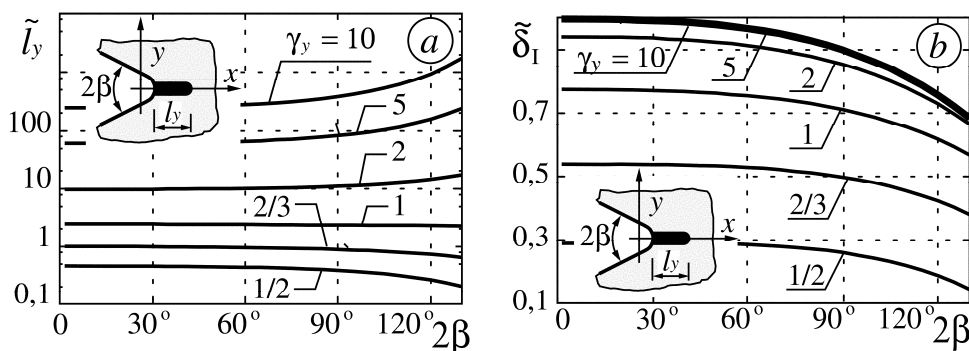
Na podstawie formuły (15) łatwo otrzymać analityczną zależność wielkości $K_{Ic}(\beta)$ od kąta rozwarcia karbu (Seweryn, 1994):

$$K_{Ic}(\beta) = (1 - \lambda) \sigma_c \left(2 K_{Ic} / \sigma_c \right)^{2\lambda}.$$

Kryterium (15) uogólniano później na przypadki pęknięcia w złożonych stanach naprężeń (Seweryn i Mróz, 1995; Mróz i Seweryn, 1998; Seweryn i Łukaszewicz, 2002). Kryterium wykorzystywane jest zarówno w stosunku do krawędzi ostrych jak i zaokrąglonych, przyjmując przy tym, że parametr d_0 ma wartość stałą, zależną od materiału. W literaturze niejednokrotnie wskazywano na niewystarczające podstawy takiego podejścia (patrz np. Morozov, 2001; Krasovs'kyi, 2006).

Do wyznaczenia warunków inicjacji procesu lokalnego zniszczenia ciał stałych z krawędziami stosowane są również kryteria energetyczne. (Sih i Ho, 1991; Seweryn, 1998; Leguillon, 2001, 2002; Lazzarin i Zambardi, 2001; Seweryn i Łukaszewicz, 2002; Seweryn, 2003; Yosibash i inni, 2004).

Bardziej szczegółowo zostaną rozpatrzone kryteria odkształceniowe pęknięcia, które opierają się na analizie odkształceń plastycznych w pobliżu wierzchołka karbu. Ponieważ strefy plastyczności w otoczeniu wierzchołka karbu w płaskim stanie naprężeń i odkształceń różnią się między sobą, zatem jest oczywiste, że i wartości rozwarcia w wierzchołku karbu (podstawowego parametru kryterium odkształceniowego) są różne. Do obliczenia rozwarcia δ_I w wierzchołku karbu, analogicznie jak w przypadku szczeliny, wykorzystuje się model pasm plastyczności (Panasyuk i inni, 1975; Panasyuk i Savruk, 1992). Kryterium to jest stosowane w przypadku ciał z krawędziami, jeżeli z wierzchołka karbu wychodzi jedno (płaski stan naprężeń (patrz Gomez i Elices, 2003; Savruk i inni, 2005) albo dwa symetryczne (płaski stan odkształcenia – Savruk i inni, 2005) pasma plastyczności. Podejście to wykorzystali również Gomez i Elices (2004) do analizy próbki prostokątnej z zaokrąglonym krawędziem.



Rys. 9. Zależność bezwymiarowego zasięgu pasma plastyczności \tilde{l}_y (a) i rozwarcia w wierzchołku karbu $\tilde{\delta}_I$ (b) dla różnych poziomów obciążenia γ_y w funkcji kąta rozwarcia karbu 2β

Rozpatrzmy płaszczyznę sprężystą z wyciętym zaokrąglonym karbem, z wierzchołka, którego wychodzi pasmo plastyczności (patrz schemat na Rys. 9). Brzeg karbu jest wolny od obciążeń a rozkład pola naprężeń w nieskończoności określa asymptotyka (5).

Zadanie sprężysto-plastyczne, w ramach modelu pasm plastyczności sprowadza się, jak wiadomo (Savruk i inni, 2003), do zadania sprężystego. Pasma plastyczności modeluje się rozcięciem nieznannej długości. Do rozwiązania zadania wykorzystano metodę osobliwych równań całkowych. Na Rys. 9 pokazano bezwymiarowy zasięg pasma plastyczności $\tilde{l}_y = l_y / \rho$ oraz rozwarcie w wierzchołku karbu $\tilde{\delta}_I = \delta_I (E / \sigma_y) (\sigma_y / \tilde{K}_I^V)^{1/\lambda}$ (płaski stan naprężenia) w funkcji kąta rozwarcia ramion karbu 2β , dla różnych poziomów obciążenia $\gamma_y = (2\pi\rho)^{-\lambda} \tilde{K}_I^V / \sigma_y$. Tutaj σ_y – granica plastyczności materiału, E – moduł Younga.

Przyjmuje się, że równowaga graniczna typu sprężysto-plastycznego zostanie naruszona wtedy, gdy rozwarcie δ_I w wierzchołku zaokrąglonego karbu V osiągnie swoją wartość krytyczną:

$$\delta_I = \delta_c \quad (17)$$

gdzie δ_c odnosi się do próbki w płaskim stanie naprężenia. Zakłada się, że wielkość δ_c jest stała dla danego materiału i nie zależy od kąta rozwarcia ramion karbu ani promienia zaokrąglenia wierzchołka. Jest krytyczną wartością rozwarcia dla odpowiedniej próbki ze szczeliną.

W warunkach małych plastycznych deformacji rozwarcie δ_c wyznacza się na podstawie wartości krytycznego WIN K_c dla próbki ze szczeliną (Panasyuk i inni, 1988):

$$\delta_c = K_c^2 / (E\sigma_y) \quad (18)$$

Przy założeniu, że długość strefy plastycznej jest znacznie mniejsza od rozmiaru koncentratora naprężeń, otrzymane powyżej rozwiązanie zadania może być zastosowane do próbek o skończonych rozmiarach, z wyciętymi karbami V, dla których znane są WIN \tilde{K}_I^V ($\rho=0$). Przy czym, równania kryterialne można zapisać na podstawie związków (17) i (18) w postaci

$$\tilde{\delta}_I \sigma_y^2 (\tilde{K}_I^V / \sigma_y)^{1/\lambda} = K_c^2$$

Z tego równania wyznacza się nieznanne obciążenie niszczące, od którego zależy WIN \tilde{K}_I^V . Pozostałe wielkości uważa się za znane. Zależność tą można również wykorzystać do doświadczalnego określania charakterystyki odporności na pęknięcie K_c na próbkach z zaokrąglonymi karbami typu V. Brak konieczności wytwarzania szczeliny w próbce ma szczególne znaczenie w przypadku badań materiałów bardzo kruchych (np. szkło, ceramika, beton, itp., patrz Morozov 2001).

Pragniemy nadmienić, że zaprezentowane w skrócie, ze względu na przeglądowy charakter pracy, nowe wyniki badań zagadnienia obustronnego karbu w płaszczyźnie sprężystej oraz deformacyjnego kryterium pęknięcia ciał

z karbami typu V, zostaną opublikowane w postaci bardziej szczegółowej w następnych pracach Autorów.

5. WNIOSKI

Przedstawiono przegląd badań z zakresu mechaniki pęknięcia ciał stałych z karbami typu V. Przeanalizowano metody rozwiązywania płaskich zadań teorii sprężystości dla obszarów z punktami kątowymi. Rozpatrzono zastosowanie metod elementów skończonych i brzegowych, kolokacji granicznych i metod osobliwych równań całkowych. Szczególną uwagę poświęcono jednolitemu podejściu do rozwiązywania zadań koncentracji naprężeń w otoczeniu karbów ostrych i zaokrąglonych. Podejście to oparte jest na zastosowaniu metody osobliwych równań całkowych do analizy obszarów sprężystych z karbami zaokrąglonymi, tzn. obszarów o gładkich brzegach. Wykorzystanie współczesnych komputerów i nowych metod obliczania całek quasi-osobliwych pozwoliło uzyskać rozwiązania zadań przy dostatecznie małych promieniach krzywizny w wierzchołkach karbów. Dokonując przejścia granicznego wyznaczono współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołkach karbów ostrych. Przedstawiono niektóre znane oraz nowe rezultaty otrzymane w oparciu o jednolite podejście. W części końcowej zaprezentowano kryterium pęknięcia ciał z karbami V. Na podstawie rozwiązania zadania rozkładu naprężeń w płaszczyźnie sprężystej osłabionej nieskończonym karbem zaokrąglonym, z pasmem plastyczności w wierzchołku, sformułowano oryginalne odkształceniowe kryterium pęknięcia ciał z ostrymi i zaokrąglonymi karbami.

LITERATURA

1. **Akin J. E.** (1976) The generation of elements with singularities, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 10, 1249–1259.
2. **Benthem J. P.** (1987) Stresses in the region of rounded corners, *Int. J. Solids Struct.*, 23(2), 239 – 252.
3. **Berkun V. B., Procenko A. M.** (1985) Численное решение плоской задачи механики хрупкого разрушения, *Механика твердого тела. Изв. АН СССР*, 4, 141–147.
4. **Brahtz J. H. A.** (1933a) Stress distribution in a reentrant corner, *Trans. ASME.*, 55, 31–37.
5. **Brahtz J. H. A.** (1933b) Stress distribution in wedges with arbitrary boundary forces, *J. Appl. Phys.*, 4(2), 56–65.
6. **Carpenter W. C.** (1984) A collocation procedure for determining fracture mechanics parameters at a corner, *Int. J. Fract.*, 24(4), 255–266.
7. **Carpenter W. C.** (1985) The eigenvector solution for a general corner or finite opening crack with further studies on the collocation procedure, *Int. J. Fract.*, 27, 63–73.
8. **Carpinteri A., Cornetti P., Pugno N., Sapora A., Taylor, D.** (2008) A finite fracture mechanics approach to structures with sharp v-notches, *Eng. Fract. Mech.*, 75, 1736 – 1752.
9. **Chen D. H.** (1995) Stress intensity factors for V-notched strip under tension or in-plane bending, *Int. J. Fract.*, 70, 81–97.
10. **Chen Y.-H., Lu T. J.** (2004) On the path dependence of the J-integral in notch problems, *Int. J. Solids Struct.*, 41, 607–618.
11. **Čerepanov G. P.** (1974) *Механика хрупкого разрушения*. Наука.
12. **Davis J. R.** (2004) *Tensile Testing*. ASM International, 2 edn.

13. **Dini D., Hills D.** (2004) Asymptotic characterization of nearly-sharp notch root stress fields, *Int. J. Fract.*, 130, 651–666.
14. **Dunn M. L., Suwito W., Cunningham S., May C. W.** (1997) Fracture initiation at sharp notches under mode i, mode ii, and mild mixed mode loading, *Int. J. Fract.*, 84(4), 367–381.
15. **Dunn M. L., Suwito W., Cunningham S.** (1997a) Fracture initiation at sharp notches: correlation using critical stress intensities, *Int. J. Solids Struct.*, 34(29), 3873–3883.
16. **Dunn M. L., Suwito W., Cunningham S.** (1997b) Stress intensities at notch singularities, *Eng. Fract. Mech.*, 57(4), 417–430.
17. **Fan Z., Long Y.** (1992) Sub-region mixed finite element analysis of v-notched plates, *Int. J. Fract.*, 56, 333–344.
18. **Filippi S., Lazzarin P., Tovo R.** (2002) Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates, *Int. J. Solids Struct.*, 39, 4543–4565.
19. **Gecic M. R.** (1983) An integral equation approach for simultaneous solution of rectangular hole and rectangular block problems, *Int. J. Eng. Sci.*, 21(9), 1041–1051.
20. **Givoli D., Rivkin L.** (1993) The dtn finite element method for elastic domains with cracks and entrant corners, *Comput. Struct.*, 49, 633–642.
21. **Givoli D., Rivkin L., Keller J. B.** (1992) A finite element method for domains with corners, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 35(6), 1329–1345.
22. **Gomez F. J., Elices M.** (2003) A fracture criterion for sharp v-notched samples, *Int. J. Fract.*, 123, 163–175.
23. **Gomez F. J., Elices M.** (2004) A fracture criterion for blunted v-notched samples, *Int. J. Fract.*, 127(3), 239–264.
24. **Gross B., Mendelson A.** (1972) Plane elastostatic analysis of v-notched plates, *Int. J. Fract. Mech.*, 8(3), 267–276.
25. **Ibragimov V., Romančák V. M.** (1984) O kriterii razrušeniâ dlâ oblastej c uglovymi točkami, *Teor. i prikl. meh.*, 11, 9–13.
26. **Kalandiâ A. I.** (1969) Zamečaniâ ob osobennosti uprugih rešenij vblizi uglov, *Prikl. matematika i mehanika*, 33(1), 132–135.
27. **Karp S. N., Karal F. C. J.** (1962) The elastic-field behaviour in the neighbourhood of a crack of arbitrary angle, *Commun. Pure Appl. Math.*, 15(4), 413–421.
28. **Kazberuk A.** (2007) Koncentracja napržeń wokół owalnego otworu, *Acta Mechanica et Automatica*, 1(2), 25–30.
29. **Keer L. M., Chantaramungkorn K.** (1975) An elastic half plane weakened by a rectangular trench, *J. Appl. Mech.*, 42(3), 683–687.
30. **Knesl Z.** (1991) A criterion of v-notch stability, *Int. J. Fract.*, 48, R79–R83.
31. **Krasovs'kyi A. Y.** (2006) On the "local approach" to the brittle fracture of structural materials, *Materials Science*, 42(2), 183–188.
32. **Lazzarin P., Tovo R.** (1996) A unified approach to the evaluation of linear elastic stress fields in the neighbourhood of cracks and notches, *Int. J. Fract.*, 78(1), 3–19.
33. **Lazzarin P., Zambardi R.** (2001) A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp v-shaped notches, *Int. J. Fract.*, 112(3), 275–298.
34. **Leguillon D.** (2001) A criterion for crack nucleation at a notch in homogeneous materials, *C.r. Acad. sci., Ser. 2b*, 329, 97–102.
35. **Leguillon D.** (2002) Strength or toughness? a criterion for crack onset at a notch, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 21, 61–72.
36. **Lin K. Y., Tong P.** (1980) Singular finite elements for the fracture analysis of v-notched plate, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 15(9), 1343–1354.
37. **Livieri P.** (2003) A new path independent integral applied to notched components under mode i loading, *Int. J. Fract.*, 123, 107–125.
38. **Morozov, E. M.** (2001) Opredelenie vâzkosti razrušeniâ na obrazcah s razrezami. Išlinskij, A. U. (ed.), *Problemy mehaniki neuprugih deformacij*, 229–235, Fizmatlit.
39. **Morozov N. F.** (1984) *Matematičeskie voprosy teorii trešin*. Nauka, Moskva.
40. **Mroz Z., Seweryn A.** (1998) Non-local failure and damage evolution rule: application to a dilatant crack model, *Journal De Physique. IV : JP*, 8(8), 257–268.
41. **Muskhelišvili N. I.** (1966) *Nekotorye osnovnye zadači matematičeskoj teorii uprugosti*. Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR, 5 edn.
42. **Neuber H.** (1937) *Kerbspannungslehre: Grundlagen für genaue Spannungsrechnung*. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1 edn.
43. **Noda N. A., Oda K., Inoue T.** (1996) Analysis of newly-defined stress intensity factors for angular corners using singular integral equations of the body force method, *Int. J. Fract.*, 76, 243–261.
44. **Noda N.-A., Sera M., Takase Y.** (1995) Stress concentration factors for round and flat test specimens with notches, *Int. J. Fatig.*, 17(3), 163–178.
45. **Noda N.-A., Takase Y.** (2003) Generalized stress intensity factors of v-shaped notch in a round bar under torsion, tension, and bending, *Eng. Fract. Mech.*, 70(11), 1447–1466.
46. **Novožilov V. V.** (1969a) O neobhodimom i dostatočnom kriterii hrupkoj pročnosti, *Prikl. matematika i mehanika*, 33(2), 212–222.
47. **Novožilov, V. V.** (1969b) K osnovam teorii pavnovesnyh trešin v uprugih telah, *Prikl. matematika i mehanika*, 33(5), 797–812.
48. **Panasûk V. V., Andrejkiv A. E., Parton V. Z.** (1988) *Osnovy mehaniki razrušeniâ materialov*. Naukova Dumka.
49. **Panasyuk V. V., Savruk M. P.** (1992) Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics, *Materials Science*, 28(1), 41–57.
50. **Panasyuk V. V., Vitvitskii P. M., Yarema S. Y.** (1975) Plastic deformation around crack and fracture criteria, *Eng. Fract. Mech.*, 7(2), 305–319.
51. **Peterson R. E.** (1974) *Stress concentration factors*. John Wiley & Sons, 1 edn.
52. **Petkov Z. B., Gospodinov G. K.** (1992) Evaluation of fracture mechanics parameters for a general corner using a weight function method, *Acta Mech.*, 93, 145–155.
53. **Portela A., Aliabadi M. H., Rooke D. P.** (1991) Efficient boundary element analysis of sharp notched plates, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 32, 445–470.
54. **Rice J. R.** (1968) A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks, *J. Appl. Mech.*, 35(2), 379–386.
55. **Rösel R.** (1987) On the wedge/notch eigenvalue, *Int. J. Fract.*, 33(1), 61–71.
56. **Savin G. N.** (1968) *Raspredelenie napržeńij okolo otverstij*. Kiev, Naukova Dumka, Kiev.
57. **Savruk M. P.** (1981) *Dvumernye zadači uprugosti dlâ tel s trešinami*. Naukova Dumka, Kiev.
58. **Savruk M. P.** (1988) *Koëfficienty intensivnosti napržeńij v telah s trešinami*, vol. 2 of *Mehanika razrušeniâ i pročnost' materialov: Sprav. posobie pod red. V.V. Panasûka*. Naukova Dumka, Kiev.
59. **Savruk M. P., Dacyšin A. P.** (1974) O vzaimodejstvii sistemy trešin s granicej uprogogo tela, *Prikladnâ mehanika*, 10(7), 84–92.

60. **Savruk M.P., Kazberuk A.** (2006) Relationship between the stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded notches, *Materials Science*, 42(6), 725 – 738.
61. **Savruk M.P., Kazberuk A.** (2007a) A unified approach to problems of stress concentration near v-shaped notches with sharp and rounded tip, *Int. Appl. Mech.*, 43(2), 182 – 197.
62. **Savruk M. P., Kazberuk A.** (2007b) Edinyj podhod k rešeniu zadač o raspredelenii naprâženij okolo ostryh i zakruglennyh uglovyh vyrezov, Mhitarân, S. M. (ed.), *Aktual'nye problemy mehaniki splošnoj sredy*, 359–363, Erevan, Erevanskij gos. un-t arhitektury i stroitel'stva.
63. **Savruk M. P., Kazberuk A.** (2008) Plane periodic boundary-value problem of elasticity theory for a half-plane with curvilinear edge, *Material Science*, 44(4), 461–470.
64. **Savruk M. P., Osiv P. N., Prokopčuk I. V.** (1989) *Čislennyj analiz v ploskih zadačah teorii trešin*. Naukova Dumka, Kiev.
65. **Savruk M. P., Zavodovs'kyi A. M., Panasyuk V. E.** (2005) Pro rujnuvannâ til z kutovimi birizami v umovah ploskoï deformacii, *Mehanika i fizika rujnuvannâ budivel'nih materialiv ta konstrukcij*, 6, 140–147, L'viv.
66. **Savruk M. P., Zavodovs'kyi A. M., Panasyuk V. E., Bida N. M.** (2003) Deformation fracture criterion for bodies with v-notches under symmetric loading, *Materials Science*, 39(2), 185 – 196.
67. **Seweryn A.** (1990) Asymtetyczne metody obliczania współczynników intensywności naprężeń dla karbów trójkątnych w płaskich zagadnieniach teorii sprężystości, *Rozprawy Inżynierskie*, 38, 467 – 486.
68. **Seweryn A.** (1994) Brittle fracture criterion for structures with sharp notches, *Eng. Fract. Mech.*, 47, 673 – 681.
69. **Seweryn A.** (1998) Non-local stress and strain energy release rate mixed mode fracture initiation and propagation criteria, *Eng. Fract. Mech.*, 59(6), 737 – 760.
70. **Seweryn A.** (2002) Modeling of singular stress fields using finite element method, *Int. J. Solids Struct.*, 39, 4787 – 4804.
71. **Seweryn A.** (2003) *Metody numeryczne w mechanice pękania*. Warszawa, IPPT PAN.
72. **Seweryn A., Adamowicz A.** (2002) Modelowanie pól naprężeń w elementach ze szczelinami i ostrymi karbami, *Przegląd Mechaniczny*, 1, 36–41.
73. **Seweryn A., Molski K.** (1996) Elastic stress singularities and corresponding generalized stress intensity factors for angular corners under various boundary conditions, *Eng. Fract. Mech.*, 55(4), 529 – 556.
74. **Seweryn A., Łukaszewicz A.** (2000) Numeryczne metody modelowania zagadnień liniowej mechaniki pękania, *Przegląd Mechaniczny*, 5-6, 36–42.
75. **Seweryn A., Łukaszewicz A.** (2002) Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches, *Eng. Fract. Mech.*, 69, 1487 – 1510.
76. **Seweryn A., Mróz Z.** (1995) Non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading, *Eng. Fract. Mech.*, 51(6), 955 – 973.
77. **Sih G. C., Ho J. W.** (1991) Sharp notch fracture strength characterized by critical energy density, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 16, 179–214.
78. **Sinclair G. B., Okajima M., Griffin J. M.** (1984) Path independent integrals for computing stress intensity factors at sharp notches in elastic plates, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 20, 999–1008.
79. **Strandberg M.** (1999) A numerical study of the elastic stress field arising from sharp and blunt v-notches in sent-specimen, *Int. J. Fract.*, 100(4), 329–342.
80. **Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.** (1979) The v-notched elastic half-plane problem, *Acta Mechanica*, 32, 125–140.
81. **Vasilopoulos D.** (1988) On the determination of higher order terms of singular elastic stress fields near corner, *Numer. Math.*, 53, 51–95.
82. **Wiegardt K.** (1907) Über das spalten und zerreißen elastischer körper, *Z. Mathematik und Physik.*, 55(2), 60–103. (Wiegardt K. On splitting and cracking of elastic bodies, *Fat. Fract. Eng. Mater. Struct.*, 1995, 18, 1371-1405)
83. **Williams M. L.** (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, *J. Appl. Mech.*, 19(4), 526–530.
84. **Yosibash Z., Bussiba A., Gilad I.** (2004) Failure criteria for brittle elastic materials, *Int. J. Fract.*, 125(3-4), 307–323.

ON SELECTED FRACTURE MECHANICS PROBLEMS FOR BODIES WITH SHARP AND ROUNDED V-NOTCHES

Abstract: The review of research in the field of fracture mechanics of solids with V-shaped notches was presented. First, we analyzed methods for solving two-dimensional problems of elasticity for domains with angular points. We considered numerical methods of finite and boundary elements, boundary collocation and method of singular integral equations. Particular attention was paid to a unified approach to solving problems of stress concentration near the sharp and rounded V-notches. This approach is based on applying the method of singular integral equations for elastic domains with rounded corners, i.e. the areas with a smooth border. Using modern computers and new methods of calculating quasi-singular integrals allowed obtaining solutions of problems for very small radii of curvature at the notch apex. Applying limit transition we found the stress intensity factors in sharp V-notch vertices. Some known and new results were obtained by this approach. Then, we considered the fracture criteria of solids with notches. Based on the solution of the problem of rounded V-notch with plastic strip at top a new deformation fracture criterion was proposed.