

WYZNACZANIE PRZEDZIAŁU NIEPEWNOŚCI APROKSYMACJI DYSKRETNEJ NIEUSTALONEGO ZAGADNIENIA WENTYLACJI POMIESZCZENIA MIESZKALNEGO

Mirosława KOŁODZIEJCZYK*

*Zakład Techniki Ciepłej i Chłodnictwa, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

mirka@pb.edu.pl

Streszczenie: Praca poświęcona jest oszacowaniu przedziału niepewności aproksymacji dyskretnej nieustalonego zagadnienia wentylacji pomieszczenia mieszkalnego. Obliczenia numeryczne przeprowadzono z wykorzystaniem programu ANSYS-CFX. Szczegółowa analiza wykazała, że ich wyniki znajdują się poza przedziałem zbieżności asymptotycznej. Na ich przykładzie zbadano przydatność istniejących metod weryfikacji w różny sposób uwzględniających nieasymptotyczność rozwiązań. Przedział niepewności wyznaczono dla przyjętego poziomu ufności 0.95.

1. WPROWADZENIE

W literaturze naukowej ostatnich lat pojawiło się wiele publikacji dotyczących wykorzystania numerycznej mechaniki płynów w rozwiązywaniu zadań inżynierskich. Fakt ten został spowodowany szybkim rozwojem komercyjnych programów obliczeniowych, które w znacznym stopniu poszerzyły dotychczasowe możliwości obliczeń zagadnień praktycznych. Właściwe ich wykorzystanie w praktyce inżynierskiej, zwłaszcza projektowej, wymaga przeprowadzenia oceny niepewności otrzymanych wyników. Z tego względu w obliczeniach numerycznych dąży się do prezentowania wyników obliczeń łącznie z przedziałem niepewności określonym na poziomie ufności 0.95 – na wzór badań doświadczalnych (Johnson i inni, 2006).

Na jakość obliczeń numerycznych mają wpływ liczne czynniki: założenia modelowe, aproksymacja dyskretna równań bilansowych, niedokładność odwzorowania geometrii, niepewności spowodowane niedokładnym zadaniem lub nieznanymi warunkami początkowymi i brzegowymi, wreszcie fakt iteracyjnego rozwiązywania zdyskretyzowanego zagadnienia ciepłno-przepływowego oraz właściwości oprogramowania i dostępnego sprzętu komputerowego.

W przypadku estymacji przedziału niepewności spowodowanej aproksymacją dyskretną podstawę większości metod stanowi uogólniona ekstrapolacja Richardsona. Jest ona ceniona za prostotę, elegancję i efektywność. Jej dodatkowe zalety to niezależność od metody rozwiązania zagadnienia numerycznego i możliwość przeprowadzenia po zakończeniu obliczeń. Wadą jest konieczność wykonania obliczeń na przynajmniej dwu lub trzech sukcesywnie zagęszczanych siatkach oraz wymóg asymptotycznej zbieżności wszystkich badanych rozwiązań. Oznacza to, że wszystkie siatki muszą być wystarczająco gęste. W ostatnich latach problem ten stanowił temat wielu artykułów naukowych (Celik i inni, 2006; Eca i Hoekstra, 2006; 2009; Johnson i inni, 2006; Stern i inni, 2004; Roache, 1997).

Uzyskanie asymptotycznej zbieżności wszystkich rozwiązań jest w praktycznych obliczeniach inżynierskich, odznaczających się skomplikowaną geometrią obszaru przepływu oraz dużą złożonością procesów fizycznych i chemicznych, trudno osiągalne. Z tego względu na szczególną uwagę zasługują prace naukowców badających wyniki obliczeń znajdujące się poza ścisłym przedziałem zbieżności asymptotycznej. Określanie przedziału niepewności takich rozwiązań zajmowali się m.in. Eca i Hoekstra (2006, 2009) oraz Stern i inni (2004).

Jednym z problemów obliczeniowych, w których trudno jest uzyskać rozwiązania asymptotyczne jest zagadnienie wentylacji pomieszczenia mieszkalnego, odznaczające się dużą złożonością geometryczną i fizyczną, spowodowaną obecnością wielu źródeł ciepła, koniecznością uwzględnienia w modelu fizycznym zjawiska konwekcji naturalnej, wymiany ciepła przez promieniowanie oraz wilgotności powietrza. Tematem niniejszej pracy jest badanie zbieżności rozwiązania numerycznego nieustalonego zagadnienia wentylacji pomieszczenia mieszkalnego oraz próba estymacji przedziału niepewności numerycznej spowodowanej aproksymacją dyskretną zagadnienia ciągłego. Rozwiązanie numeryczne uzyskano z wykorzystaniem programu ANSYS-CFX.

2. NIEPEWNOŚĆ APROKSYMACJI DYSKRETNEJ

Analizę błędów dyskretyzacji można przeprowadzić dla dowolnych istotnych zmiennych. W przypadku siatek niestrukturalnych, stosowanych m.in. z powodu konieczności odwzorowania skomplikowanej geometrii obszaru przepływu, zaleca się jej wykonanie dla wynikowych wielkości całkowitych ϕ , kluczowych dla danego zagadnienia i wrażliwych na zagęszczenie siatki (ANSYS-CFX Release 11.0, Johnson i inni, 2006; Roache, 1997).

Uogólnioną ekstrapolację Richardsona stosuje się do rozwiązań uzyskanych w wyniku obliczeń przeprowa-

dzonych według schematu numerycznego o dowolnym, znanym (formalnym) rzędzie dokładności p na dwu lub trzech podobnych geometrycznie siatkach o sukcesywnie rosnącym zagęszczeniu. Niech ϕ_3 oznacza rozwiązanie uzyskane na siatce o największym rozmiarze oczka h_3 , ϕ_2 – rozwiązanie uzyskane na siatce pośredniej (oczko h_2) i ϕ_1 – rozwiązanie na siatce o największym zagęszczeniu (oczko h_1). Stosunki wielkości oczek siatek (współczynniki zagęszczenia siatek) wyznacza się ze wzorów:

$$r_{21} = h_2 / h_1, \quad r_{32} = h_3 / h_2. \quad (1)$$

W przypadku siatek niestrukturalnych „oczkami” siatek są średnie liniowe wymiary objętości kontrolnych, obliczane jako :

$$h_i = \left(\frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta V_j) \right)^{1/D}, \quad (2)$$

gdzie $\sum_{j=1}^{N_i} (\Delta V_j)$ jest objętością obszaru przepływu, N_i liczbą

węzłów (objętości kontrolnych ΔV_j) „ i -tej” siatki a D oznacza wymiarowość rozpatrywanego zagadnienia.

Symulacje numeryczne procesów nieustalonych wprowadzają do analizy błędów dyskretyzacji jeszcze jedną zmienną – czas, który w obliczeniach z zastosowaniem równań Reynoldsa RANS traktuje się jako dodatkowy wymiar siatki (Celik i inni, 2006; Johnson i inni, 2006). Oznacza to konieczność zmodyfikowania średniego liniowego wymiaru objętości kontrolnej tak, by uwzględniał krok czasowy. Celik i inni (2006) przedstawiają następujący sposób uogólnienia wymiaru liniowego:

$$h_i = (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta x_t)^{1/4}, \quad (3)$$

gdzie Δx , Δy , Δz to wymiary objętości kontrolnych w poszczególnych kierunkach przestrzennych, $\Delta x_t = u_{ch} \Delta t$; u_{ch} jest prędkością charakterystyczną a Δt krokiem czasowym.

Warunek asymptotycznej zbieżności rozwiązań ϕ_1 , ϕ_2 i ϕ_3 oznacza, że wymiar h_i musi być wystarczająco mały, by członem dominującym w rozwinięciu rozwiązania numerycznego ϕ_i w szereg Taylora wokół rozwiązania dokładnego ϕ_{ext} był człon h^p , co pozwala na przedstawienie ich w postaci:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{ext} + g_p h_1^p, \\ \phi_2 &= \phi_{ext} + g_p (r_{21} h_1)^p, \\ \phi_3 &= \phi_{ext} + g_p (r_{32} r_{21} h_1)^p. \end{aligned} \quad (4)$$

Każda para rozwiązań może służyć jako podstawa do wyznaczenia ekstrapolowanego rozwiązania poprawionego ($p+1$) rzędu dokładności, np.:

$$\phi_1^{21} = \frac{\phi_1 r_{21}^p - \phi_2}{r_{21}^p - 1}, \quad \phi_2^{32} = \frac{\phi_2 r_{32}^p - \phi_3}{r_{32}^p - 1}. \quad (5)$$

Ekstrapolacja Richardsona pozwala również na oszacowanie bezwzględnego błędu dyskretyzacji jako:

$$\phi_1 - \phi_{ext} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{r^p - 1}, \quad (6)$$

gdzie p oznacza formalny lub obserwowany rząd zbieżności metody.

Obserwowany na podstawie rozwiązań rząd schematu numerycznego p powinien być równy rzędowi formalnemu metody. Brak zgodności oznacza, że otrzymane rozwiązania znajdują się poza zakresem zbieżności asymptotycznej i tym samym poza zakresem obowiązywania metody szacowania niepewności rozwiązania opartej wyłącznie na ekstrapolacji Richardsona.

Wyznaczenie obserwowanego p wymaga przeprowadzenia obliczeń na przynajmniej trzech siatkach o różnym zagęszczeniu. Wyznacza się go iteracyjnie jako rozwiązanie równania:

$$\frac{\phi_3 - \phi_2}{r_{32}^p - 1} = r_{21}^p \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{r_{21}^p - 1} \right) \quad (7)$$

wynikającego z rozwinięć (4).

Roache (1997) udowodnił, że błąd względny dyskretyzacji rozwiązania na siatce o największej gęstości można wyrazić jako:

$$\left| \frac{\phi_{ext} - \phi_1}{\phi_{ext}} \right| = \left| \frac{\phi_{ext} - \phi_1}{\phi_1} \right| = \left| \frac{\phi_2 - \phi_1}{\phi_1} \right| / (r_{21}^p - 1) \quad (8)$$

oraz zaproponował estymację przedziału niepewności aproksymacji dyskretnej za pomocą indeksu zbieżności siatkowej (grid convergence index):

$$GCI_1^{21} = \frac{F_s}{r_{21}^p - 1} \left| \frac{\phi_2 - \phi_1}{\phi_1} \right| \quad (9)$$

gdzie F_s jest współczynnikiem bezpieczeństwa.

Współczynnik bezpieczeństwa F_s dobiera się w zależności od liczby siatek zastosowanych do wyznaczenia GCI oraz wartości obserwowanego p . Wartość $F_s = 1.25$ przyjmuje się, gdy rząd dokładności p określono biorąc za podstawę rozwiązania na trzech siatkach i jest on równy formalnemu rzędowi schematu numerycznego, tzn. wszystkie rozwiązania znajdują się w zakresie zbieżności asymptotycznej; $F_s = 3$ stosuje się, gdy użyto tylko dwu siatek lub gdy obserwowany i formalny rząd aproksymacji nie są sobie równe.

Większość ze stosowanych obecnie sposobów szacowania przedziału niepewności numerycznej wykorzystuje w ten czy inny sposób wskaźnik GCI modyfikując jedynie wartość współczynnika bezpieczeństwa F_s w zależności od rodzaju zbieżności rozwiązania i wielkości obserwowanego p . GCI z przedstawionym powyżej sposobem doboru współczynnika bezpieczeństwa F_s jest polecany m.in. przez ASME Journal of Fluid Engineering do oceny zbieżności i oszacowania przedziału niepewności aproksymacji dyskretnej (<http://journaltool.asme.org/Templates/JFENumAccuracy.pdf>).

Dysponując trzema rozwiązaniami niektórzy autorzy (Stern i inni, 2004) definiują zbieżność lub rozbieżność rozwiązania numerycznego współczynnikiem zbieżności:

$$R = (\phi_2 - \phi_1) / (\phi_3 - \phi_2), \quad (10)$$

czyli stosunkiem różnicy rozwiązań z „sąsiednich” siatek, który może przyjmować następujące wartości: $0 < R < 1$, oznaczającą zbieżność monotoniczną; $-1 < R < 0$, wskazującą na zbieżność oscylacyjną lub $|R| > 1$, oznaczającą rozbieżność rozwiązań. Eca i Hoekstra (2006, 2009) zbieżność oceniają na podstawie wartości p wyznaczonego metodą najmniejszych kwadratów z rozwiązań uzyskanych dla przynajmniej czterech siatek.

Większość autorów nie przeprowadza rachunku błędów dla rozwiązań rozbieżnych. Eca i Hoekstra (2006) w przypadku obliczeń wykonanych z zastosowaniem zweryfikowanego oprogramowania oczekują uzyskania rozwiązań zbieżnych. Otrzymana w takim wypadku formalna rozbieżność świadczy według nich o pozostawianiu rozwiązania poza przedziałem zbieżności asymptotycznej i o konieczności szacowania niepewności takiego rozwiązania innymi metodami. Dla wyników nie wykazujących zbieżności monotonicznej zalecają następujące oszacowanie niepewności bezwzględnej U :

$$U = 3 \cdot \max|\phi_i - \phi_j|, \quad (11)$$

gdzie $\max|\phi_i - \phi_j|$ oznacza maksymalną różnicę pomiędzy uzyskanymi rozwiązaniami, a i, j to numery siatek.

W przewodnikach ASME Journal of Fluid Engineering (<http://journaltool.asme.org/Templates/JFENumAccuracy.pdf>) oraz Idaho National Laboratory (Johnson i inni, 2006) niezgodność formalnego i obserwowanego rzędu dyskretyzacji nie jest sprecyzowana liczbowo.

Eca i Hoekstra (2006, 2009) wprowadzają następujący schemat określenia przedziału niepewności bezwzględnej U dla aproksymacji drugiego rzędu dokładności i zbieżności monotonicznej w zależności od wartości obserwowanego p :

$$\begin{aligned} \text{dla } 0 < p < 0.95: U &= \min(1.25(\phi_1 - \phi_1^{12}), 1.25 \max|\phi_i - \phi_j|), \\ \text{dla } 0.95 \leq p < 2.05: U &= 1.25(\phi_1 - \phi_{ext}); \\ \text{dla } p > 2.05: U &= \max(1.25(\phi_1 - \phi_1^*), 1.25 \max|\phi_i - \phi_j|), \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie ϕ_1^* – to rozwiązanie poprawione z użyciem formalnego (drugiego) rzędu aproksymacji; i, j oznaczają numery siatek.

Stern i inni (2004) wprowadzili współczynnik korekcji C_1 współczynnika bezpieczeństwa F_s mierzący dystans, jak dalece uzyskane rozwiązanie jest odległe od rozwiązań asymptotycznych:

$$C_1 = \frac{r_{21}^p - 1}{r_{21}^q - 1}; \quad (13)$$

q oznacza tu formalny rząd schematu numerycznego.

Zaproponowali również dwa sposoby uzależnienia współczynnika bezpieczeństwa F_s od C_1 . Prostszy z nich ma postać (Stern i inni, 2004):

$$F_{s,c} = \begin{cases} 9.6(1 - C_1)^2 + 1.1 & |1 - C_1| < 0.125 \\ 2|1 - C_1| + 1 & |1 - C_1| \geq 0.125 \end{cases}. \quad (14)$$

Najtrudniejsze w ocenie są rozwiązania zbieżne oscylacyjnie. W zaleceniach ASME Journal of Fluid Engineering (<http://journaltool.asme.org/Templates/JFENumAccuracy.pdf>) oraz Idaho National Laboratory (Johnson i inni, 2006) nie czyni się różnicy pomiędzy rozwiązaniami zbieżnymi monotonicznie i oscylacyjnie wyznaczając w jednym i drugim przypadku indeks GCI . Eca i Hoekstra (2006) konsekwentnie dla rozwiązań nie wykazujących zbieżności monotonicznej stosują zależność (11). Stern i inni (2004) estymują przedział niepewności U rozwiązania oscylacyjnego w następujący sposób:

$$U = (\phi_{\max} - \phi_{\min}) / 2, \quad (15)$$

gdzie ϕ_{\max} oznacza maksimum oscylacji a ϕ_{\min} minimum, zalecając przeprowadzenie obliczeń na przynajmniej jeszcze jednej siatce w celu sprawdzenia tych wartości.

W analizie niepewności numerycznych dąży się do wykorzystania metod statystycznych na wzór badań doświadczalnych. W przewodniku Idaho National Laboratory (Johnson i inni, 2006) niepewność numeryczną δ estymuje się jako wartość średnią z GCI_1^{21} (9) oraz różnic względnych rozwiązań z „sąsiednich” siatek e^{21} , e^{32} i e_1^{21} (czyli różnicy względnej rozwiązania ϕ_1 i rozwiązania ekstrapolowanego ϕ_1^{21}) zdefiniowanych w następujący sposób:

$$\begin{aligned} e^{21} &= |(\phi_1 - \phi_2) / \phi_1|, \\ e^{32} &= |(\phi_2 - \phi_3) / \phi_2|, \\ e_1^{21} &= \left| \frac{\phi_1^{21} - \phi_1}{\phi_1^{21}} \right|, \end{aligned} \quad (16)$$

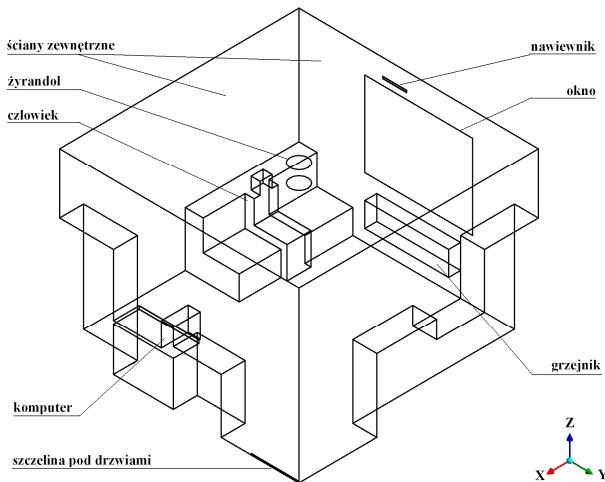
traktując je jako wielkości statystyczne, z przedziałem ufności ($\delta - t_{\alpha/2}s$, $\delta + t_{\alpha/2}s$), gdzie s – jest odchyleniem standardowym a $t_{\alpha/2}$ odczytuje się z tablic dla rozkładu t-Studenta przy założeniu $\alpha=0.05$ dla trzech stopni swobody. Przedział ufności wyznaczany jest więc z prawdopodobieństwem 95%.

3. MODELOWANIE NUMERYCZNE NIEUSTALONEGO ZAGADNIENIA WENTYLACJI POMIESZCZENIA MIESZKALNEGO

Geometria badanego pomieszczenia została pokazana na Rys.1. Kształt zarówno elementów wyposażenia, jak i sylwetka człowieka zostały uproszczone ze względu na konieczność ograniczenia liczby węzłów siatki. Obliczenia przeprowadzono dla warunków zimowych, przy następujących parametrach powietrza zewnętrznego: -5°C i wilgotności względnej 100%. Czynnikiem roboczym było powietrze wilgotne, modelowane jako mieszanina powietrza suchego traktowanego jako gaz doskonały i pary wodnej, której parametry pobrano z wbudowanej w ANSYS-CFX biblioteki IAPWS IF97.

Gabaryty pomieszczenia wynosiły: 4mx4mx2.8m. Powietrze dostawało się do pomieszczenia przez widoczny na Rys. 1 nawiewnik okienny o wymiarach 40cmx3cm. Drzwi do pomieszczenia były zamknięte, przepływ powietrza (napływ lub wypływ) możliwy był jednak przez szczelinę

pod drzwiami (Rys. 1). Powietrze napływające z dalszej części mieszkania miało temperaturę 20°C i wilgotność 40%. Wymiary szczeliny były równe 80cmx2cm.



Rys. 1. Geometria badanego pomieszczenia

W obliczeniach wzięto pod uwagę następujące wewnętrzne źródła ciepła: grzejnik (700W), komputer (150W), żyrandol (150W) oraz człowieka odpoczywającego na siedząco, który generował strumień ciepła (85W) i pary wodnej (41 g/h) (Fanger, 1974). Uwzględniono przenikalność ścian zewnętrznych ze współczynnikiem przenikania dla budynków budowanych w latach 1976÷1983 równym 1,163 W/(m²K) oraz przenikalność okna ze współczynnikiem przenikania 1,1 W/(m²K). Nie uwzględniano natomiast zysków ciepła od promieniowania słonecznego.

Obliczenia przeprowadzono w programie ANSYS-CFX z wykorzystaniem równań Reynoldsa URANS (Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes) i modelu turbulencji RNG $k-\epsilon$, ze skalowalną funkcją ścianki. W modelu fizycznym uwzględniono oddziaływanie grawitacyjne Ziemi oraz model promieniowania Discrete Transfer, polecany przez dokumentację ANSYS-CFX do tego typu obliczeń (ANSYS-CFX Release 11.0).

Wstępne testy obliczeniowe wykazały, że w symulacji ustalonej nie uda się osiągnąć zamierzonej iteracyjnej zbieżności residualnej RMS na poziomie nie wyższym niż 10⁻⁴. Z tego względu zdecydowano się na przeprowadzenie czasochłonnych symulacji nieustalonych, w których taką zbieżność iteracyjną uzyskano dla wszystkich rozwiązywanych równań stosując schematy numeryczne formalnie drugiego rzędu dokładności (Second Order Backward Euler dla aproksymacji dyskretnej względem czasu oraz High Resolution przy dyskretyzacji w przestrzeni).

Symulację podzielono na dwa etapy. Etap pierwszy stanowiła symulacja nieustalona konwekcji naturalnej, wywołanej przez nagłe „włączenie” wewnętrznych źródeł ciepła w nieruchomym powietrzu o temperaturze 20°C i wilgotności względnej 40%. W etapie drugim, po 10s od „uruchomienia” źródeł ciepła, został otwarty nawiewnik okienny, umożliwiając tym samym napływ powietrza z zewnątrz ze stałą prędkością 0,3 m/s, normalną do powierzchni wlotu, z turbulencją o intensywności równej 5%.

Wielkościami wynikowymi ϕ , na podstawie których ba-

dano globalną zbieżność siatkową, były: ilość ciepła Q przenikająca w jednostce czasu przez ściany zewnętrzne (Rys. 1) oraz średnia w badanym pomieszczeniu temperatura wynikowa DRT (Dry Resulant Temperature), zdefiniowana wzorem (Awbi, 2003):

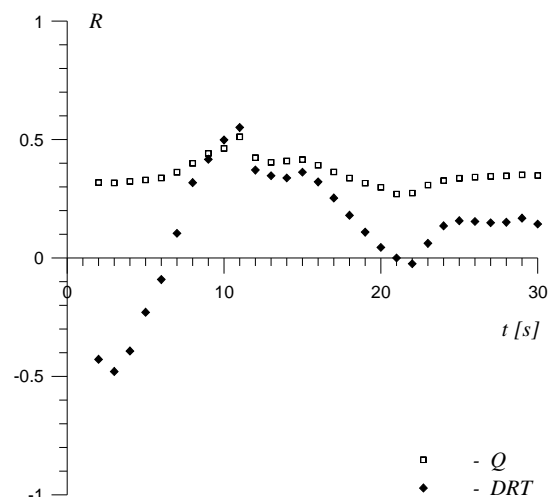
$$DRT = \frac{t_{mrt} + 3.17t \sqrt{v}}{1 + 3.17\sqrt{v}} [^{\circ}\text{C}], \quad (17)$$

gdzie t_{mrt} – średnia temperatura promieniowania [^oC], wyznaczona na podstawie prawa Stefana – Boltzmana, t – temperatura [^oC] i v – prędkość powietrza [m/s].

4. WYNIKI OBLICZEŃ

Zagadnienie numeryczne zostało rozwiązane dla trzech siatek przestrzennych o różnym stopniu zagęszczenia utworzonych w środowisku ANSYS-Workbench z niestrukturalnych elementów czworosiecznych: siatki C o najmniejszej liczbie węzłów $N_3=64215$ i dla kroku czasowego $\Delta t=0,1s$, siatki B średniej gęstości o liczbie węzłów $N_2=128660$ i $\Delta t=0,05s$ oraz siatki A o największej liczbie węzłów $N_1=205867$ i $\Delta t=0,025s$.

Średni liniowy wymiar objętości kontrolnej „i-tej” siatki wyznaczono wg wzoru (3), przyjmując prędkość charakterystyczną równą prędkości napływu powietrza w nawiewniku okiennym. Wyniosły one odpowiednio: dla siatki A $h_1=0,0350m$, dla siatki B $h_2=0,0469m$ i $h_3=0,0662m$ dla siatki C. Wartość prędkości charakterystycznej nie miała wpływu na współczynniki zagęszczenia siatek, które wyniosły: $r_{21}=1,337$ – współczynnik zagęszczenia siatki A względem B oraz $r_{32}=1,415$ – współczynnik zagęszczenia siatki B względem C.

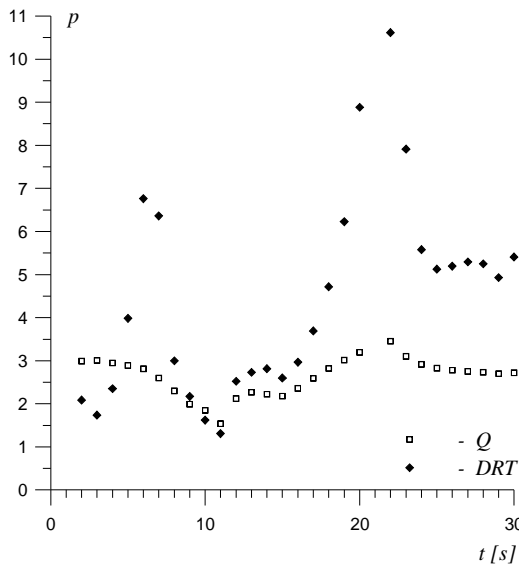


Rys. 2. Współczynnik zbieżności R dla Q i DRT

Zbieżność iteracyjną na poziomie residuum RMS poniżej 10⁻⁴ uzyskano dla wszystkich rozwiązań. Obliczenia nieustalone są bardzo czasochłonne. Jedynie dla siatki B o średnim zagęszczeniu i kroku $\Delta t = 0,05s$ obliczenia doprowadzono do $t = 175s$; ich szczegółowe wyniki dotyczące wskaźników lokalnych komfortu cieplnego zostały przed-

stawione w pracy Bohojło i Kołodziejczyk (2009). Z analizy wyników obliczeń wynika, że w badanym przedziale czasu parametry przepływu nie osiągnęły jeszcze stanu ustalonego. W niniejszej pracy badanie zbieżności rozwiązania przeprowadzono do osiągnięcia $t = 30s$.

Na Rys. 2 przedstawiono wartości współczynników zbieżności R (10) dla wielkości wynikowych Q i DRT w analizowanym przedziale czasu. Wielkości Q i DRT zdefiniowano w punkcie poprzednim pracy. Zgodnie z przyjętą klasyfikacją rodzajów zbieżności, uzyskane rozwiązania dla ciepła Q są zbieżne monotonicznie. W przypadku średniej temperatury DRT w 21% chwil czasowych rozwiązanie DRT wykazuje zbieżność oscylacyjną (dla ujemnych wartości R). W pozostałych momentach czasu zbieżność DRT jest monotoniczna.

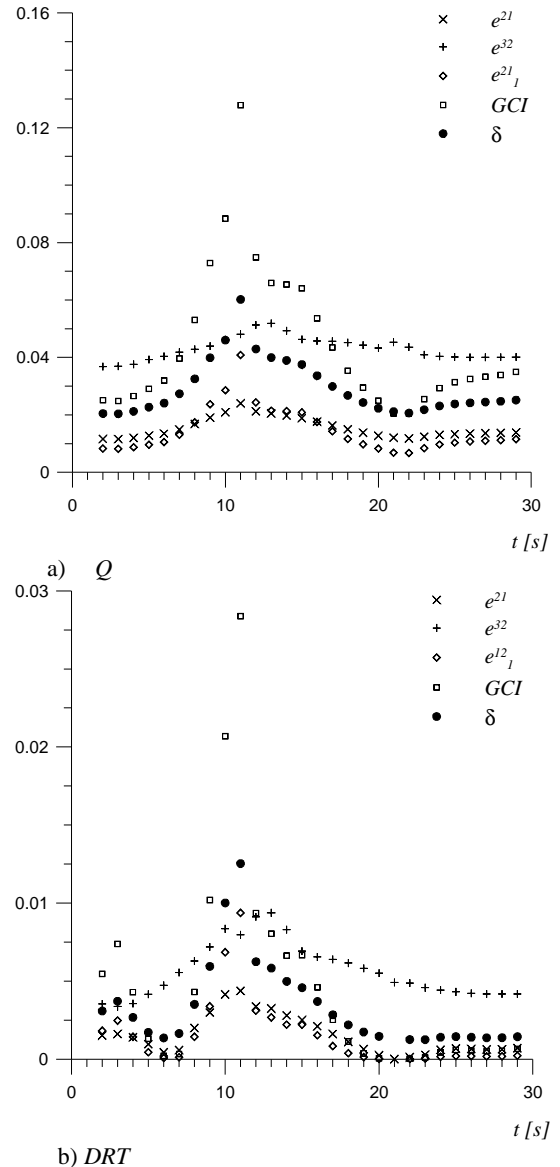


Rys. 3. Obserwowany rząd p dla Q i DRT

Rys. 3 prezentuje obserwowany rząd aproksymacji dyskretnej p . W przypadku obu wielkości analizowane rozwiązania wykazują tzw. superzbieżność, ponieważ rząd obserwowany jest większy niż rząd formalny metody równy 2. Dla ciepła Q wartość średnia p wyniosła 2,7, natomiast dla temperatury DRT 4,4. Niezgodność obserwowanego i formalnego rzędu aproksymacji oznacza, że badane rozwiązania znajdują się poza zakresem zbieżności asymptotycznej. W związku z tym zachodzi wątpliwość czy ekstrapolacja Richardsona jest właściwym narzędziem oceny zbieżności badanych rozwiązań. W punkcie drugim niniejszej pracy przedstawiono trzy podejścia do problemu oceny rozwiązań zbieżnych monotonicznie lub oscylacyjnie w różny sposób uwzględniające nieasymptotyczność rozwiązań: metodę stosowaną przez Eca i Hoekstra (2006, 2009) metodę Sterna (Stern i inni, 2004) i metodę zalecaną przez Idaho National Laboratory (Johnson i inni, 2006). W niniejszej pracy zdecydowano się na sprawdzenie ich działania w badanym zagadnieniu wentylacji pomieszczenia.

Rys. 4 przedstawia zależność różnic względnych e^{21} , e^{32} i e_I^{21} (16), indeksu GCI_1^{21} (9) ze współczynnikiem bezpieczeństwa F_s równym 3 oraz wynikowej niepewności średniej δ , zdefiniowaną w punkcie drugim pracy. Widoczny na

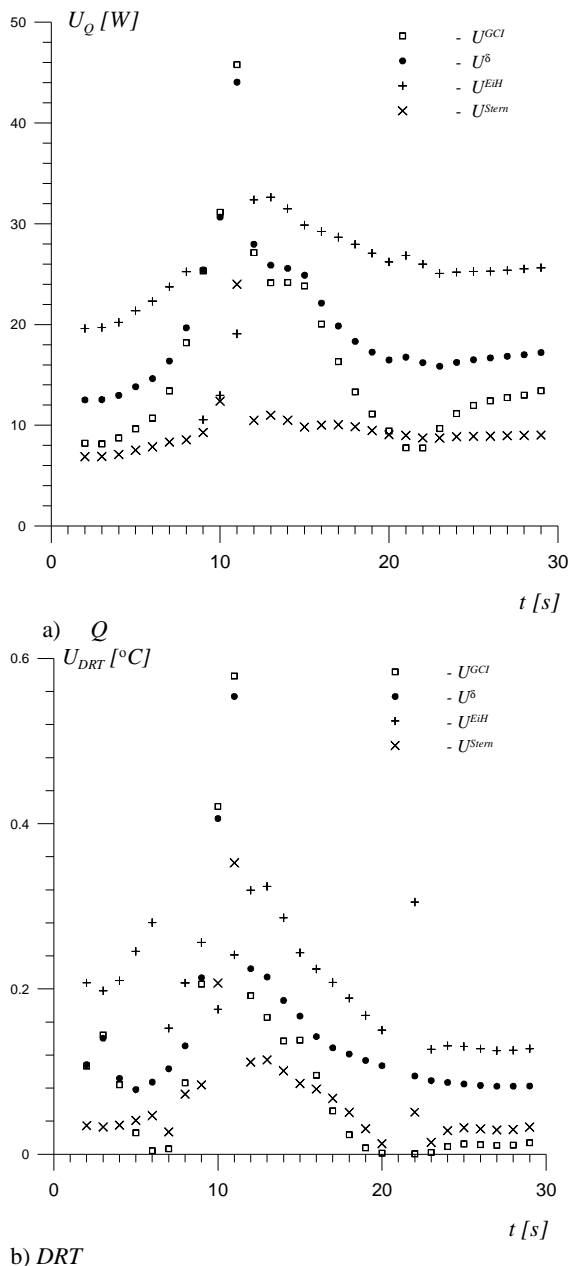
wykresach skok wartości błędów spowodowany jest głównie chwilowym wzrostem błędów iteracji na początku drugiego etapu symulacji. Najwyższą wartością indeksu GCI_1^{21} w przypadku ciepła Q jest 12,8%; wartość średnia w analizowanym przedziale czasu jest równa 4,4%. Dla temperatury DRT analogiczne wartości są równe: wartość maksymalna – 2,84% i wartość średnia – 0,46%.



Rys. 4. Różnice względne e^{21} , e^{32} i e_I^{21} , indeks GCI_1^{21} oraz niepewność średnia δ dla Q i DRT

Na Rys. 5 przedstawiono niepewności bezwzględne U_Q i U_{DRT} ciepła Q i temperatury wynikowej DRT . Niepewności oznaczone symbolem U^{GCI} wyznaczono z iloczynu $U = GCI_1^{21} \cdot \phi_1$, gdzie ϕ_1 jest równe odpowiednio Q_I lub DRT_I . W podobny sposób wyznaczono niepewności oznaczone jako U^{Stern} , według Sterna, dla rozwiązań zbieżnych monotonicznie. Niepewności wg Idaho National Laboratory oznaczone na rysunkach 5 jako U^δ wyznaczono z zależności $U^\delta = (\delta + t_{\alpha s}) \phi_1$; s jest odchyleniem standardowym wielkości średniej δ a t_α odczytuje się z tablic rozkładu t-Studenta dla trzech stopni swobody przy założeniu $\alpha=0,05$. Tak więc z prawdopodobieństwem 95% błędy

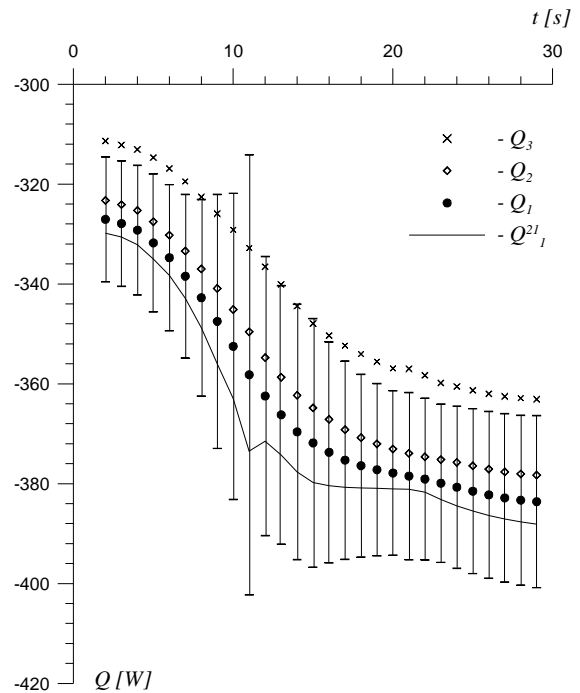
bezwzględne dla obu wielkości Q i DRT są mniejsze niż wyznaczone wartości niepewności U_Q^δ i U_{DRT}^δ odpowiednio. Niepewności oznaczone na Rys. 5 jako U^{EiH} (według Eca i Hoekstra) wyznaczono wg wzoru (11).



Rys. 5. Niepewności bezwzględne U dla Q i DRT

Otrzymane wyniki wskazują, że sposób szacowania niepewności rozwiązania numerycznego proponowany przez Sterna (Stern i inni, 2004) jest najmniej zachowawczy. Dla wyników Q niezbyt odległych od przedziału zbieżności asymptotycznej niepewności U^{Stern} są niemal wszędzie mniejsze od U^{GCI} ze względu na wartość współczynnika bezpieczeństwa $F_s < 3$. W przypadku temperatury DRT duża wartość współczynnika bezpieczeństwa F_s , spowodowana znacznym oddaleniem rozwiązania od przedziału asymptotycznego rozwiązań, daje w wyniku wzrost U^{Stern} ponad wartość U^{GCI} . Błąd względny e^{2l} ma wtedy bardzo

małą wartość i to ona warunkuje małą w porównaniu z innymi metodami niepewność U^{Stern} , pomimo dużej wartości współczynnika bezpieczeństwa F_s . W metodzie tej dla wyników monotonicznych wykorzystuje się w sposób jawny wyłącznie rozwiązania ϕ_1 i ϕ_2 uzyskane na siatkach o największym i średnim zagęszczeniu. Rozwiązanie ϕ_3 na siatce o najmniejszej gęstości służy jedynie do określenia rzędu zbieżności p . Prowadzi to do niedoszacowania niepewności

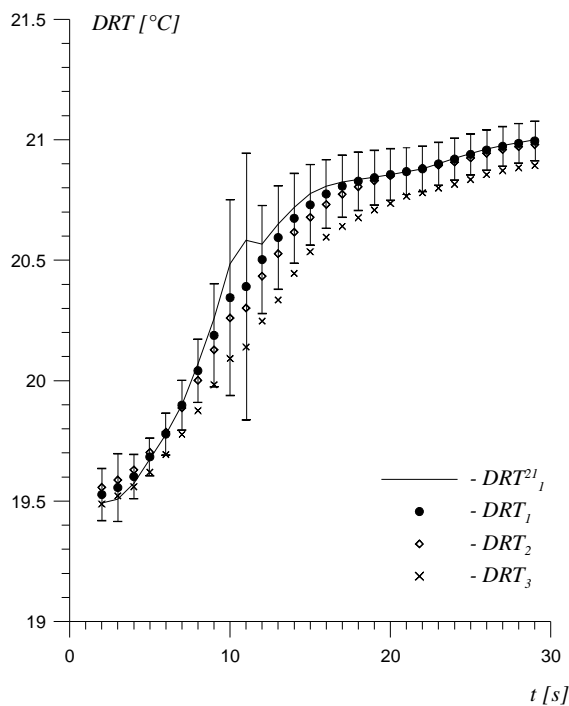


Rys. 6. Wykres zmienności Q w zależności od czasu

Sposób estymacji niepewności według Eca i Hoekstra (2006, 2009) jest najbardziej konserwatywny. Zarówno w przypadku Q jak i DRT , U^{EiH} niemal w całym analizowanym przedziale czasu osiągają wartości większe od niepewności liczonych innymi metodami, z wyjątkiem chwil w pobliżu $t=10s$, gdy w krytycznym okresie symulacji (początek drugiego etapu) wyraźnie i nieoczekiwanie się zmniejszają. Przyczyną takiego zjawiska jest zastosowany przez nich mały współczynnik bezpieczeństwa dla rozwiązań wykazujących największą zgodność formalnego i obserwowanego rzędów aproksymacji ($0.95 < p < 2,05$) (Eca i Hoekstra, 2006). Dla wyników bardziej odległych od przedziału zbieżności asymptotycznej ($p > 2,05$) niepewności U^{EiH} wyznaczane są z maksymalnych różnic pomiędzy rozwiązaniami, tzn. $|\phi_1 - \phi_3|$. Metoda ta wykorzystuje wtedy rozwiązanie pośrednie ϕ_2 wyłącznie do określenia rzędu zbieżności p . Z tego względu poza przedziałem zbieżności ściśle asymptotycznej przeszacowuje wartość niepewności U oraz wykazuje pewną niespójność dla granicznego $p=2,05$.

Sposób estymacji niepewności δ , zaproponowany przez Idaho National Laboratory (Johnson i inni, 2006), daje wartości pośrednie, ponieważ wykorzystuje rozwiązania uzyskane na wszystkich trzech siatkach. Wprowadza również współczynnik rozszerzenia, wyznaczany z rozkładu t-Studenta, pozwalający na estymację niepewności rozwiązania z prawdopodobieństwem 95%. Metodę tę wybrano

ostatecznie do wyznaczenia przedziału niepewności przedstawianych w pracy wyników obliczeń.



Rys. 7. Wykres zmienności temperatury DRT w zależności od czasu

Rys. 6 i 7 przedstawiają wykresy zmienności wyników obliczeń $Q_1 \pm U_Q^\delta$ oraz $DRT_1 \pm U_{DRT}^\delta$ uzyskanych na siatce A wraz z naniesionymi wartościami niepewności. Rzeczywista wartość Q i DRT zawiera się wewnątrz przedstawionych przedziałów niepewności z prawdopodobieństwem 95%. Szerokość przedziału niepewności stopniowo rośnie aż do momentu otwarcia nawiewnika w chwili $t=10$ s. Największą wartość osiąga na początku drugiego etapu symulacji, gdy rozwiązania wykazują jeszcze słabą zbieżność iteracyjną, a później stopniowo maleje. Na Rys. 6 i 7 naniesiono również wyniki uzyskane na siatkach B (Q_2 i DRT_2) oraz C (Q_3 i DRT_3) o średniej i najmniejszej liczbie węzłów oraz rysowane linią ciągłą rozwiązania poprawione z wykorzystaniem ekstrapolacji Richardsona (Q_1^{21} , DRT_1^{21}). Wyniki uzyskane na siatce C o największym liniowym rozmiarze oczka znalazły się poza wyznaczonymi przedziałami niepewności.

5. PODSUMOWANIE

W praktycznych obliczeniach inżynierskich odznaczających się skomplikowaną geometrią oraz skomplikowanymi procesami fizycznymi i chemicznymi często spotkać się można z sytuacją, gdy otrzymane rozwiązania leżą poza przedziałem zbieżności asymptotycznej; uzyskanie rozwiązań asymptotycznych wykracza bowiem poza możliwości dostępnych komputerów. Ocena zbieżności takich rozwiązań i określenie przedziału niepewności aproksymacji dyskretnej jest rzeczą trudną. Nie istnieje jeszcze spójna teoria, która pozwoliłaby na jej przeprowadzenie. Tematem niniejszej pracy była próba oszacowania przedziału niepewności numerycznej spowodowanej aproksymacją dyskretną takich właśnie wyników obliczeń zagadnienia wentylacji pomiesz-

czenia mieszkalnego. Po analizie istniejących sposobów estymacji ocenę zbieżności i oszacowanie niepewności dyskretyzacji przeprowadzono ostatecznie metodą proponowaną przez Idaho National Laboratory (Johnson i inni, 2006), opartą na ekstrapolacji Richardsona i uzupełnioną o wartości różnic względnych.

Przeprowadzona analiza niepewności obliczeniowych może budzić wiele wątpliwości. Zarówno z powodu zastosowania ekstrapolacji Richardsona do rozwiązań nieasymptotycznych, jak i z powodu potraktowania różnic względnych i indeksu GCI_1^{21} , uważanych za wielkości deterministyczne, jako wielkości statystycznych. W obliczeniach numerycznych dąży się jednak obecnie do prezentowania wyników obliczeń łącznie z przedziałem niepewności określonym z poziomem ufności równym 0.95 (na wzór badań doświadczalnych). Być może wkrótce pojawi się bardziej spójna teoria pozwalająca na przeprowadzenie oceny zbieżności siatkowej rozwiązań nieasymptotycznych w sposób nie budzący podobnych wątpliwości.

LITERATURA

1. ANSYS-CFX Release 11.0: Theory, 2006
2. Awbi H. B. (2003), Ventilation of Buildings, Taylor & Francis.
3. Bohojtlo A., Kołodziejczyk M. (2009), Modelowanie numeryczne parametrów lokalnych komfortu cieplnego w pomieszczeniu mieszkalnym, Acta mechanica et automatica, Vol.3, No. 1, 14-23.
4. Celik I., Klein M., Freitag M., Janicka J. (2006), Assessment measures for URANS/DES/LES: an overview with applications, Journal of Turbulence, Vol.7, No.48, 1-27.
5. Eca L., Hoekstra M. (2006), On the influence of the iterative error in the numerical uncertainty of ship viscous flow calculations, 26th Symposium on Naval Hydrodynamics, Rome, Italy, 17-22 September 2006.
6. Eca L., Hoekstra M. (2009), Evaluation of numerical error estimation based on grid refinement studies with the method of manufactured solutions, Computers and Fluids, doi: 10.1016/j.compfluid.2009.01.003.
7. Fanger O., Komfort cieplny, Wyd. Arkady, Warszawa, 1974.
8. <http://journaltool.asme.org/Templates/JFENumAccuracy.pdf>
9. Johnson R. W., Schultz R. R., Roache P. J., Celik I. B., Pointer W. D., Hassan Y. A. (2006), Processes and procedures for Application of CFD to Nuclear Reactor Safety Analysis, Idaho National Laboratory.
10. Roache P. J., (1997), Quantification of uncertainty in computational fluid dynamics, Annu. Rev. Fluid Mech., 29: 123-60.
11. Stern F., Wilson R., Shao J. (2004), Quantitative V&V of CFD simulations and certification of CFD codes with examples, Proceedings of CHT-04, ICHMT International Symposium on Advances in Computational Heat Transfer, Norway.

ESTIMATION OF THE DISCRETIZATION UNCERTAINTY OF AN UNSTEADY VENTILATION PROBLEM IN A HABITABLE ROOM

Abstract: This article presents a study of estimation of the numerical uncertainty due to discretization of an unsteady ventilation problem in a habitable room. The numerical results are obtained with the code ANSYS-CFX. Careful considerations are given to selection of the verification procedure for the results being outside the asymptotic range. The results are presented with discretization error bars computed with 95% confidence.