

ROZWIĄZANIA NUMERYCZNE PRĘTA OBCIĄŻONEGO SIŁĄ BRZEGOWĄ W UJĘCIU MECHANIKI FAŁOWEJ I DYNAMIKI

Paweł SZKLENNIK*

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 A, 15-351 Białystok

Streszczenie: W pracy przedstawiono rozwiązania pręta obciążonego nagle wzdłużną siłą brzegową, z zastosowaniem konsekwentnej dla przestrzeni i czasu metody różnicowej. Zadanie rozwiązano stosując podejścia zgodne ze sformułowaniami mechaniki falowej oraz dynamiki celem wykazania różnic w otrzymanych rozwiązaniach. Do całkowania równania dynamicznej równowagi, identycznego dla obydwu sformułowań, użyto różnych schematów całkowania względem czasu. Analizowano schematy jawny, niejawny i θ -Wilsona. Schemat jawny umożliwia dokładny opis rozprzestrzeniania się fal naprężeń oraz efektów odbić od brzegów sztywnego i swobodnego. Schemat niejawny poprawnie opisuje dynamiczne zachowanie pręta, ale w dłuższym okresie czasu generuje istotne efekty tłumienia pasożytniczego. Schemat θ -Wilsona odzwierciedla falową naturę reakcji pręta, ale rozmywa poprawne teoretycznie, silne fronty fal naprężeń.

Słowa kluczowe: fala podłużna, metoda różnicowa, schematy całkowania krok po kroku.

1. Wprowadzenie

Poszukiwanie reakcji elementów konstrukcyjnych pod wpływem obciążeń dynamicznych może być dokonywane przy zastosowaniu opisu właściwego dynamice konstrukcji, albo odpowiadającego mechanice falowej. Wybór opisu zależy od intensywności zmian obciążenia w czasie, rozumianego jako charakterystyki narastania do wartości ekstremalnej, utrzymywania się albo zmienności w określonym przedziale czasu oraz zanikania.

Przy poszukiwaniu rozwiązania według sformułowania właściwego dynamice konstrukcji nie jest analizowany problem rozprzestrzeniania się zaburzeń. Przyjmujemy, że nawet obciążenie dynamiczne o dużej intensywności wywołuje reakcję deformacyjną jednocześnie w całym elemencie konstrukcyjnym. Opis zachowania elementu obciążonego dynamicznie jest wyznaczany z układu równań równowagi dynamicznej, związków fizykalnych naprężeniowo-odkształceniowych oraz związków geometrycznych odkształceniowo- przemieszczeniowych. Układ ten jest rozwiązywany dla danych warunków brzegowych, z reguły stacjonarnych co do położenia w przestrzeni. Równania dynamicznej równowagi są całkowane przy założonych warunkach początkowych, odniesionych do całego obszaru konstrukcji. W przypadku naturalnych warunków początkowych przemieszczenia i prędkości przemieszczeń w całym układzie są w chwili początkowej równe zero. Działanie dynamiczne obciążenia wyprowadza konstrukcję

z położenia równowagi według form ruchu, które spełniają kinematyczne warunki brzegowe. W całej konstrukcji od pierwszej chwili występują kontynuacyjne procesy deformacji.

Jeżeli rozpatrujemy obciążenia o dużej intensywności oddziaływujące krótkotrwale na elementy konstrukcyjne, to w opisie reakcji tych elementów rozważyć należy początkowe przejmowanie obciążenia zewnętrznego ujawniające się rozwojem obszaru zaburzonego. Obszar ten propaguje się z określoną prędkością w dany element. W przypadku obciążeń typu wybuchowego albo udarowego okres narastania obciążenia do wartości ekstremalnej jest bardzo krótki. Reakcja nie powstaje jednocześnie w całej konstrukcji, lecz stopniowo w wyniku fal propagujących się przez jej elementy.

Ujęcie problemu mechaniki falowej wymaga opisu zachowania konstrukcji z wyróżnieniem propagacji zaburzeń. W przypadku analizowania obciążeń dynamicznych generujących się z brzegów konstrukcji istnieje potrzeba wyznaczenia rozwiązania w naprężeniach, odkształceniach i przemieszczeniach w obszarze zaburzonym i niezaburzonym. Obszary te oddzielone są ruchomym frontem, na którym mogą występować pewne nieciągłości zależne od sposobu zadania obciążenia i modelu odkształceniowego materiału. Występuje konieczność opisu odbicia rozważanego frontu falowego od brzegów przejmujących obciążenie dynamiczne. Charakter tego odbicia zależy od modelu mechanicznego brzegu. Z powyższego wynika, że

* Autor odpowiedzialny za korespondencję. E-mail: p.szklennik@doktoranci.pb.edu.pl

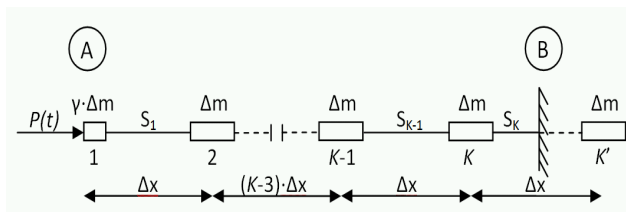
reakcja konstrukcji w ujęciu mechaniki falowej ma inny charakter niż reakcja właściwa dynamice konstrukcji.

Równania dynamicznej równowagi dla dynamiki konstrukcji i dla mechaniki falowej są na ogół różne w przypadkach rozważania zachowania elementów konstrukcyjnych. W odniesieniu do prętów obydwie podejścia bazują na tych samych równaniach, jeżeli rozważamy reakcję wzdłużną prętów pod wpływem poosiowych sił dynamicznych.

Celem pracy jest porównanie wyników uzyskanych w oparciu o sformułowanie mechaniki falowej i dynamiki konstrukcji na przykładzie pręta poddanego gwałtownie przyłożonej, wzdłużnej sile brzegowej. Wyniki uzyskano stosując konsekwentną dla przestrzeni i czasu metodę różnicową. W metodzie tej stosowano różne schematy całkowania problemu względem czasu. Wskazano różnice ilościowe i jakościowe uzyskanych rozwiązań, obejmujące reakcję pręta w jego wnętrzu oraz efekty odbić od brzegów swobodnego i sztywno umocowanego.

2. Zastosowane metody obliczeń

Poszukujemy reakcji pręta sprężystego sztywno zamocowanego na brzegu B, obciążonego siłą $P(t) = \text{const.}$ (rys. 1). Pręt zdyskretyzowano dzieląc go na masy skupione (Δm) połączone elementami sprężystymi (S_j). Przyjęto gęstość i moduł Younga materiału odpowiednio: $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ i $E = 30 \text{ GPa}$, długość pręta $L = 10 \text{ m}$, pole przekroju pręta $A = 0,01 \text{ m}^2$, wartość siły obciążającej $P = 1000 \text{ N}$, ilość mas skupionych $K = 49$, oraz współczynnik określający stosunek wielkości masy skupionej na brzegu do masy wewnętrznej $\gamma = 0,5$ lub $\gamma = 1,0$, zależnie od przyjętego schematu całkowania w czasie.



Rys. 1. Schemat modelu obliczeniowego

Drgania podłużne oraz reakcja falowa pręta jest opisana równaniem różniczkowym typu przemieszczeniowego:

$$L(u) = 0 \quad (1)$$

gdzie operator różniczkowy

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t)$$

oznacza przemieszczenia, δ oznacza współczynnik tłumienia, a c prędkość fali podłużnej

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

W pracy (Timoshenko i Goodier, 1962) przedstawiona jest metoda uzyskiwania rozwiązania analitycznego rozważanego problemu falowego. Rozwiązanie jest konstruowane z podziałem na fazy. W poszczególnych fazach analizuje się kolejne fronty fal odbitych od brzegów pręta oraz wzajemne nakładanie się tych frontów. Wykorzystanie takiej metody jest uciążliwe. Jednocześnie można znaleźć w literaturze rozwiązanie problemu dynamiki analizowanego pręta (Nowacki, 1972). Drgania podłużne są opisane nieskończonym szeregiem. W analizowanym przypadku zbieżność tego szeregu jest jednak wrażliwa na współrzędną położenia rozważanego przekroju pręta. Z tego powodu będziemy poszukiwać efektywnego rozwiązania numerycznego.

Rozwiązania różnicowe skonstruujemy przyjmując mały krok $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ i następujące schematy całkowania względem czasu:

- bezpośrednią metodę różnicową jawną (MRJ),
- metodę różnicową niejawną (MRN),
- metodę θ -Wilsona (M θ -W).

Wymienione schematy różnią się w swojej istocie zakładanym profilem zmian przyspieszenia podczas trwania kroku czasowego i w chwili przejścia do kroku następnego.

2.1. Metoda różnicowa jawna (MRJ) – model dyskretny dla ujęcia falowego z punktem kolokacji w chwili t^n

Zagadnienie modelowania dyskretnego procesów falowych w prętach warstwowych opisano w pracach Bąka i Szcześniaka (1986, 1987). Algorytm numerycznego opisu procesu falowego według bezbłędnej aproksymacji różnicowej dla przyrównanych prętów odcinkowo jednorodnych przedstawiony jest w pracy (Bąk i Szcześniak, 1986). Algorytm wykorzystuje jawny schemat różnicowy z dokładnym odzwierciedleniem prędkości fali podłużnej w poszczególnych odcinkach pręta. Ujmuje on poprawne spełnienie warunków odbicia fali naprężeń od brzegu wolnego oraz idealnie sztywnego. Ponadto możliwe jest wyznaczenie efektu załamania się fali na granicy niejednorodności materiałowej. Omówienie błędów w czasie w niedokładnych opisach propagacji frontów fal naprężeń można znaleźć w pracy Bąka (1994).

Zastosowanie jawnego schematu całkowania równania (1) z punktem kolokacji w chwili t^n prowadzi (przy $\delta = 0$) do postaci różnicowej (Bąk i Szcześniak, 1986):

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) = 0 \quad (2)$$

gdzie

$$u_j^n = u(j\Delta x, n\Delta t), \quad j = 0, 1, 2, \dots, K \quad \text{i} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Rekurencyjne rozwiązanie równania różnicowego (2) można przedstawić jako

$$u_j^{n+1} = T(\Delta t, \Delta x) u_j^n \quad (3)$$

gdzie $T(\Delta t, \Delta x)$ jest operatorem różnicowym wykorzystywanym do wyznaczania rozwiązań w określonych punktach siatki czasoprzestrzennej.

Zakładamy, że przyspieszenie jest stałe w przedziale czasu (t^n, t^{n+1}) i zmienia się skokowo po przejściu chwili t^{n+1} . Kryterium stabilności metody zgodnie z (Bąk i Szcześniak, 1986) ma postać $c\Delta t/\Delta x \leq 1$, więc krytyczna wartość kroku czasowego $\Delta t_{crit} = \Delta x/c$.

Funkcjonowanie mechanicznego modelu dyskretnego przedstawionego na rysunku 1 opisują równania (Bąk i Szcześniak, 1986):

1. $\ddot{u}_j^{n+1} = \frac{P_j^n - P_j^n}{\Delta m_j}$
2. $\Delta u_j^{n+1} = \Delta u_j^n + \ddot{u}_j^{n+1} \Delta t^2$
3. $u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta u_j^{n+1}$
4. $P_j^{n+1} = \frac{u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x} EA$

gdzie Δu_j^{n+1} jest przyrostem przemieszczenia j -tej masy według parabolicznej aproksymacji względem czasu, Δm_j jest to nieodkształcalna masa wyznaczona ze wzoru $\Delta m_j = A c \Delta t \rho$, u_j^{n+1} jest to przyspieszenie j -tej masy w chwili t^{n+1} .

Bez błędne funkcjonowanie tego modelu zależy również od odpowiedniego sformułowania warunków brzegowych i początkowych. W przypadku masy brzegowej modelu równej $0,5 \Delta m$ przy ruchu falowym opisywanym co krok czasowy Δt , zgodnie z zaproponowanym w (Bąk i Szcześniak, 1986) sposobem modelowania obciążenia, zadane obciążenie aproksymowano z niedomiarem, przyjmując w chwili początkowej ($t^{n=1}$) wartość siły wymuszającej $P_p = 0,5P$. Jest to niezbędne w celu uzyskania w pierwszym elemencie sprężystym prawidłowej wartości siły

2.2. Metoda różnicowa niejawna (MRN) – z punktem kolokacji w chwili t^{n+1} – ogólne ujęcie dynamiki

Analizowany schemat jest właściwy do opisu dynamicznego zachowania rozważanego pręta. W tym przypadku aproksymując równanie (1) doprowadza się je do postaci różnicowej:

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} + \delta \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - c^2 \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) = 0 \quad (4)$$

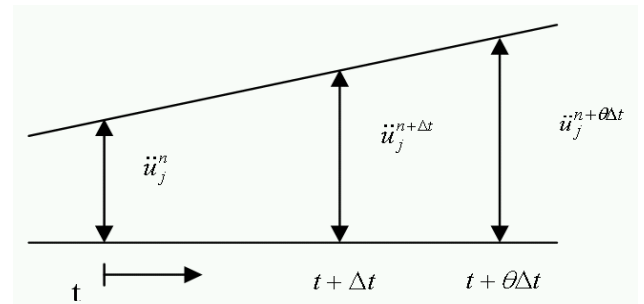
Niejawny schemat różnicowy powoduje, że już od pierwszego kroku czasowego reakcja występuje we wszystkich węzłach pręta. Oznacza to, że schematem tym nie można poprawnie opisać rozprzestrzeniania się zaburzeń w pręcie wywołanych oddziaływaniem

brzegowym. W algorytmie obliczeniowym obciążenie brzegowe realizowano w każdej chwili t^n poprzez wprowadzenie fikcyjnego węzła (masy). Przesunięcie tego węzła zadawano w postaci:

$$u_0^n = u_2^n - \frac{2P\Delta x}{EA}$$

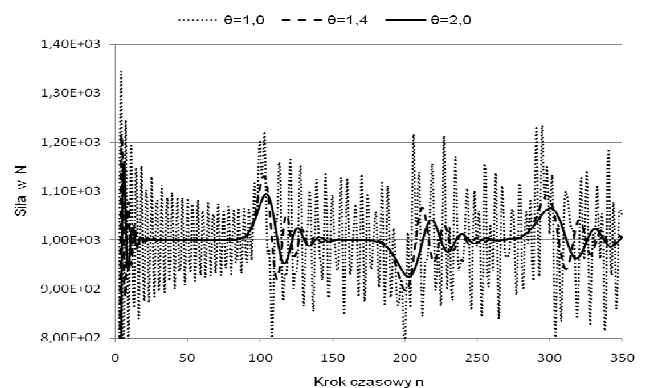
2.3. Metoda θ -Wilsona ($M\theta$ -W)

W niejawnej procedurze całkowania określanej jako θ -Wilsona w celu uzyskania rozwiązań dla chwili $t^{n+\Delta t}$ wykorzystujemy warunki równowagi zapisane w chwili $t^{n+\theta\Delta t}$, gdzie $\theta \geq 1,0$ (Bathe, 1982). W procedurze tej zakłada się liniową zmienność przyspieszenia od chwili t^n do chwili $t^{n+\theta\Delta t}$ (rys. 2).



Rys. 2. Zmienność przyspieszenia w metodzie θ -Wilsona (Bathe, 1982)

Szczegółowy opis algorytmu użytego do obliczeń znaleźć można w pracy Bathe (1982). Metoda θ -Wilsona jest bezwarunkowo stabilna jeżeli stosuje się ją z parametrem $\theta \geq 1,37$ (Bathe, 1982). Na rys. 3 przedstawiono porównanie wyników numerycznych uzyskanych dla różnych parametrów θ na przykładzie zmian siły w pierwszym elemencie sprężystym (P_1), przyjęto $\gamma = 1,0$ oraz $\Delta t = \Delta t_{crit}$.



Rys. 3. Przebieg zmian siły w pierwszym elemencie sprężystym (P_1) przy różnych wartościach parametru θ

Wynika z tych wykresów, że naruszenie wymogu bezwarunkowej stabilności i przyjęcie $\theta = 1,0$ prowadzi do rozwiązania słabo zbieżnego z dokładnym (gdzie siła ma stałą wartość równą $P(t)$), natomiast maksymalne różnice pomiędzy wynikami przy $\theta = 1,4$ oraz $\theta = 2,0$ nie przekraczają kilku procent.

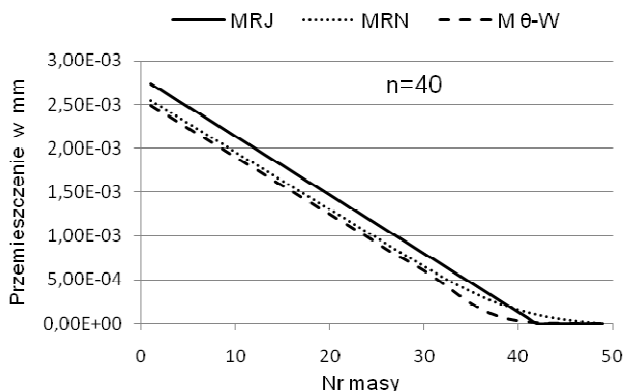
3. Analiza wyników numerycznych

Na wykresach przedstawiono porównanie wyników otrzymanych trzema opisanymi metodami. Analizowano rozkłady sił i przemieszczeń na długości pręta po upływie określonej ilości kroków czasowych, a także przebieg ich zmian w czasie. Ze względu na warunek stabilności obliczenia przeprowadzono przyjmując krok czasowy $\Delta t = \Delta t_{crit}$ oraz zalecaną wartość parametru $\theta = 1,4$ w metodzie θ -Wilsona

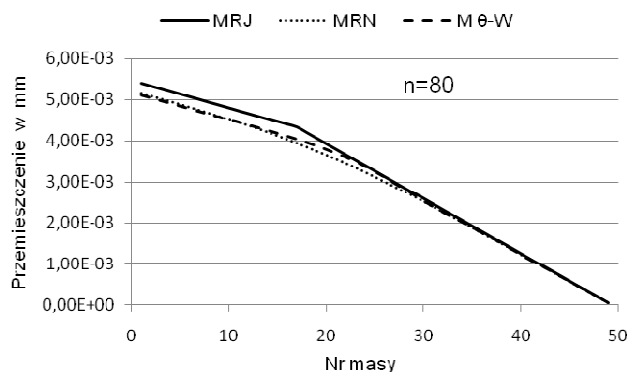
3.1. Rozkłady sił i przemieszczeń na długości pręta w ustalonej chwili t^n

Wykresy rozkładów przemieszczeń na długości pręta (rys. 4 - 6) świadczą o uzyskaniu prawie identycznych wyników bez względu na stosowaną metodę obliczeń. Podkreślenia wymaga fakt, że w MRN i M θ -W w chwili $t^{n=40}$ (rys. 4) uzyskano przemieszczenia na całej długości, mimo że według MRJ utwierdzony koniec pręta pozostaje niezaburzony. Ponadto przemieszczenia obliczone M θ -W są na tym końcu znacznie mniejsze od obliczonych MRN, stąd wykres M θ -W jest tu bardziej zbliżony do MRJ.

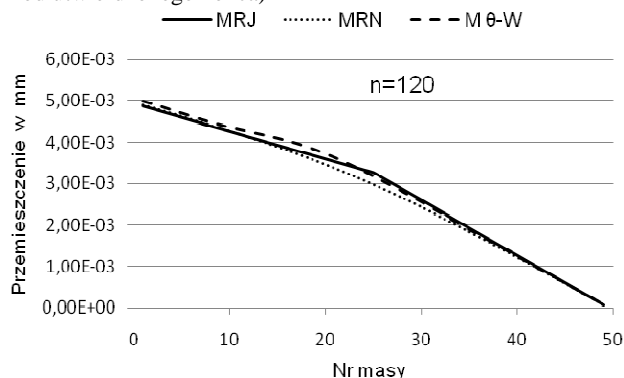
W przypadku sił (naprężeń) zarówno metoda θ -Wilsona jak i różnicowa niejawną nie dają wyników zgodnych z metodą jawną (przy $\Delta t = \Delta t_{crit}$). Na obu wykresach obserwujemy silne „rozmycie” frontów fal (rys. 7 - 9). MRN i M θ -W wywołują zaburzenia obejmujące cały pręt już podczas pierwszych kroków czasowych i stąd brak tutaj typowego procesu falowego. Wynikający z rozkładu przemieszczeń rozkład siły w chwili $t^{n=40}$ nie dzieli konstrukcji pręta na obszar zaburzony i niezaburzony jak w MRJ.



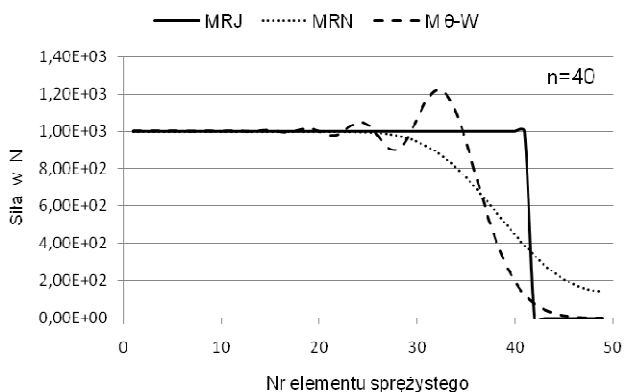
Rys. 4. Rozkład przemieszczeń w chwili $t^n = 40$ (przed odbiciem frontu fali od utwierdzonego końca)



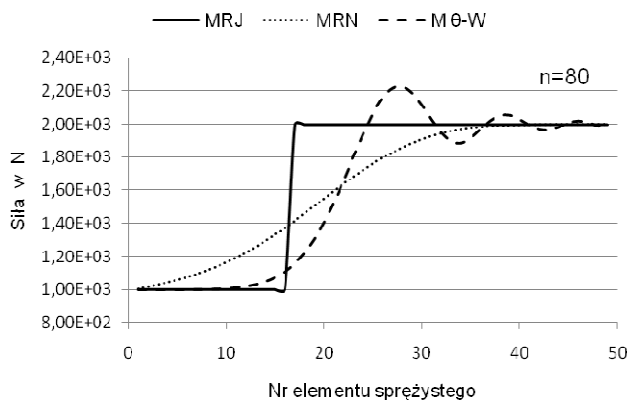
Rys. 5. Rozkład przemieszczeń w chwili $t^n = 80$ (po odbiciu od utwierdzonego końca)



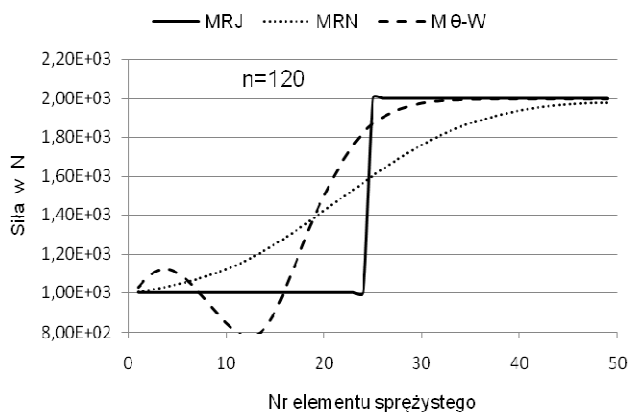
Rys. 6. Rozkład przemieszczeń w chwili $t^n = 120$ (po odbiciu od swobodnego końca)



Rys. 7. Rozkład sił w chwili $t^n = 40$ (przed odbiciem frontu fali od utwierdzonego końca)



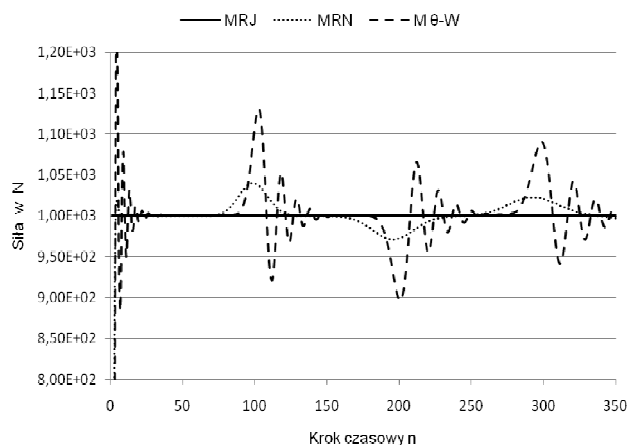
Rys. 8. Rozkład sił w chwili $t^n = 80$ (po odbiciu od utwierdzonego końca)



Rys. 9. Rozkład sił w chwili $t^n=120$ (po odbiciu od swobodnego końca)

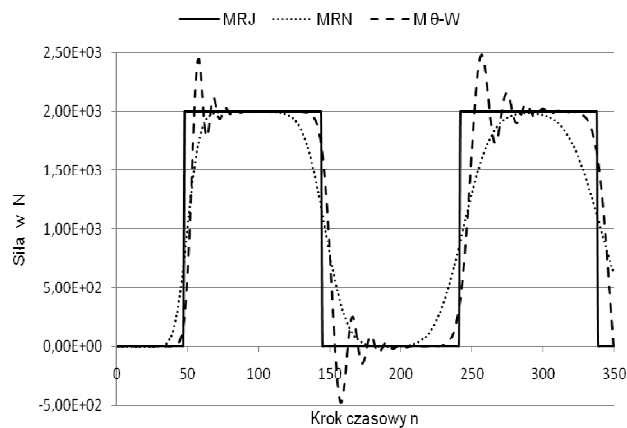
3.2. Porównanie rozkładów sił i przemieszczeń w czasie

Pierwszy element sprężysty ($K = 1$) według wyników MRJ przenosi przez cały czas siłę równą sile wzbudzającej zaburzenie (rys. 10). Schemat różnicowy niejawny oraz θ -Wilsona nie oddaje w zupełności tego zjawiska, ze względu na pojawiające się okresowo „skoki” siły do wartości większej lub mniejszej od obciążenia zewnętrznego.

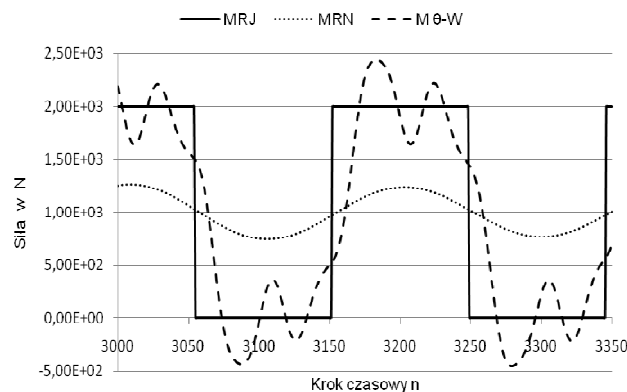


Rys. 10. Przebieg zmian siły w pierwszym elemencie sprężystym (P_1)

Analizując zmiany siły w końcowym elemencie sprężystym ($K = 49$) (rys. 11) podczas pierwszych 350 kroków czasowych można stwierdzić, że zarówno metoda niejawną jak i θ -Wilsona tylko w przybliżeniu odzwierciedlają charakter przemieszczania się fali podłużnej w pręcie. Zauważa się ponadto, że MRN w przeciwieństwie do MRJ czy M θ -W wprowadza do układu efekt tłumienia pasożytniczego, mimo że w obliczeniach przyjmowano $\delta = 0$. Po upływie kolejnych okresów $T = 2l/c$ wykres siły w pręcie według MRN dąży do wartości równej brzegowej sile wymuszającej. Efekty tego procesu generującego się w procedurze numerycznej przedstawione są na rysunku 12 i nie występują one w pozostałych metodach.



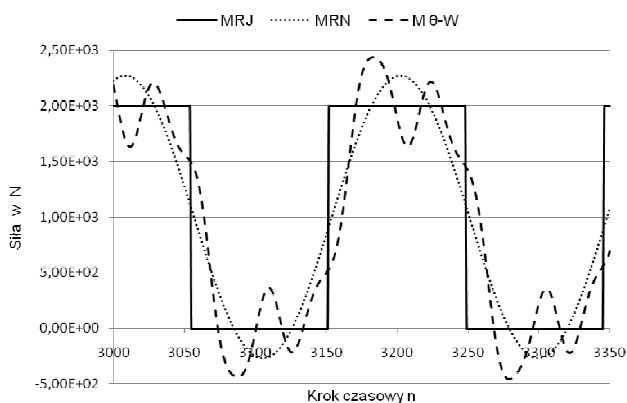
Rys. 11. Przebieg zmian siły w końcowym elemencie sprężystym (P_{49})



Rys. 12. Przebieg zmian siły w końcowym elemencie sprężystym (P_{49}) po upływie czasu $t = 3000 \Delta t$

Tak więc prowadząc obliczenia MRN przy $\delta = 0$ nie uzyskuje się modelu fali przekazywanej pomiędzy masami, tylko model, w którym wywołane zaburzenie stopniowo zanika i problem dynamiki dąży do stanu równowagi statycznej, gdzie siła w całym układzie będzie równa sile wymuszającej.

Intensywność tłumienia (wyrażona jako logarytmiczny dekrement tłumienia) w MRN jest zróżnicowana na długości pręta. Można je ponadto wyeliminować uwzględniając w schemacie obliczeniowym odpowiedni współczynnik ujemnego tłumienia, którego wartość w analizowanym przypadku wynosi w przybliżeniu $\delta = -185s^{-1}$. Wprowadzając ten współczynnik udaje się uzyskać wyniki zbliżone do metody θ -Wilsona również w długim okresie czasu (rys. 13). Trzeba oczywiście podkreślić, że oba schematy obliczeniowe nie opisują idealnej postaci falowego charakteru zaburzenia.



Rys. 13. Przebieg zmian siły w końcowym elemencie sprężystym (P_{49}) po upływie czasu $t = 3000 \Delta t$ przy wprowadzonym współczynniku tłumienia ujemnego w MRN

Analizę powstawania tłumienia pasożytniczego w różnych schematach całkowania numerycznego przedstawiono w pracy Langer (1979). Wskazano tam, że jego przyczyną może być nieadekwatność formy różnicowej dla wyjściowego równania różniczkowego.

4. Wnioski

W pracy pokazano, że konstruowanie dokładnych rozwiązań problemu falowego nie może być dokonywane schematyzacjami właściwymi problemom dynamiki. Właściwym schematem numerycznym do opisu propagacji fal jest jawna metoda różnicowa (MRJ).

Idealnie dokładny opis propagacji fal wymaga też zachowania warunku na krytyczny krok czasowy. Wyniki uzyskiwane schematem całkowania θ -Wilsona nie odbiegają znacząco od MRJ, ale występuje tu wyraźne „rozmycie” frontów fal naprężeń. Schemat niejawny (MRN) podczas pierwszego okresu T generuje rezultaty w dużym stopniu zbieżne z MRJ jednak w dalszych okresach występujące tu tłumienie uniemożliwia poprawny opis poruszających się wewnątrz pręta frontów fal podłużnych.

Podsumowując można stwierdzić, że wybór sposobu sformułowania problemu pomiędzy podejściami mechaniki falowej albo dynamiki rzutuje na wyniki analiz. Jeżeli wyniki tych analiz dotyczą naprężeń, to sposób podejścia jest bardzo istotny, szczególnie z uwagi na wyznaczanie efektów odbić. Natomiast przemieszczenia, ogólnie niestacjonarne, są mniej wrażliwe na typ sformułowania.

Literatura

- Bathe K.-J. (1982). Finite element procedures in engineering analysis. *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey*.
- Bąk G. (1994). Discrete Modelling of Soil-Structure Interaction Under Dynamic Loading w: *Proceedings of the First Congress on Computing in Civil Engineering*, Washington, D.C., June 20-22, 1994, 873-876.
- Bąk G., Szcześniak Z. (1986). Bez błędna aproksymacja różnicowa jednowymiarowego problemu falowego w prętach warstwowych. *Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej im. J. Dąbrowskiego*, Rok XXXV, nr 12, 63-74.
- Bąk G., Szcześniak Z. (1987). Metoda modelowania dyskretnego procesów falowych w sprężystych warstwowych prętach niepryzmatycznych. *Rozprawy inżynierskie*, 35, nr 2, 309-325.
- Langer J. (1979). Tłumienie pasożytnicze w komputerowych rozwiązaniach równań ruchu. *Archiwum Inżynierii Lądowej*, Tom XXV, 3/1979.
- Nowacki W. (1972). Dynamika budowli. *Arkady*, Warszawa.
- Timoshenko S., Goodier J.N. (1962). Teoria sprężystości. *Arkady*, Warszawa.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE BOUNDARY LOADED BAR IN THE APPROACH OF WAVE MECHANICS AND DYNAMICS

Abstract: In the paper solutions of a bar loaded instantly with the lengthwise force are presented. The results were obtained using the consistent for space and time difference method. The problem was solved in the accordance with the approaches for both wave mechanics and dynamics in order to illustrate the differences between these solutions. The integration of the equation of dynamic equilibrium, identical in both formulations, was performed using various time integration schemes. The explicit, implicit and the θ -Wilson schemes were analysed. The explicit scheme enables an accurate description of the stress wave propagation and the effects of the wave reflection on fixed and free edge. The implicit scheme enables an appropriate description of dynamic bar behavior but in the longer time period it generates significant effects of spurious damping. The θ -Wilson scheme correctly presents the form of the bar's wave reaction but the fronts of the stress waves are dispersed in comparison to the explicit method.

Artykuł zrealizowano w ramach pracy statutowej S/WBiŚ/1/08