

KONSTRUOWANIE ROZWIĄZAŃ WYBRANYCH TRÓJWYMIAROWYCH ZAGADNIENIŃ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI OŚRODKÓW NIEJEDNORODNYCH

Roman KULCZYCKI*, Adam BAJKOWSKI*

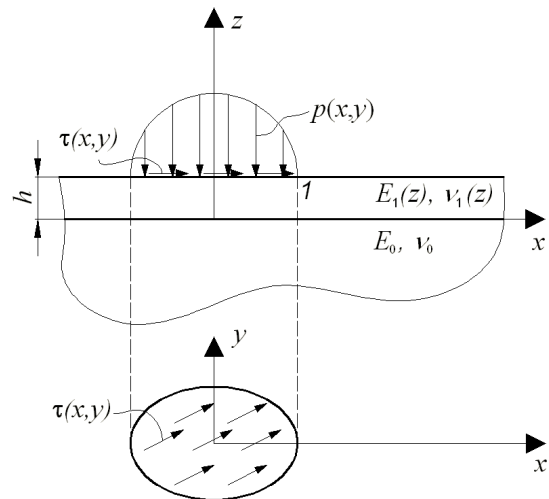
*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

r.kulczycki@pb.edu.pl, a.bajkowski@doktoranci.pb.edu.pl

Streszczenie: Rozpatrzono pierwsze i drugie zagadnienie teorii sprężystości dotyczące półprzestrzeni niejednorodnej składającej się z jednorodnego podłoża i niejednorodnej warstwy wierzchniej o zmieniających się wzdłuż grubości warstwy właściwościach mechanicznych. Zaproponowano algorytm konstruowania rozwiązań trójwymiarowych równań teorii sprężystości.

1. WPROWADZENIE

Rozwój technologii powłokowej doprowadził do wzrostu zainteresowania zagadnieniami kontaktowymi teorii sprężystości dotyczącymi jednorodnego liniowo sprężystego ośrodka izotropowego połączonego z niejednorodną izotropową liniowo sprężystą warstwą wierzchnią. Rozpatrywane w literaturze zagadnienia są zagadnieniami dwuwymiarowymi (Giannakopoulos i Pallot, 2000; Guler i Erdogan, 2004, 2006; 2007; Ke i Wang, 2006, 2007) lub osiowosymetrycznymi (Aizikovich i inni, 2002; Fischer-Cripps, 2003; Giannakopoulos i Suresh, 1997; Liu i Wang, 2008; Liu i inni, 2008). W niniejszej pracy przedyskutujemy możliwości konstruowania rozwiązań trójwymiarowych zagadnień teorii sprężystości dotyczących półprzestrzeni niejednorodnej o wyżej opisanych właściwościach mechanicznych.



Rys. 1. Schemat zagadnienia

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Rozważmy dwa podstawowe zagadnienia teorii sprężystości (Nowacki, 1970) dotyczące niejednorodnej liniowo sprężystej półprzestrzeni izotropowej. Pierwsze zagadnienie polega na obciążeniu powierzchni półprzestrzeni znanymi naciskami normalnymi $p(x,y)$ i stycznymi $\boldsymbol{\tau}(x,y) = \tau_x(x,y)\mathbf{i} + \tau_y(x,y)\mathbf{j}$ określonymi w obszarze Ω . Poza tym obszarem powierzchnia półprzestrzeni jest nieobciążona ($p(x,y) = \tau_x(x,y) = \tau_y(x,y) = 0, (x,y) \notin \Omega$). W zagadnieniu drugim w obszarze Ω znane są przemieszczenia punktów powierzchni półprzestrzeni $u_{x0}(x,y), u_{y0}(x,y), u_{z0}(x,y)$, które są różne od zera jedynie w obszarze Ω . Ośrodek składa się z jednorodnej liniowo sprężystej półprzestrzeni izotropowej o module Younga E_0 i współczynniku Poissona ν_0 oraz niejednorodnej izotropowej warstwy sprężystej, której moduł Younga $E_1(z)$ i współczynnik Poissona $\nu_1(z)$ są dwukrotnie różniczkowalnymi funkcjami odległości od powierzchni podłoża (Rys. 1). Pomiędzy warstwą a podłożem są spełnione warunki idealnego kontaktu mechanicznego.

Wprowadzone na rysunku 1 współrzędne kartezjańskie są współrzędnymi bezwymiarowymi odniesionymi do charakterystycznego liniowego wymiaru a obszaru Ω . Rozwiązując powyższe zagadnienie należy spełnić (Nowacki, 1970):

– równania równowagi:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(i)}}{\partial z} = 0, \quad i = 0, 1, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(i)}}{\partial z} = 0, \quad i = 0, 1, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(i)}}{\partial z} = 0, \quad i = 0, 1; \quad (1c)$$

– związki geometryczne:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(i)} &= \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy}^{(i)} = \frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz}^{(i)} &= \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xy}^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{xz}^{(i)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{yz}^{(i)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial y} \right), \quad i = 0, 1;\end{aligned}\tag{2}$$

– zależności konstytutywne:

$$\sigma_{kl}^{(i)} = \lambda_i(z) \left(\varepsilon_{xx}^{(i)} + \varepsilon_{yy}^{(i)} + \varepsilon_{zz}^{(i)} \right) \delta_{kl} + 2\mu_i(z) \varepsilon_{kl}^{(i)}, \quad (3)$$

$k, l = x, y, z, i = 0, 1;$

– warunki brzegowe na powierzchni półprzestrzeni niejednorodnej ($z=h$):

– zagadnienie I:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(1)}(x, y, h) &= -p(x, y), \\ \sigma_{xz}^{(1)}(x, y, h) &= -\tau_x(x, y), \\ \sigma_{yz}^{(1)}(x, y, h) &= -\tau_y(x, y);\end{aligned}\tag{4a}$$

– zagadnienie II:

$$\begin{aligned}u_x^{(1)}(x, y, h) &= u_{x0}(x, y), \\ u_y^{(1)}(x, y, h) &= u_{y0}(x, y), \\ u_z^{(1)}(x, y, h) &= u_{z0}(x, y);\end{aligned}\tag{4b}$$

– warunki brzegowe idealnego kontaktu mechanicznego na powierzchni rozdziału warstwy i podłoża ($z=0$):

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(0)}(x, y, 0) &= \sigma_{zz}^{(1)}(x, y, 0), \\ \sigma_{xz}^{(0)}(x, y, 0) &= \sigma_{xz}^{(1)}(x, y, 0), \\ \sigma_{yz}^{(0)}(x, y, 0) &= \sigma_{yz}^{(1)}(x, y, 0),\end{aligned}\tag{5a}$$

$$\begin{aligned}u_x^{(0)}(x, y, 0) &= u_x^{(1)}(x, y, 0), \\ u_y^{(0)}(x, y, 0) &= u_y^{(1)}(x, y, 0), \\ u_z^{(0)}(x, y, 0) &= u_z^{(1)}(x, y, 0);\end{aligned}\tag{5b}$$

– warunki w nieskończoności:

$$\mathbf{u}^{(i)}(x, y, z) \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad i = 0, 1.\tag{5c}$$

W równaniach (1)-(6) wprowadziliśmy oznaczenia: $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$ - tensor naprężenia, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ - tensor odkształcenia, $\mathbf{u}^{(i)}$ - wektor przemieszczenia, δ_{kl} - symbol Kroneckera, λ_i i μ_i - współczynniki Lamégo:

$$\lambda_i = \frac{E_i \nu_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}, \quad \mu_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}, \quad i = 0, 1.\tag{6}$$

W powyższych wzorach oraz w kolejnych rozdziałach parametry i funkcje stanu z indeksem 0 odnoszą się do podłoża. Natomiast parametry i funkcje stanu z indeksem 1 opisują warstwę wierzchnią.

3. METODA ROZWIĄZYWANIA

Podstawiając związki geometryczne do zależności konstytutywnych, a te do równań równowagi, otrzymamy równania teorii sprężystości w przemieszczeniach, znane w przypadku jednorodnego ośrodka izotropowego jako równania Lamégo (Nowacki, 1970):

$$\begin{aligned}\lambda_i \frac{\partial \theta_1^{(i)}}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial^2 u_z^{(i)}}{\partial x \partial z} + 2\mu_i \frac{\partial^2 u_x^{(i)}}{\partial x^2} + \mu_i \frac{\partial^2 u_x^{(i)}}{\partial y^2} + \\ + \mu_i \frac{\partial^2 u_y^{(i)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \mu_i \left(\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial x} \right) = 0, \quad i = 0, 1,\end{aligned}\tag{7a}$$

$$\begin{aligned}\lambda_i \frac{\partial \theta_1^{(i)}}{\partial y} + \lambda_i \frac{\partial^2 u_z^{(i)}}{\partial y \partial z} + 2\mu_i \frac{\partial^2 u_y^{(i)}}{\partial y^2} + \mu_i \frac{\partial^2 u_x^{(i)}}{\partial x \partial y} + \\ + \mu_i \frac{\partial^2 u_y^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \mu_i \left(\frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial y} \right) = 0, \quad i = 0, 1,\end{aligned}\tag{7b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_i \theta_1^{(i)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z} + \\ + \mu_i \Delta_1 u_z^{(i)} + \mu_i \frac{\partial \theta_1^{(i)}}{\partial z} = 0, \quad i = 0, 1,\end{aligned}\tag{7c}$$

gdzie

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},\tag{8a}$$

$$\theta_1^{(i)} = \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial y}, \quad i = 0, 1.\tag{8b}$$

W celu uproszczenia równań (7) wykorzystamy ideę algorytmu przedstawionego w pracy Halazjuka (1985). Różniczkując równanie (7a) względem zmiennej y , a równanie (7b) względem zmiennej x i odejmując od pierwszego równania - drugie, otrzymamy:

$$\mu_i \Delta_1 \mathcal{X}^{(i)} + \frac{\partial}{\partial z} \mu_i \frac{\partial \mathcal{X}^{(i)}}{\partial z} = 0, \quad i = 0, 1,\tag{9a}$$

gdzie

$$\mathcal{X}^{(i)} = \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial y} - \frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial x}, \quad i = 0, 1.\tag{9b}$$

Po zróżniczkowaniu równania (7a) względem zmiennej x , a równania (7b) względem zmiennej y , i po dodaniu równań uzyskamy natomiast

$$(\lambda_i + 2\mu_i)\Delta_1\theta_1^{(i)} + \frac{\partial}{\partial z}\mu_i\frac{\partial\theta_1^{(i)}}{\partial z} + \lambda_i\Delta_1\frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z} + \Delta_1\frac{\partial}{\partial z}(\mu_i u_z^{(i)}) = 0, \quad i = 0, 1. \quad (9c)$$

Rozwiązanie zagadnień konstruujemy za pomocą dwuwymiarowej całkowej transformacji Fouriera (Sneddon, 1972)

$$\begin{bmatrix} \tilde{\chi}^{(i)}(\xi, \eta, z) \\ \tilde{\theta}_1^{(i)}(\xi, \eta, z) \\ \tilde{u}_z^{(i)}(\xi, \eta, z) \end{bmatrix} = \mathcal{F} \begin{bmatrix} \chi^{(i)}(x, y, z) \\ \theta_1^{(i)}(x, y, z) \\ u_z^{(i)}(x, y, z) \end{bmatrix}; x \rightarrow \xi, y \rightarrow \eta \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \chi^{(i)}(x, y, z) \\ \theta_1^{(i)}(x, y, z) \\ u_z^{(i)}(x, y, z) \end{bmatrix} \exp(-ix\xi - iy\eta) dx dy, \quad i = 0, 1. \quad (10)$$

W przestrzeni transformat Fouriera zamiast równań w pochodnych cząstkowych (9a), (9c) i (7c) otrzymamy zwyczajne liniowe równania różniczkowe o zmiennych współczynnikach

$$\frac{d^2 \tilde{\chi}^{(i)}}{dz^2} + \tilde{\mu}_i \frac{d \tilde{\chi}^{(i)}}{dz} - s^2 \tilde{\chi}^{(i)} = 0, \quad i = 0, 1, \quad (11a)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_1^{(i)}}{dz^2} + \tilde{\mu}_i \frac{d \tilde{\theta}_1^{(i)}}{dz} - \frac{2s^2}{1-t_i^2} \tilde{\theta}_1^{(i)} + \frac{(1+t_i^2)s^2}{1-t_i^2} \frac{d \tilde{u}_z^{(i)}}{dz} - \tilde{\mu}_i s^2 \tilde{u}_z^{(i)} = 0, \quad i = 0, 1, \quad (11b)$$

$$\frac{d^2 \tilde{u}_z^{(i)}}{dz^2} + \tilde{\lambda}_{i1} \frac{d \tilde{u}_z^{(i)}}{dz} - \frac{(1-t_i^2)s^2}{2} \tilde{u}_z^{(i)} + \frac{(1+t_i^2)}{2} \frac{d \tilde{\theta}_1^{(i)}}{dz} + \tilde{\lambda}_{i2} \tilde{\theta}_1^{(i)} = 0, \quad i = 0, 1, \quad (11c)$$

gdzie

$$\tilde{\mu}_i = \mu_i^{-1} \frac{d\mu_i}{dz}, \quad \tilde{\lambda}_{i1} = (\lambda_i + 2\mu_i)^{-1} \frac{d(\lambda_i + 2\mu_i)}{dz}, \quad (11d)$$

$$\tilde{\lambda}_{i2} = (\lambda_i + 2\mu_i)^{-1} \frac{d\lambda_i}{dz}, \quad i = 0, 1, \quad (11e)$$

Przyjmując w równaniach (11a)-(11c) $\tilde{\mu}_0 = \tilde{\lambda}_{01} = \tilde{\lambda}_{02} = 0$, otrzymamy równania dla jednorodnej półprzestrzeni opisanej indeksem $i=0$:

$$\frac{d^2 \tilde{\chi}^{(0)}}{dz^2} - s^2 \tilde{\chi}^{(0)} = 0, \quad (12a)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_1^{(0)}}{dz^2} - \frac{2s^2}{1-t_0^2} \tilde{\theta}_1^{(0)} - \frac{(1+t_0^2)s^2}{1-t_0^2} \frac{d \tilde{u}_z^{(0)}}{dz} = 0, \quad (12b)$$

$$\frac{d^2 \tilde{u}_z^{(0)}}{dz^2} - \frac{(1-t_0^2)s^2}{2} \tilde{u}_z^{(0)} + \frac{(1+t_0^2)}{2} \frac{d \tilde{\theta}_1^{(0)}}{dz} = 0, \quad (12c)$$

które są liniowymi równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach. Poszukując rozwiązania równania (12a) w postaci $\tilde{\chi}^{(0)}(\xi, \eta, z) = b(\xi, \eta) \exp(mz)$, otrzymujemy równanie charakterystyczne $m^2 - s^2 = 0$ do wyznaczenia parametru m . Pierwiastkom tego równania odpowiadają liniowo niezależne rozwiązania (Arnold, 1983): $\exp(sz)$ i $\exp(-sz)$. Drugie rozwiązanie w półprzestrzeni $z \leq 0$ jest nieograniczone, wskutek czego funkcję $\tilde{\chi}^{(0)}(\xi, \eta, z)$ zapiszemy w postaci:

$$\tilde{\chi}^{(0)}(\xi, \eta, z) = b_0(\xi, \eta) \exp(sz), \quad (13a)$$

Rozwiązania układu równań (12b) i (12c) szukamy w postaci:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1^{(0)}(\xi, \eta, z) &= c(\xi, \eta) \exp(mz), \\ \tilde{u}_z^{(0)}(\xi, \eta, z) &= a(\xi, \eta) \exp(mz). \end{aligned}$$

Otrzymamy równanie charakterystyczne $(m^2 - s^2)^2 = 0$, którego pierwiastki $m=s$ i $m=-s$ są dwukrotne. Odpowiadają im liniowo niezależne rozwiązania (Arnold, 1983): $\exp(sz)$, $z \exp(sz)$, $\exp(-sz)$ i $z \exp(-sz)$. Tylko pierwsze dwa rozwiązania są ograniczone w półprzestrzeni $z \leq 0$. Zapisując funkcję $\tilde{u}_z^{(0)}(\xi, \eta, z)$ w postaci:

$$2\tilde{u}_z^{(0)} = (d_0 z a_{-1}(\xi, \eta) + 2a_0(\xi, \eta)) \exp(sz), \quad (13b)$$

gdzie

$$d_0 = \frac{1+t_0^2}{1-t_0^2} = \frac{1}{1-2\nu_0},$$

otrzymujemy następującą postać dla funkcji $\tilde{\theta}_1^{(0)}(\xi, \eta, z)$:

$$2\tilde{\theta}_1^{(0)}(\xi, \eta, z) = -((2+d_0)a_{-1}(\xi, \eta) + d_0 s z a_{-1}(\xi, \eta) + 2a_0(\xi, \eta) s) \exp(sz). \quad (13c)$$

Rozwiązanie równań (11) w warstwie wierzchniej ma postać:

$$\tilde{\chi}^{(1)}(\xi, \eta, z) = \sum_{j=1}^2 b_j(\xi, \eta) \chi_j(s, z), \quad (13d)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1^{(1)}(\xi, \eta, z) \\ \tilde{u}_z^{(1)}(\xi, \eta, z) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^4 a_j(\xi, \eta) \begin{bmatrix} \varphi_j(s, z) \\ \psi_j(s, z) \end{bmatrix}, \quad (13e)$$

gdzie funkcje $\chi_1(\xi, \eta, z)$ i $\chi_2(\xi, \eta, z)$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania różniczkowego (11a). Natomiast pary funkcji $(\varphi_j(\xi, \eta, z), \psi_j(\xi, \eta, z))$, $j = 1, 2, 3, 4$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami układu równań różniczkowych (11b,c). Funkcje $a_j(\xi, \eta)$, $j = -1, 0, \dots, 4$ oraz $b_j(\xi, \eta)$,

$j = 0, 1, 2$, wprowadzone we wzorach (13) są nieznanymi funkcjami parametrów dwuwymiarowego przekształcenia całkowego Fouriera, które należy obliczyć, spełniając warunki brzegowe (4a) (lub 4b) oraz (5).

Przechodząc w zależnościach (8b) i (9b) do przestrzeni transformata Fouriera, uzyskujemy wzory:

$$i\xi\tilde{u}_x^{(i)} + i\eta\tilde{u}_y^{(i)} = \tilde{\theta}_1^{(i)}, \quad i\eta\tilde{u}_x^{(i)} - i\xi\tilde{u}_y^{(i)} = \tilde{\chi}^{(i)}, \quad i = 0, 1, \quad (14a)$$

na których podstawie obliczamy transformaty Fouriera pierwszych dwóch składowych wektora przemieszczenia sprężystego:

$$is^2\tilde{u}_x^{(i)} = \xi\tilde{\theta}_1^{(i)} + \eta\tilde{\chi}^{(i)}, \quad is^2\tilde{u}_y^{(i)} = \eta\tilde{\theta}_1^{(i)} - \xi\tilde{\chi}^{(i)}, \quad i = 0, 1. \quad (14b)$$

Podstawiając wzory (14b) do związków geometrycznych (2) i zależności konstytutywnych (3), zapisanych w przestrzeni transformata Fouriera, otrzymujemy wzory do obliczenia transformata Fouriera składowych tensora naprężeń:

$$\frac{\tilde{\sigma}_{xx}^{(i)}}{2\mu_i} = \frac{t_i^2}{1-t_i^2} \left(\tilde{\theta}_1^{(i)} + \frac{d\tilde{u}_z^{(i)}}{dz} \right) + \frac{\xi^2}{s^2} \tilde{\theta}_1^{(i)} + \frac{\xi\eta}{s^2} \tilde{\chi}^{(i)}, \quad i = 0, 1, \quad (15a)$$

$$\frac{\tilde{\sigma}_{yy}^{(i)}}{2\mu_i} = \frac{t_i^2}{1-t_i^2} \left(\tilde{\theta}_1^{(i)} + \frac{d\tilde{u}_z^{(i)}}{dz} \right) + \frac{\eta^2}{s^2} \tilde{\theta}_1^{(i)} - \frac{\xi\eta}{s^2} \tilde{\chi}^{(i)}, \quad i = 0, 1, \quad (15b)$$

$$\frac{\tilde{\sigma}_{zz}^{(i)}}{2\mu_i} = \frac{t_i^2}{1-t_i^2} \tilde{\theta}_1^{(i)} + \frac{1}{1-t_i^2} \frac{d\tilde{u}_z^{(i)}}{dz}, \quad i = 0, 1, \quad (15c)$$

$$\frac{\tilde{\sigma}_{xy}^{(i)}}{2\mu_i} = \frac{\xi\eta}{s^2} \tilde{\theta}_1^{(i)} + \frac{\eta^2 - \xi^2}{2s^2} \tilde{\chi}^{(i)}, \quad i = 0, 1, \quad (15d)$$

$$\frac{is^2\tilde{\sigma}_{xz}^{(i)}}{\mu_i} = \xi \left(\frac{d\tilde{\theta}_1^{(i)}}{dz} - s^2\tilde{u}_z^{(i)} \right) + \eta \frac{d\tilde{\chi}^{(i)}}{dz}, \quad i = 0, 1, \quad (15e)$$

$$\frac{is^2\tilde{\sigma}_{yz}^{(i)}}{\mu_i} = \eta \left(\frac{d\tilde{\theta}_1^{(i)}}{dz} - s^2\tilde{u}_z^{(i)} \right) - \xi \frac{d\tilde{\chi}^{(i)}}{dz}, \quad i = 0, 1. \quad (15f)$$

Zapisując warunki brzegowe (5) w przestrzeni transformata Fouriera, a następnie podstawiając do nich zależności (14) i (15), otrzymujemy następującą postać warunków brzegowych idealnego kontaktu mechanicznego:

$$\tilde{u}_z^{(1)}|_{z=0} = \tilde{u}_z^{(0)}|_{z=0}, \quad \tilde{\theta}_1^{(1)}|_{z=0} = \tilde{\theta}_1^{(0)}|_{z=0}, \quad (16a)$$

$$\left(\frac{t_1^2}{1-t_1^2} \tilde{\theta}_1^{(1)} + \frac{1}{1-t_1^2} \frac{d\tilde{u}_z^{(1)}}{dz} \right) \Big|_{z=0} = \left(\frac{t_0^2}{1-t_0^2} \tilde{\theta}_1^{(0)} + \frac{1}{1-t_0^2} \frac{d\tilde{u}_z^{(0)}}{dz} \right) \Big|_{z=0}, \quad (16b)$$

$$\left(\frac{d\tilde{\theta}_1^{(1)}}{dz} - s^2\tilde{u}_z^{(1)} \right) \Big|_{z=0} = \frac{\mu_0}{\mu_1|_{z=0}} \left(\frac{d\tilde{\theta}_1^{(0)}}{dz} - s^2\tilde{u}_z^{(0)} \right) \Big|_{z=0}, \quad (16c)$$

$$\tilde{\chi}^{(1)}|_{z=0} = \tilde{\chi}^{(0)}|_{z=0}, \quad \frac{d\tilde{\chi}^{(1)}}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{\mu_0}{\mu_1|_{z=0}} \frac{d\tilde{\chi}^{(0)}}{dz} \Big|_{z=0}. \quad (16d)$$

W podobny sposób uzyskujemy warunki brzegowe określone w zagadnieniu I, które opisują obciążenie półprzestrzeni niejednorodnej:

$$\left(t_1^2 \tilde{\theta}_1^{(1)} + \frac{d\tilde{u}_z^{(1)}}{dz} \right) \Big|_{z=h} = -\frac{1-t_1^2}{2\mu_1|_{z=h}} \tilde{p}(\xi, \eta), \quad (17a)$$

$$\left(\frac{d\tilde{\theta}_1^{(1)}}{dz} - \tilde{u}_z^{(1)} \right) \Big|_{z=h} = -\frac{\tilde{\tau}_1(\xi, \eta)}{\mu_1|_{z=h}}, \quad (17b)$$

$$\frac{d\tilde{\chi}^{(1)}}{dz} \Big|_{z=h} = -\frac{\tilde{\tau}_2(\xi, \eta)}{\mu_1|_{z=h}}, \quad (17c)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_1(\xi, \eta) &= i\xi\tilde{\tau}_x(\xi, \eta) + i\eta\tilde{\tau}_y(\xi, \eta), \\ \tilde{\tau}_2(\xi, \eta) &= i\eta\tilde{\tau}_x(\xi, \eta) - i\xi\tilde{\tau}_y(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}(\xi, \eta) \\ \tilde{\tau}_x(\xi, \eta) \\ \tilde{\tau}_y(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \begin{bmatrix} p(x, y) \\ \tau_x(x, y) \\ \tau_y(x, y) \end{bmatrix} \exp(-ix\xi - iy\eta) dx dy. \quad (19)$$

Warunki brzegowe określone na powierzchni półprzestrzeni niejednorodnej w zagadnieniu II mają postać:

$$\theta_1^{(1)}(\xi, \eta, h) = \tilde{u}_1(\xi, \eta), \quad \tilde{u}_z^{(1)}(\xi, \eta, h) = \tilde{u}_{z0}(\xi, \eta), \quad (20a)$$

$$\chi^{(1)}(\xi, \eta, h) = \tilde{u}_2(\xi, \eta), \quad (20b)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(\xi, \eta) &= i\xi\tilde{u}_{x0}(\xi, \eta) + i\eta\tilde{u}_{y0}(\xi, \eta), \\ \tilde{u}_2(\xi, \eta) &= i\eta\tilde{u}_{x0}(\xi, \eta) - i\xi\tilde{u}_{y0}(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{x0}(\xi, \eta) \\ \tilde{u}_{y0}(\xi, \eta) \\ \tilde{u}_{z0}(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \begin{bmatrix} u_{x0}(x, y) \\ u_{y0}(x, y) \\ u_{z0}(x, y) \end{bmatrix} \exp(-ix\xi - iy\eta) dx dy. \quad (22)$$

Jak wynika ze struktury rozwiązań (13) oraz warunków brzegowych (16)-(17) określonych w zagadnieniu I (lub (16) i (20) – w zagadnieniu II), zarówno w pierwszym jak i drugim zagadnieniu teorii sprężystości funkcje $a_j(\xi, \eta)$, $j = -1, 0, \dots, 4$ i $b_j(\xi, \eta)$, $j = 0, 1, 2$ wyznaczamy z dwóch niezależnych układów równań liniowych. Pierwszy układ zawiera sześć równań, które powstają na skutek spełnienia warunków brzegowych (16a)-(16c), (17a) i (17b) określonych w zagadnieniu I (lub (16a)-(16c) i (20a) – w zagadnieniu II). Służy on do obliczenia funkcji $a_j(\xi, \eta)$, $j = -1, 0, \dots, 4$. Ponieważ opisywany układ zawiera tylko dwa równania niejednorodne, jego rozwiązanie zapiszemy w postaci:

– zagadnienie I:

$$a_j(\xi, \eta) = -\frac{1-\eta^2}{2\mu_1|_{z=h}} \tilde{p}(\xi, \eta), \quad (23a)$$

$$a_{j1}^*(s) = -\frac{1}{\mu_1|_{z=h}} \tilde{\tau}_1(\xi, \eta) a_{j2}^*(s), \quad j = -1, 0, \dots, 4,$$

– zagadnienie II:

$$a_j(\xi, \eta) = \tilde{u}_{z0}(\xi, \eta), \quad (23b)$$

$$a_{j1}^*(s) = \tilde{u}_1(\xi, \eta) a_{j2}^*(s), \quad j = -1, 0, \dots, 4,$$

gdzie funkcje $a_{j1}^*(s)$ i $a_{j2}^*(s)$ są rozwiązaniami układu sześciu równań liniowych z tą samą macierzą, co i układ równań do wyznaczenia funkcji $a_j(\xi, \eta)$ i wyrazem wolnym, w którym wyrazy, występujące w prawej części równań (17a) i (17b) określonych w zagadnieniu I (lub równań (20a) – w zagadnieniu II) zastąpiono stałymi 1 i 0 (przy wyznaczeniu $a_{j1}^*(s)$) lub stałymi 0 i 1 (przy wyznaczeniu $a_{j2}^*(s)$). We wzorach (23) uwzględniliśmy, że elementy macierzy opisywanego układu równań zależą jedynie od promieniowej współrzędnej s ($s^2 = \xi^2 + \eta^2$) wprowadzonej w płaszczyźnie parametrów przekształcenia całkowego. Powyższy wniosek jest ważny ze względu na obliczanie całek, które powstaną przy stosowaniu odwrotnego przekształcenia całkowego Fouriera.

Drugi układ równań zawiera trzy równania odwziewierciadające warunki brzegowe (16d) i (17c) określone w zagadnieniu I (lub (16d) i (20b) – w zagadnieniu II). Tylko jedno równanie tego układu jest niejednorodne. Znaczący to, że funkcje $b_j(\xi, \eta)$, $j=0,1,2$ możemy zapisać w postaci:

– zagadnienie I:

$$b_j(\xi, \eta) = -\frac{1}{\mu_1|_{z=h}} \tilde{\tau}_2(\xi, \eta) b_j^*(s), \quad j = 0, 1, 2, \quad (24a)$$

– zagadnienie II:

$$b_j(\xi, \eta) = \tilde{u}_2(\xi, \eta) b_j^*(s), \quad j = 0, 1, 2, \quad (24b)$$

gdzie funkcje $b_j^*(s)$ są rozwiązaniami układu trzech równań liniowych z tą samą macierzą, co i układ równań do wyznaczenia funkcji $b_j(\xi, \eta)$ i wyrazem wolnym, w którym wyraz, występujący w prawej części równania (17c) określonego w zagadnieniu I (lub równania (20b) – w zagadnieniu II) zastąpiono stałą równą 1.

Stosując do wzorów (13)-(15) odwrotną transformację Fouriera, otrzymamy wzory do obliczenia oryginałów składowych wektora przemieszczenia i tensora naprężenia:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(i)}(x, y, z) \\ \boldsymbol{\sigma}^{(i)}(x, y, z) \end{bmatrix} &= \mathcal{F}^{-1} \left[\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}(\xi, \eta, z) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}(\xi, \eta, z) \end{bmatrix}; \xi \rightarrow x, \eta \rightarrow y \right] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}(\xi, \eta, z) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}(\xi, \eta, z) \end{bmatrix} \exp(ix\xi + iy\eta) d\xi d\eta, \quad i=0,1. \end{aligned} \quad (25)$$

4. PRZYPADKI SZCZEGÓLNE WŁAŚCIWOŚCI MECHANICZNYCH WARSTWY WIERZCHNIEJ

W zależnościach (13d) i (13e) wprowadziliśmy liniowo niezależne rozwiązania $\chi_j(s, z)$, $j = 1, 2$ oraz $\phi_j(s, z)$ i $\psi_j(s, z)$, $j = 1, 2, 3, 4$ równań różniczkowych (11) opisujących pole przemieszczeń i naprężeń w warstwie wierzchniej. Nie podaliśmy jednak żadnego algorytmu obliczania tych funkcji. W przypadku, gdy wiadomo jedynie, że funkcje $\tilde{\mu}_1(z)$, $\tilde{\lambda}_{11}(z)$ i $\tilde{\lambda}_{12}(z)$ opisane wzorami (11d) są funkcjami różniczkowalnymi zmiennej z , brak jest efektywnego algorytmu analitycznego konstruowania takich rozwiązań. Dlatego też rozpatrzmy kilka przypadków szczególnych, w których funkcje $\chi_j(s, z)$, $\phi_j(s, z)$, $\psi_j(s, z)$ możemy wyrazić przez znane funkcje elementarne i specjalne.

4.1. Jednorodna warstwa wierzchnia

Jeśli warstwa wierzchnia jest warstwą jednorodną, otrzymujemy $\tilde{\mu}_0 = \tilde{\lambda}_{01} = \tilde{\lambda}_{02} = 0$, czyli warstwa wierzchnia jest opisywana równaniami (12) określonymi przy $0 < z < h$. Liniowo niezależnymi rozwiązaniami tych równań, jak zaznaczyliśmy wyżej, są funkcje: $\exp(sz)$, $z \exp(sz)$, $\exp(-sz)$ i $z \exp(-sz)$. Skorzystamy jednak z następujących liniowych kombinacji tych funkcji:

$$2 \sinh(s(h-z)) = \exp(sh) \exp(-sz) - \exp(-sh) \exp(sz), \quad (26a)$$

$$2 \cosh(s(h-z)) = \exp(sh) \exp(-sz) + \exp(-sh) \exp(sz), \quad (26b)$$

$$2(h-z) \sinh(s(h-z)) = 2h \sinh(s(h-z)) + \exp(sh) z \exp(-sz) + \exp(-sh) z \exp(sz), \quad (26c)$$

$$2(h-z) \cosh(s(h-z)) = 2h \cosh(s(h-z)) + \exp(sh) z \exp(-sz) - \exp(-sh) z \exp(sz). \quad (26d)$$

Rozwiązania zapiszemy w postaci:

$$\chi_1(s, z) = \sinh(s(h-z)), \quad \chi_2(s, z) = \cosh(s(h-z)); \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} 2\varphi_1(s, z) &= (2 + d_1) \sinh(s(h-z)) + \\ &\quad + d_1 s(h-z) \cosh(s(h-z)), \\ 2\varphi_2(s, z) &= (2 + d_1) \cosh(s(h-z)) + \\ &\quad + d_1 s(h-z) \sinh(s(h-z)), \end{aligned} \quad (27b)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(s, z) &= s \cosh(s(h-z)), \\ \varphi_4(s, z) &= s \sinh(s(h-z)); \\ 2\psi_1(s, z) &= d_1 (h-z) \sinh(s(h-z)), \\ 2\psi_2(s, z) &= d_1 (h-z) \cosh(s(h-z)), \\ \psi_3(s, z) &= \sinh(s(h-z)), \\ \psi_4(s, z) &= \cosh(s(h-z)), \end{aligned} \quad (27c)$$

gdzie

$$d_1 = \frac{1+t_1^2}{1-t_1^2} = \frac{1}{1-2\nu_1}.$$

W pracach Kołodziejczyka i Kulchytsky-Zhyhailo, (2007) wykazano, że zależności (27) można łatwo uogólnić na przypadek pakietu, który składa się z określonej liczby jednorodnych izotropowych warstw.

4.2. Niejednorodna warstwa wierzchnia o module Younga zmieniającym się według zależności wykładniczej

Przyjmijmy teraz, że współczynnik Poissona warstwy wierzchniej jest stały, a moduł Younga zmienia się wzdłuż grubości warstwy według zależności wykładniczej:

$$E_1(z) = E_1^* \exp(\beta z), \quad (28)$$

gdzie E_1^* i β – znane parametry. Podstawiając wzór (28) do wzorów (6) a te do zależności (11d), otrzymamy:

$$\bar{\mu}_1 = \beta, \quad \bar{\lambda}_{11} = \beta, \quad \bar{\lambda}_{12} = t_1^2 \beta. \quad (29)$$

Uwzględniając wzory (29), przekształcamy równania (11a-11c) do równań różniczkowych o stałych współczynnikach:

$$\frac{d^2 \tilde{\chi}^{(1)}}{dz^2} + \beta \frac{d \tilde{\chi}^{(1)}}{dz} - s^2 \tilde{\chi}^{(1)} = 0, \quad (30a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\theta}_1^{(1)}}{dz^2} + \beta \frac{d \tilde{\theta}_1^{(1)}}{dz} - \frac{2s^2}{1-t_1^2} \tilde{\theta}_1^{(1)} + \\ - \frac{(1+t_1^2)s^2}{1-t_1^2} \frac{d \tilde{u}_z^{(1)}}{dz} - \beta s^2 \tilde{u}_z^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (30b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{u}_z^{(1)}}{dz^2} + \beta \frac{d \tilde{u}_z^{(1)}}{dz} - \frac{(1-t_1^2)s^2}{2} \tilde{u}_z^{(1)} + \\ + \frac{(1+t_1^2)}{2} \frac{d \tilde{\theta}_1^{(1)}}{dz} + \beta t_1^2 \tilde{\theta}_1^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (30c)$$

Rozwiązania równania (30a) poszukujemy, jak i poprzednio, w postaci: $\tilde{\chi}^{(1)}(\xi, \eta, z) = b(\xi, \eta) \exp(mz)$. Otrzymujemy równanie charakterystyczne: $m^2 + \beta m - s^2 = 0$, którego pierwiastkom odpowiadają rozwiązania:

$$\chi_1(s, z) = \exp\left(\left(-\bar{\beta} - \sqrt{\bar{\beta}^2 + s^2}\right)z\right), \quad (31a)$$

$$\chi_2(s, z) = \exp\left(\left(-\bar{\beta} + \sqrt{\bar{\beta}^2 + s^2}\right)z\right), \quad 2\bar{\beta} = \beta.$$

Rozwiązania układu równań (30b) i (30c) szukamy w postaci:

$$\tilde{\theta}_1^{(1)}(\xi, \eta, z) = c(\xi, \eta) \exp(mz),$$

$$\tilde{u}_z^{(1)}(\xi, \eta, z) = a(\xi, \eta) \exp(mz).$$

Otrzymamy równanie charakterystyczne (Ozturk i Erdogan, 1996):

$$\left(m^2 - s^2\right)^2 + 2m\beta\left(m^2 - s^2\right) + \beta^2\left(m^2 + t_1^2 s^2\right) = 0, \quad (32)$$

którego zespolone pierwiastki zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} m_1 &= -\bar{\beta} - \sqrt{\bar{\beta}^2 + (s^2 + i|\beta|t_1 s)}, \\ m_2 &= -\bar{\beta} - \sqrt{\bar{\beta}^2 + (s^2 - i|\beta|t_1 s)}, \\ m_3 &= -\bar{\beta} + \sqrt{\bar{\beta}^2 + (s^2 + i|\beta|t_1 s)}, \\ m_4 &= -\bar{\beta} + \sqrt{\bar{\beta}^2 + (s^2 - i|\beta|t_1 s)}. \end{aligned} \quad (33)$$

We wzorach (33) założyliśmy, że:

$$\operatorname{Re} \sqrt{\bar{\beta}^2 + (s^2 \pm i|\beta|t_1 s)} > 0.$$

Funkcje $\phi_j(s, z)$ i $\psi_j(s, z)$ otrzymamy w postaci:

$$\varphi_j(s, z) = \left(s^2 + \beta^2 - m_j^2\right) \exp(m_j z), \quad (34)$$

$$\psi_j(s, z) = m_j^{-1} \left(m_j^2 - s^2 - t_1^2 \beta^2\right) \exp(m_j z), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

4.3. Niejednorodna warstwa wierzchnia o module Younga zmieniającym się według zależności potęgowej

W kolejnym przypadku szczególnym pozostajemy przy założeniu, że współczynnik Poissona jest stały. Natomiast moduł Younga zmienia się wzdłuż grubości warstwy według zależności potęgowej:

$$E_1(z) = E_1^* (c+z)^\alpha, \quad \alpha = (1-2\nu_1)/\nu_1, \quad (35)$$

gdzie E_1^* i c – znane parametry. Podstawiając wzór (35) do wzorów (6) a te do zależności (11d), otrzymamy:

$$\bar{\mu}_i = \frac{\alpha}{\zeta}, \quad \bar{\lambda}_{i1} = \frac{\alpha}{\zeta}, \quad \bar{\lambda}_{i2} = \frac{\alpha t_1^2}{\zeta}, \quad \zeta = c+z. \quad (36)$$

Uwzględniając wzory (36), przekształcamy równania (11a)-(11c) do postaci:

$$\frac{d^2 \tilde{\chi}^{(1)}}{d\zeta^2} + \frac{\alpha}{\zeta} \frac{d \tilde{\chi}^{(1)}}{d\zeta} - s^2 \tilde{\chi}^{(1)} = 0, \quad (37a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\theta}_1^{(1)}}{d\zeta^2} + \frac{\alpha}{\zeta} \frac{d \tilde{\theta}_1^{(1)}}{d\zeta} - \frac{2s^2}{1-t_1^2} \tilde{\theta}_1^{(1)} + \\ - \frac{(1+t_1^2)s^2}{1-t_1^2} \frac{d \tilde{u}_z^{(1)}}{d\zeta} - \frac{\alpha s^2}{\zeta} \tilde{u}_z^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (37b)$$

$$\frac{d^2 \tilde{u}_z^{(1)}}{d\zeta^2} + \frac{\alpha}{\zeta} \frac{d\tilde{u}_z^{(1)}}{d\zeta} - \frac{(1-t_1^2)s^2}{2} \tilde{u}_z^{(1)} + \frac{(1+t_1^2)}{2} \frac{d\tilde{\theta}_1^{(1)}}{d\zeta} + \frac{\alpha t_1^2}{\zeta} \tilde{\theta}_1^{(1)} = 0. \quad (37c)$$

Szukając rozwiązanie równania (37a) w postaci:

$$\chi^{(1)}(\xi, \eta, z) = \zeta^p \chi_1^{(1)}(\xi, \eta, z), \quad 2p + \alpha = 1, \quad (38)$$

otrzymamy równanie Bessela (Lebedev, 1963):

$$\frac{d^2 \tilde{\chi}_1^{(1)}}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d\tilde{\chi}_1^{(1)}}{d\zeta} + \left(\frac{p^2}{\zeta^2} - s^2 \right) \tilde{\chi}_1^{(1)} = 0, \quad (39)$$

którego liniowo niezależnymi rozwiązaniami są modyfikowane funkcje Bessela: $I_p(s\zeta)$ i $K_p(s\zeta)$. Znaczy to, że

$$\chi_1(s, z) = \zeta^p I_p(s\zeta), \quad \chi_2(s, z) = \zeta^p K_p(s\zeta), \quad (40)$$

Można wykazać, że równania (37b) i (37c) powstają także w osiowo-symetrycznym zagadnieniu dotyczącym rozpatrywanego powyżej ośrodka sprężystego. Rozpatrując w pracy (Kassir, 1974) osiowosymetryczne zagadnienie kontaktowe dotyczące półprzestrzeni sprężystej z właściwościami mechanicznymi opisanymi zależnościami (35), jej autorzy skonstruowali dwa liniowo niezależne rozwiązania równań (37b) i (37c), które są ograniczone przy $z \rightarrow \infty$:

$$\varphi_1(s, \zeta) = \zeta s^2 K_p(\zeta s), \quad (41a)$$

$$\psi_1(s, \zeta) = K_p(\zeta s) + \zeta s K_{p-1}(\zeta s),$$

$$\varphi_2(s, \zeta) = s K_p(\zeta s) - t_1^2 \zeta s^2 K_{p-1}(\zeta s), \quad (41b)$$

$$\psi_2(s, \zeta) = -t_1^2 \zeta s K_p(\zeta s).$$

Uwzględniając strukturę rozwiązań opartych na modyfikowanych funkcjach Bessela drugiego rodzaju, uzyskujemy pozostałe dwa liniowo niezależne rozwiązania oparte na modyfikowanych funkcjach Bessela pierwszego rodzaju:

$$\varphi_3(s, \zeta) = \zeta s^2 I_p(\zeta s), \quad (41c)$$

$$\psi_3(s, \zeta) = I_p(\zeta s) - \zeta s I_{p-1}(\zeta s),$$

$$\varphi_4(s, \zeta) = s I_p(\zeta s) + t_1^2 \zeta s^2 I_{p-1}(\zeta s), \quad (41d)$$

$$\psi_4(s, \zeta) = -t_1^2 \zeta s I_p(\zeta s).$$

5. PRZYPADKI SZCZEGÓLNE PRZYŁOŻONEGO OBCIĄŻENIA

Ze wzorów (13), (23a) i (23b) wynika, że rozwiązanie zagadnienia I zależy od transformat Fouriera $\tilde{p}(\xi, \eta)$, $\tilde{\tau}_1(\xi, \eta)$ i $\tilde{\tau}_2(\xi, \eta)$. Uwzględniając strukturę funkcji $\tilde{\tau}_1(\xi, \eta)$ i $\tilde{\tau}_2(\xi, \eta)$ opisaną zależnościami (18), wnioskujemy, że są one transformacjami Fouriera funkcji:

$$\tau_1(x, y) = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \quad \text{i} \quad \tau_2(x, y) = \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x}. \quad (42)$$

Ze wzorów (13), (23a) i (23b) wynika także, że funkcje $\chi^{(i)}(x, y, z), i=0,1$ są równe zero, gdy $\tau_2(x, y)=0$. Natomiast funkcje $\theta_1^{(i)}(x, y, z)$ i $u_z^{(i)}(x, y, z), i=0,1$ są zerowe, gdy $p(x, y)=0$ i $\tau_1(x, y)=0$. Z powyższego wynika, że w zagadnieniu, w którym powierzchnia półprzestrzeni jest obciążona jedynie naciskami normalnymi, funkcje $\chi^{(i)}(x, y, z) \equiv 0, i=0,1$.

W przypadku zagadnienia płaskiego stanu odkształcenia (Timoshenko i Goodier, 1951), w którym obszarem obciążenia jest pasmo o szerokości $2a$ ($\Omega = \{-a \leq x \leq a, -\infty < y < \infty\}$) a funkcje $p(x, y)$ i $\tau_x(x, y)$ zależą jedynie od zmiennej x ($\tau_y(x, y)=0$), ponownie uzyskujemy $\chi^{(i)}(x, y, z) \equiv 0, i=0,1$. Natomiast w zagadnieniu antypłaskim (Timoshenko i Goodier, 1951), w którym w obszarze ($\Omega = \{-a \leq x \leq a, -\infty < y < \infty\}$) są określone jedynie naciski $\tau_x(x)$ ($p=0$ i $\tau_x=0$) możemy przyjąć: $\theta_1^{(i)}(x, y, z) = 0$ i $u_z^{(i)}(x, y, z) = 0, i=0,1$.

W zagadnieniu osiowosymetrycznym, w którym w obszarze pierścieniowym $\Omega = \{b \leq r \leq a\}$, gdzie r ($r^2 = x^2 + y^2$) jest współrzędną promieniową, są określone naciski normalne $p(r)$ i styczne $\tau_r(r)$ ($\tau_\phi=0$, ϕ - współrzędna obwodowa), składowe obciążenia stycznego τ_x i τ_y są równe:

$$\tau_1(x, y) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_r) \quad \text{i} \quad \tau_2(x, y) = 0. \quad (43)$$

Znaczy to, że funkcje $\chi^{(i)}(x, y, z) \equiv 0, i=0,1$, a funkcje $\theta_1^{(i)}(x, y, z)$ i $u_z^{(i)}(x, y, z), i=0,1$ zależą od funkcji $p(r)$ i $r^{-1} \partial(r \tau_r) / \partial r$.

Jeśli, natomiast przyjmiemy, że w obszarze pierścieniowym jest określone jedynie obciążenie $\tau_\phi(r)$ ($p=\tau_r=0$), otrzymamy:

$$\tau_1(x, y) = 0 \wedge \tau_2(x, y) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_\phi) \Rightarrow \Rightarrow \theta_1^{(i)}(x, y, z) = u_z^{(i)}(x, y, z) = 0, i=0,1. \quad (44)$$

Porównując zależności (17) i (18) określone w zagadnieniu I z zależnościami (20) i (21) opisującymi zagadnienie II, możemy stwierdzić, że wnioski formułowane w niniejszym rozdziale dotyczące zagadnienia I są prawdziwe także w przypadku zagadnienia II.

6. PODSUMOWANIE

W niniejszej pracy zaproponowano algorytm konstruowania rozwiązań trójwymiarowej teorii sprężystości dotyczącej jednorodnej izotropowej półprzestrzeni liniowo sprężystej połączonej z niejednorodną warstwą, której właściwości mechaniczne zależą od odległości do powierzchni rozważanej półprzestrzeni niejednorodnej. Proponowane

podejście oparto na wprowadzeniu potencjałów sprężystych opisanych zależnościami (8b) i (9b), które umożliwiają rozseparowanie trójwymiarowych równań teorii sprężystości. Do wyznaczenia potencjału χ opisanego wzorem (9b) otrzymujemy zarówno niezależne równanie różniczkowe jak i niezależne warunki brzegowe. Drugi wprowadzony potencjał i pionowa składowa wektora przemieszczenia sprężystego są obliczane niezależnie od potencjału χ . Do ich określenia służy układ dwóch równań różniczkowych i sześciu warunków brzegowych. Wykazano, że w przypadku, gdy rozważane zagadnienie jest zagadnieniem antypłaskim lub zagadnieniem skręcania, spośród trzech wyznaczanych funkcji tylko potencjał χ jest różny od zera. Natomiast, gdy rozpatrywane zagadnienie jest zagadnieniem płaskiego stanu odkształcenia lub zagadnieniem osiowo-symetrycznym, potencjał χ jest równy zeru.

W zagadnieniach, w których warstwa wierzchnia jest jednorodna, lub jej współczynnik Poissona jest stały, a zależność modułu Younga od odległości do powierzchni półprzestrzeni niejednorodnej jest opisywana funkcją wykładniczą lub potęgową, skonstruowano rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych o zmiennych współczynnikach, które powstają na skutek stosowania do trójwymiarowych równań teorii sprężystości dwuwymiarowego przekształcenia całkowitego Fouriera.

LITERATURA

1. **Aizikovich S. M., Alexandrov V. M., Kalker J. J. et al.** (2002), Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties, *Int. J. Solids Struct.*, 39, 2745–2772.
2. **Arnold V. I.** (1983), *Teoria równań różniczkowych*, Warszawa, PWN.
3. **Fischer-Cripps A. C.** (2003), Analysis of instrumented indentation test data for functionally graded materials, *Surface & Coatings Technology*, 168, 136–141.
4. **Giannakopoulos A. E., Pallot P.** (2000), Two-dimensional contact analysis of elastic graded materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 48, 1597–1631.
5. **Giannakopoulos A. E., Suresh S.** (1997), Indentation of solids with gradients in elastic properties: part II. Axisymmetric indentors, *Int. J. Solids Structures*, 2393–2428.
6. **Guler M. A., Erdogan F.** (2004), Contact mechanics of graded coatings, *Int. J. Solids Struct.*, 41, 3865–3889.
7. **Guler M. A., Erdogan F.** (2006), Contact mechanics of two deformable elastic solids with graded coatings, *Mechanics of Materials*, 38, 633–647.
8. **Guler M. A., Erdogan F.** (2007), The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings, *Int. J. Mech. Sci.*, 49, 161–182.
9. **Halazjuk V. A.** (1985), O naprężajonno-deformirovannom sostojanii uprugoj plastiny s nekrugovym cilindričeskim vyrezom, *Dokl. AN USSR*, ser. A, No. 3, 20–24.
10. **Kassir M. K., Chuaprasert M. F.** (1974), A rigid punch in contact with a non-homogeneous elastic solid, *Trans. ASME, J. of Appl. Mech.*, 41, 1019–1024.
11. **Ke L. L., Wang Y. S.** (2006), Two-dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties, *Int. J. Solids Struct.*, 43, 5779–5798.
12. **Ke L. L., Wang Y. S.** (2007), Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials, *Eur. J. of Mech. A/Solids*, 26, 171–188.
13. **Kolodziejczyk W., Kulchytsky-Zhyhailo R.** (2007), Pressure of the Lateral Surface of a Cylinder on a Periodically Layered Half Space, *Materials Science*, 43, No. 3, 351–360.
14. **Kulchytsky-Zhyhailo R., Kolodziejczyk W.** (2007), On axisymmetrical contact problem of pressure of a rigid sphere into a periodically two-layered semi-space, *Int. J. Mech. Sci.*, 49, 704–711.
15. **Lebedev N. N.** (1963), *Specialnyje funkcii i ich prilozhenia*, Fizmatgiz, Moskwa, druga edycja. (Istnieje tłumaczenie na język polski: **Lebedev N. N.** (1957), *Funkcje specjalne i ich zastosowania*, PWN, Warszawa).
16. **Liu T. J., Wang Y. S.** (2008), Axisymmetric frictionless contact problem of a functionally graded coating with exponentially varying modulus, *Acta Mechanica*, 199, 151–165.
17. **Liu T. J., Wang Y. S., Zhang C.** (2008), Axisymmetric frictionless contact of functionally graded materials, *Archive of Appl. Mech.*, 78, 267–282.
18. **Nowacki W.** (1970), *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa.
19. **Ozturk M., Erdogan F.** (1996), Axisymmetric crack problem in bonded materials with a graded interfacial region, *Int. J. Solids Structures*, 33, 193–219.
20. **Ozturk M., Erdogan F.** (1996), Axisymmetric crack problem in a nonhomogeneous medium, *Trans. ASME, J. of Appl. Mech.*, 60, No 2, 406–413.
21. **Sneddon I. N.** (1972), *The use of integral transforms*, McGraw-Hill, New York.
22. **Timoshenko S., Goodier J. N.** (1951), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill Book Company, New York. (Istnieje tłumaczenie na język polski: **Timoshenko S., Goodier J. N.** (1962), *Teoria sprężystości*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa).

ON SOLUTIONS OF SELECTED THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY FOR NONHOMOGENEOUS BODIES

Abstract: First and second problems of the elasticity theory is considered for a non-homogeneous half-space. The body was composed of a non-homogeneous surface layer and a homogeneous half-space. It is assumed that the mechanical properties of coating material are dependent on the depth. The algorithm of solutions to the equations of three-dimensional theory of elasticity is presented.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego nr W/WM/12/2010.