

WPŁYW STAŁYCH MATERIAŁOWYCH NA ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ Q PRZED WIERZCHOŁKIEM PĘKNIECIA W MATERIAŁACH SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH DLA PŁYTY Z CENTRALNĄ SZCZELINĄ PODDANEJ ROZCIĄGANIU

Marcin GRABA *

*Katedra Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Świętokrzyska, ul. 1000-lecia PP 7, 25-314 Kielce

mgraba@tu.kielce.pl

Streszczenie: W pracy przedstawione zostaną wartości naprężeń Q wyznaczone dla szeregu materiałów sprężysto-plastycznych dla płyt zawierających centralną szczelinę na wskroś poddawanych rozciąganiu (CC(T)). Te elementy konstrukcyjne często są wykorzystywane w analizie inżynierskiej jako uproszczenie złożonego obiektu konstrukcyjnego – np. procedury FITNET. Omówiony zostanie wpływ granicy plastyczności i wykładnika umocnienia na wartość naprężeń Q , a także wpływ długości pęknięcia. Wyniki obliczeń numerycznych aproksymowano formułami analitycznymi. Rezultaty pracy stanowią podręczny katalog krzywych J - Q dla próbek CC(T), możliwy do wykorzystania w praktyce inżynierskiej.

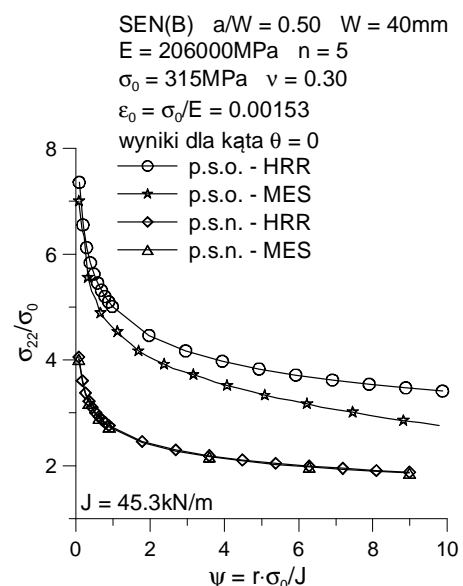
1. WSTĘP TEORETYCZNY

Budując kryteria pęknięcia dla materiałów sprężysto-plastycznych opiera się je na całce J , zakładając, że parametr ten kontroluje obszar, w którym zachodzi proces pęknięcia. Rozkład naprężeń w takiej sytuacji opisuje się podanym w 1968 roku rozwiązaniem HRR (Hutchinson, 1968), (Rice, Rosengren, 1968):

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{1+n}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (1)$$

gdzie: i, j – oznaczają kolejne elementy tensora naprężenia, J – całka J , σ_0 – granica plastyczności, ε_0 – odkształcenie odpowiadające granicy plastyczności ($\varepsilon_0 = \sigma_0/E$), E – moduł Young'a, n – wykładnik potęgowy w prawie Ramberga-Osgood'a (R-O), α – stała materiałowa w związku R-O, I_n – wielkość zależna od materiału poprzez wykładnik n oraz od sposobu obciążenia oraz grubości próbki decydującej o tym, czy mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia (p.s.n.) lub płaskim stanem odkształcenia (p.s.o.), $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$ – funkcje zależne od materiału przez wykładnik potęgowy n i kąt θ oraz od grubości próbki w zależności od faktu czy rozważa się p.s.n. czy p.s.o.

Rozwiązanie to zawiera jedynie pierwszy człon nieskończonego szeregu, ponieważ podczas analizy z pełną świadomością zrezygnowano z członów wyższego rzędu. Obliczenia numeryczne pokazały jednak, że wyniki uzyskane na podstawie pola HRR mogą się znacznie różnić od rzeczywistości (Rys. 1). Najprostszym uzasadnieniem różnicy było nieuwzględnienie wpływu członów wyższego rzędu. Aby ją zlikwidować należało wykorzystać większą ilość elementów w rozwinięciu HRR.



Rys. 1. Porównanie rozkładów naprężeń rozwierających powierzchni pęknięcia określonych rozwiązaniem HRR z wynikami MES dla obliczeń dwuwymiarowych na przykładzie próbki SEN(B) dla przypadku p.s.o. oraz p.s.n.

Krok dalej w porównaniu do Hutchinson'a wykonany został przez Li i Wang (Li, Wang, 1985), którzy wykorzystali funkcję Airy'ego złożoną z pierwszych dwóch członów. W efekcie uzyskali oni drugi człon dla dwóch materiałów o $n=3$ i $n=10$, a następnie wyniki porównali z polem HRR i obliczeniami MES. Analiza ich dowiodła, że uwzględnienie drugiego członu przybliża wyniki do obliczeń numerycznych i nawet, jeśli pojawiają się rozbieżności to są one w odległości większej niż w przypadku jednoczłonowego opisu. Pierwsze dwa człony rozwinięcia znacznie

dokładniej opisują pole naprężenia w okolicy samego wierzchołka pęknięcia, a wartość drugiego członu dość silnie zależy od własności materiału i geometrii próbki.

Pełną formę rozwiązania, a właściwie pierwsze najbardziej znaczące i fizycznie uzasadnione elementy rozwinięcia i sposób ich uzyskania zaprezentowali Yang, Chao i Sutton (Yang i inni, 1993). Autorzy przyjęli podobnie jak Hutchison funkcję Airy’ego o rozdzielonych zmiennych, jednak ich funkcja była nieskończonym szeregiem. W tej sytuacji naprężenia przed wierzchołkiem pęknięcia przedstawia się w postaci szeregu:

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \bar{r}^{s_k} \tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}(\theta), \quad (2)$$

gdzie: σ_{ij} – kolejne składowe tensora naprężenia, $\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}$ – funkcje naprężeń uzyskiwane z rozwiązania równania różniczkowego dla kolejnych członów rozwinięcia asymptotycznego, s_k – wykładniki potęgowe dla kolejnych członów rozwinięcia asymptotycznego uzyskiwane w wyniku rozwiązania równania różniczkowego, \bar{r} – znormalizowana odległość od wierzchołka pęknięcia ($\bar{r} = r/(J/\sigma_0)$), A_k – amplitudy dla kolejnych członów rozwinięcia asymptotycznego wyznaczone poprzez dopasowanie wyrażenia (2) do wyników uzyskanych drogą obliczeń numerycznych w obszarze bliskim wierzchołkowi pęknięcia, w którym znany jest rozkład naprężeń.

Ograniczając się jedynie do trzech pierwszych członów (takie podejście jest zazwyczaj stosowane), naprężenia wyraża się jako:

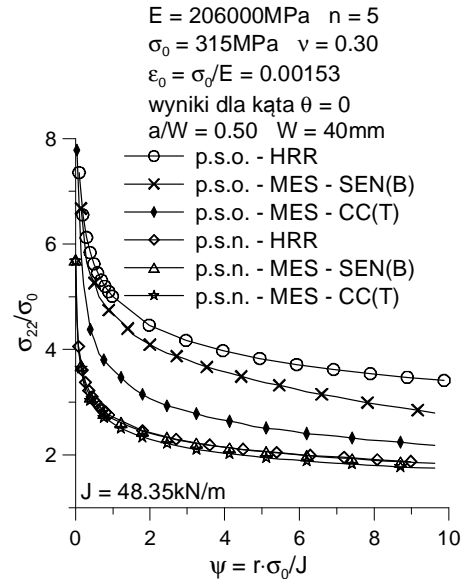
$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} = A_1 \bar{r}^s \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 \bar{r}^t \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}(\theta) + \frac{A_2^2}{A_1} \bar{r}^{2t-s} \tilde{\sigma}_{ij}^{(3)}(\theta), \quad (3)$$

gdzie: σ_{ij} – kolejne składowe tensora naprężenia, $\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}$ – funkcje naprężeń uzyskiwane z rozwiązania równania różniczkowego kolejno dla trzech członów rozwinięcia asymptotycznego, s – teoretycznie znany wykładnik potęgowy znany z rozwiązania HRR dla pierwszego członu rozwinięcia asymptotycznego (oblicza się go jako $s = -1/(n+1)$), t – wykładnik potęgowy wyznaczany numerycznie podczas rozwiązywania równania różniczkowego dla drugiego członu rozwinięcia asymptotycznego, \bar{r} – znormalizowana odległość od wierzchołka pęknięcia ($\bar{r} = r/(J/\sigma_0)$), A_1 – amplituda pierwszego członu rozwinięcia asymptotycznego ($A_1 = (\alpha \epsilon_0 I_n)^{-1/(n+1)}$), A_2 – amplituda charakterystyczna dla drugiego członu rozwinięcia, wyznaczana poprzez dopasowanie wyrażenia (3) do wyników uzyskanych drogą obliczeń numerycznych w obszarze bliskim wierzchołkowi pęknięcia, w którym znany jest rozkład naprężeń.

Uproszczone w stosunku do pomysłu Yanga, Chao i Sutton’a podejście, zastosowali Shih, O’Dowd i Kirk (Shih i inni, 1993). Uznali oni, że wyniki uzyskane za pomocą MES są dokładne i porównali różnice między nim, a polem HRR. Bazując na równaniu Sharpy i Aravas’a (Sharma i Aravas, 1991), zaproponowali oni opis pola naprężeń w postaci wzoru:

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} = \left(\frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta; n) + Q \left(\frac{r}{J/\sigma_0} \right)^q \hat{\sigma}_{ij}(\theta; n), \quad (4)$$

gdzie: $\hat{\sigma}(\theta; n)$ – funkcje kąta i stałej materiałowej n określane numerycznie, q – wykładnik potęgowy, którego zmienność zawiera się w przedziale (0; 0.071), Q – parametr Q , będący amplitudą sumy wszystkich członów rozwinięcia poza członem HRR (powszechnie określany mianem naprężeń Q).



Rys. 2. Porównanie rozkładów naprężeń rozwierających powierzchni pęknięcia określonych rozwiązaniem HRR z wynikami MES dla obliczeń dwuwymiarowych na przykładzie próbek CC(T) oraz SEN(B) dla przypadku p.s.o. oraz p.s.n.

W cyklu prac, O’Dowd i Shih (1991, 1992) przeprowadzili dokładne badania parametru Q w zakresie odległości od wierzchołka pęknięcia $J/\sigma_0 < r < 5J/\sigma_0$. Okazało się, że w badanym zakresie odległości od wierzchołka, element zawierający parametr Q słabo zależy od odległości oraz w zakresie kątów $\pm\pi/2$ zmienia się bardzo słabo. W rezultacie O’Dowd i Shih zaproponowali do opisu pola naprężeń przed frontem szczeliny w materiałach sprężysto-plastycznych równanie postaci:

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_{HRR} + Q \sigma_0 \hat{\sigma}_{ij}(\theta). \quad (5)$$

Aby uniknąć niejednoznaczności przy wyznaczaniu wartości Q autorzy ustalili, w którym miejscu należy wyznaczyć wartość Q , zależy on bowiem nieznacznie od odległości. Stwierdzili, że najbardziej odpowiednim miejscem będzie punkt położony w odległości $r = 2J/\sigma_0$ na kierunku $\theta = 0$. Wybór kierunku, na którym dokonuje się pomiaru wartości Q również nie jest przypadkowy, aczkolwiek podyktowany przede wszystkim względami praktycznymi. O’Dowd i Shih zapostulowali aby funkcja $\hat{\sigma}_{\theta\theta}(\theta = 0)$ na kierunku $\theta = 0$ była równa jedności. Dzięki temu wartość Q można wyznaczyć z równania:

$$Q = \frac{(\sigma_{\theta\theta})_{MES} - (\sigma_{\theta\theta})_{HRR}}{\sigma_0} \text{ przy } \theta=0 \text{ i } \frac{r\sigma_0}{J} = 2 \quad (6)$$

gdzie: $(\sigma_{\theta\theta})_{MES}$ – wartość naprężeń wyznaczona numerycznie, $(\sigma_{\theta\theta})_{HRR}$ – wartość naprężeń wynikająca z rozwiązania HRR.

Badania O'Dowda i Shih obejmujące wszystkie składowe tensora naprężenia (przy założeniu p.s.o) pokazały inną właściwość naprężeń Q . Okazało się bowiem, że w badanym obszarze w zakresie $\theta=\pm\pi/4$ zachodzą równości $Q\hat{\sigma}_{\theta\theta} \approx Q\hat{\sigma}_{rr}$ i $\hat{\sigma}_{\theta\theta}/\hat{\sigma}_{rr} \approx 1$ natomiast $Q\hat{\sigma}_{r\theta} \ll Q\hat{\sigma}_{\theta\theta}$, a właściwie $Q\hat{\sigma}_{r\theta} \approx 0$, co oznacza, że wartość Q wyznacza poziom trójosiowości naprężeń.

W przypadku p.s.n. parametr Q przyjmuje wartości równe lub bardzo bliskie zeru, natomiast dla przypadku p.s.o. parametr ten przyjmuje wartości na ogół mniejsze od zera (Rys. 2).

2. ZAKRES STOSOWALNOŚCI OPISU J - Q

Opisując rozkład naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia w materiałach sprężysto-plastycznych można skorzystać z powszechnie stosowanego rozwiązania HRR (1), jednakże otrzymany wynik będzie dość zawyżony w stosunku do wyników numerycznych. Wykorzystując obliczenia numeryczne, można wyznaczyć parametr Q , a naprężenia przed wierzchołkiem pęknięcia wyznaczyć zgodnie z formułą (5). Wynik dzięki temu stanie się dokładniejszy, a inżynier uwzględni wpływ płaskich więzów na rozkład i wartość naprężeń przed wierzchołkiem szczeliny. O ile wpływ ten w p.s.o. odkształcenia okazuje się być dość duży, to w p.s.n. go nie ma, bądź jest wręcz znikomy, pomijalnie mały.

Wykorzystując rozwiązanie HRR lub podejście O'Dowd'a i jego naprężenia Q , należy pamiętać, że prowadzone modelowanie jest w dużym stopniu konserwatywne. Modelując próbkę, zakłada się, że jest ona bardzo cienka i spełnia wtedy wymogi p.s.n., albo jest bardzo gruba i spełnia wymogi p.s.o ($B=1m$).

Podobnie rzecz się ma w przypadku wieloczołowego opisu pól naprężeń przed wierzchołkiem szczeliny (wzór (3), gdzie również modelowanie opiera się na stanach płaskich, jednak jest nieco bardziej skomplikowanej wymaga nieco dłuższej analizy (Yang i inni, 1993).

Przeprowadzone w latach 90 analizy dowiodły przewagi wieloczołowego opisu pól naprężeń przed wierzchołkiem pęknięcia nad podejściem O'Dowd'a z wykorzystaniem naprężeń Q . Jak pokazano to w szeregu prac, wyznaczana w rozwiązaniu wieloczołowym amplituda A_2 jest w przeciwieństwie do naprężeń Q prawie niezależna od miejsca jej wyznaczania. Jednak jak wspomiano powyżej, stosowanie tego typu opisu może być uciążliwe. Teoria zaproponowana przez O'Dowd'a okazuje się być „przyjemniejsza” w stosowaniu, o ile zna się wartość naprężeń Q przed wierzchołkiem pęknięcia. Owa łatwość w użyciu przemawia na korzyść teorii O'Dowd'a, która znalazła zastosowanie w takich programach europejskich jak SINTAP (1999) i FITNET (2006) w budowie kryteriów pęknięcia i ocenie odpor-

ności na pęknięcie elementów konstrukcyjnych. Teoria O'Dowd'a znalazła zatem praktyczne zastosowanie w zagadnieniach inżynierskich.

Jednakże czasami stosowalność jej okazuje się być ograniczona, ze względu na brak wartości naprężeń Q dla danego materiału i próbki. Stosując proponowane przez O'Dowd'a (1995) lub innych autorów (Neimitz i inni, 2007) kryteria pęknięcia wykorzystujące naprężenia Q , szybko można oszacować wytrzymałość na pęknięcie danego elementu konstrukcyjnego. Jednak w tym celu niezbędna jest znajomość naprężeń Q .

Literatura nie podaje katalogów i wartości naprężeń Q w funkcji zewnętrznego obciążenia, rodzaju materiału lub geometrii próbki. W nielicznych pracach można znaleźć jedynie wykresy krzywych $Q=f(J)$ dla pewnej grupy materiałów. Najlepszym rozwiązaniem byłoby stworzenie katalogu krzywych $Q=f(J)$ dla materiałów opisanych różną granicą plastyczności σ_0 oraz wykładnikiem potęgowym n w prawie R-O. Katalog taki powinien uwzględniać także wpływ obciążenia zewnętrznego, rodzaj tego obciążenia (próbka zginana czy próbka rozciągana), a także geometrię próbki. Autor niniejszego opracowania, w ramach przygotowywania własnej dysertacji, stworzył katalog trajektorii J - Q dla próbek trójpunktowo zginanych (SEN(B)), wykorzystywanych w warunkach laboratoryjnych do wyznaczenia krytycznych wartości całki J , która może być przy spełnieniu pewnych warunków uznawana za stałą materiałową. Katalog ten zaprezentowano w szeregu prac autora niniejszego opracowania: Graba (2007a, b, c, 2008). Jednakże, jak wiadomo, w zagadnieniach inżynierskich mamy do czynienia z elementami konstrukcyjnymi z przewagą zginania (modelem może być tu właśnie próbka SEN(B)) oraz z elementami z przewagą rozciągania (co można modelować w postaci płyty z centralną szczeliną CC(T) lub płyty z jednostronną szczeliną - SEN(T)).

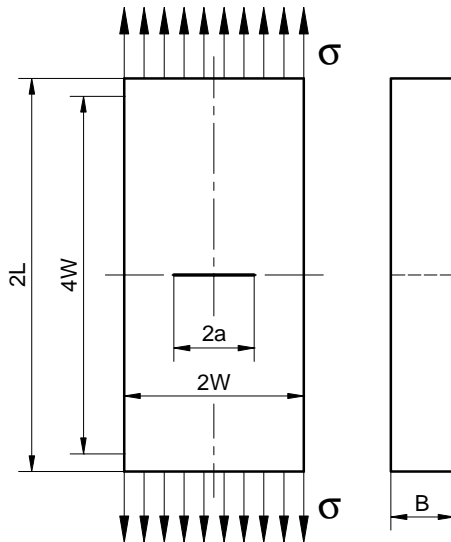
Niniejsze opracowanie, praca stanowi próbę stworzenia takiego katalogu lub przedstawienia wyników w postaci graficznej, dla próbek z przewagą rozciągania, a także o ile okaże się to możliwe opisu uzyskanych wyników wzorami analitycznymi.

3. SZCZEGÓŁY OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

W analizie numerycznej wykorzystano płytę z centralną szczeliną na wskroś poddawaną rozciąganiu (CC(T)) – Rys. 3, których wymiary były zgodne z powszechnie zakładanym w obliczeniach MES warunkiem $L \geq 2W$. Podobnie jak miało to miejsce w przypadku próbek SEN(B) wszystkie obliczenia prowadzono przy założeniu p.s.o. i małych odkształceń. Modelowaniu poddawano próbki o czterech względnych długościach pęknięcia i szerokości $2W=80mm$ (Tab. 1). Wybór próbki z centralną szczeliną na wskroś poddawanej rozciąganiu podyktowany był faktem częstej idealizacji złożonych elementów konstrukcyjnych zawierających defekt do takiej właśnie postaci.

Obliczenia numeryczne dla próbek CC(T) wykonano również przy pomocy programu ADINA SYSTEM 8.4 (ADINA 8.4.1, 2006a) oraz (ADINA 8.4.1. 2006b), a obciążenie przykładano do powierzchni swobodnej płyty.

Ze względu na symetrię modelowano ćwiartkę próbki, przykładając do wybranych krawędzi odpowiednie warunki brzegowe. W modelowaniu wykorzystano standardowe dziewięciowęzłowe elementy typu „PLANE STRAIN”. Obszar przywierzchołkowy o promieniu równym około 5 mm, podzielono na 36 elementów skończonych (ES), z których najmniejszy położony przy wierzchołku pęknięcia był 20 razy mniejszy od ostatniego. Oznaczało to, że element ten stanowił 1/2000 szerokości próbki W , a największy modelujący obszar przywierzchołkowy stanowił 1/100 szerokości próbki. Wierzchołek pęknięcia zamodelowano w postaci ćwiartki łuku o promieniu wynoszącym $r_w=5 \cdot 10^{-6}$ m. Okazał się on zatem 8000 razy mniejszy od szerokości próbki. Łuk ten podzielono na 7 równych części. Rys. 4 prezentuje model numeryczny próbki CC(T) wykorzystanej w programie badawczym wraz ze sposobem przyłożenia obciążenia i zadanymi warunkami brzegowymi. W sumie próbkę CC(T) zamodelowano z wykorzystaniem 323 ES, na które składało się 1353 węzłów. Całkowity czas obliczeń jednego modelu na komputerze wyposażonym w procesor INTEL PENTIUM IV HT 3,06GHz i pamięci operacyjnej 1024MB zajmował około 15 sekund.



Rys. 3. Geometria próbki z centralną szczeliną na wskroś poddanej rozciąganiu – CC(T)

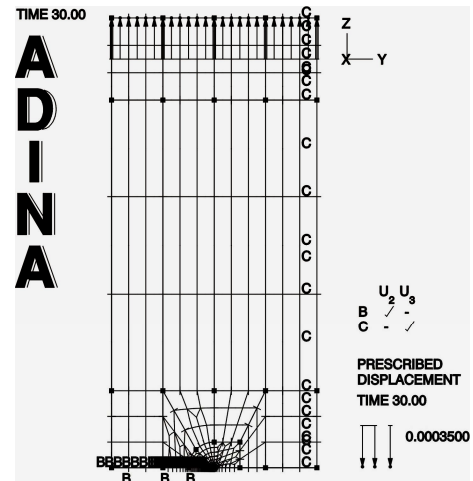
Tab. 1. Wymiary geometryczne próbek CC(T) stosowanych w programie badawczym

2W [mm]	4W [mm]	2L [mm]	a/W	a [mm]	b = (W - a) [mm]
80	160	176	0,20	8	32
			0,50	20	20
			0,70	28	12

W obliczeniach skorzystano z modelu materiału jednorodnego, izotropowego z warunkiem plastyczności Hubera–Missesa–Henckyego. Związek konstytutywny, opisujący poddany analizie materiał, opisany jest zależnością:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \begin{cases} \sigma/\sigma_0 & \text{dla } \sigma \leq \sigma_0 \\ \alpha(\sigma/\sigma_0)^n & \text{dla } \sigma > \sigma_0 \end{cases}, \quad (6)$$

założono, że stała $\alpha=1$.



Rys. 4. Przykładowy model próbki CC(T) wykorzystanej w analizie numerycznej

Analizę wykonano dla czterech grup materiałów, różniących się granicą plastyczności σ_0 . W każdej grupie wyróżniono cztery materiały różniące się wykładnikiem umocnienia n w prawie R-O, którego wartość ustalono tak, by obliczenia i analizę przeprowadzić dla materiałów silnie, średnio i słabo się umacniających (Tab. 2). Całkę J w trakcie obliczeń wyznaczano dwoma metodami. Pierwsza z nich związana jest z definicją całki J , a druga wykorzystuje wirtualny przyrost długości pęknięcia. Ostateczny wynik, jaki wykorzystano w obliczeniach był taki sam zarówno dla metody wirtualnego przyrostu jak i metody opartej na definicji całki J .

Tab. 2. Charakterystyka materiałów wykorzystanych w analizie numerycznej wraz z parametrami pola HRR dla p.s.o.

σ_0 [MPa]	E [MPa]	ν	$\epsilon_0 = \sigma_0/E$	α	n	$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta=0)$	I_n
315	206000	0.3	0,00153	1	3	1,94	5,51
500			0,00243		5	2,22	5,02
1000			0,00485		10	2,50	4,54
1500			0,00728		20	2,68	4,21

Łącznie w programie numerycznym wykorzystano 48 próbek CC(T) różniące się opisem materiału (różne σ_0 , różny n w prawie R-O) oraz długością pęknięcia (różna względna długość pęknięcia a/W).

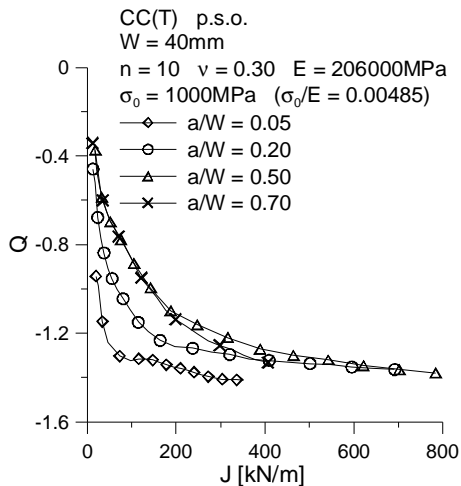
4. REZULTATY OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Analizę uzyskanych wyników numerycznych dla próbek CC(T) przeprowadzono dla zakresu odległości od wierzchołka pęknięcia $r=(1+6)J/\sigma_0$, a także w jak największym z możliwych zakresie zmian długości pęknięcia. Podsumowując uzyskane wyniki dla próbek z centralną szczeliną CC(T), można stwierdzić, że:

- wraz z oddaleniem się od wierzchołka pęknięcia naprężenia Q dla próbek CC(T) przyjmują coraz bardziej ujemne wartości (Rys. 5), jednakże różnice te są mniej-

sze niż było to widoczne dla próbek SEN(B) (Graba, 2008);

- wzrost obciążenia zewnętrznego zwiększa różnice pomiędzy wartościami naprężeń Q mierzonymi w kolejnych odległościach pomiarowych (Rys. 5);
- wraz ze wzrostem obciążenia zewnętrznego w pierwszym etapie trajektorii $J-Q$ obserwuje się szybkie zmiany naprężeń Q , które są łagodniejsze dla dużych wartości obciążeń zewnętrznych (Rys. 5); w niektórych przypadkach dla dalszego wzrostu obciążenia zewnętrznego można obserwować nasycenie krzywych $J-Q$ (Rys. 7).



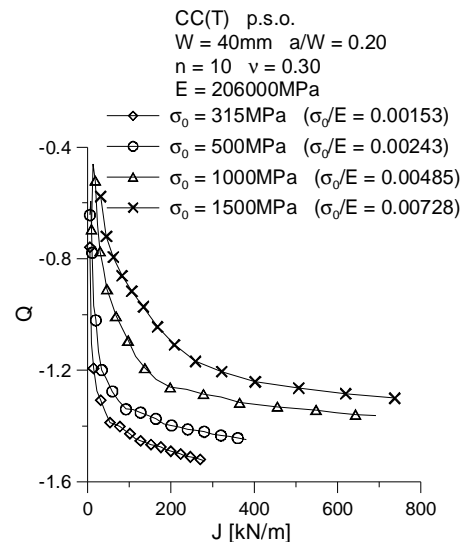
Rys. 5. „Rodzina krzywych Q ” dla próbek CC(T) zawierających pęknięcie o różnej długości

Ze względu na fakt, że w opisie pól naprężeń oraz w kryteriach pęknięcia wykorzystuje się wartości Q wyznaczone dla odległości $r=2J/\sigma_0$, dla próbek CC(T) można wysunąć podobne wnioski co dla próbek SEN(B):

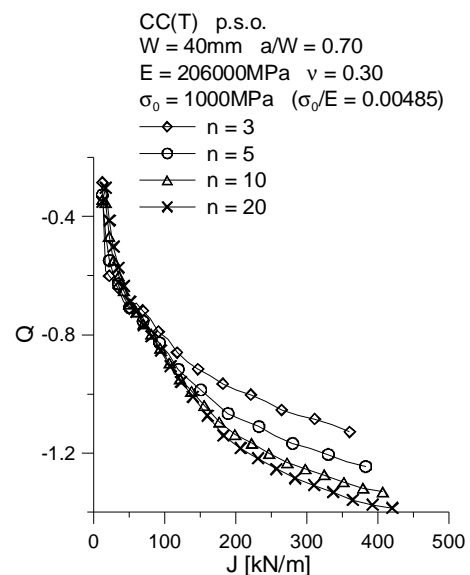
- wzrostowi granicy plastyczności towarzyszy wzrost wartości naprężeń Q (Rys. 7); znajduje to odzwierciedlenie w każdej grupie próbek o różnym stosunku a/W ;
- im mniejsza granica plastyczności, tym krzywe $J-Q$ układają się niżej i obserwuje się szybsze zmiany naprężeń Q wraz ze wzrostem obciążenia zewnętrznego (Rys. 7);
- w przypadku mniejszej granicy plastyczności, nasycenie krzywych $J-Q$ w próbkach CC(T) ma miejsce przy większym poziomie obciążenia zewnętrznego w stosunku do obciążenia;
- porównując rozkłady $J-Q$ dla próbek CC(T) przy różnym ilorazie σ_0/E , daje się zauważyć, że największe różnice w przebiegu tych krzywych są charakterystyczne dla materiałów silnie się umacniających ($n=3$), a najmniejsze dla materiałów bardzo słabo się umacniających ($n=20$); wzrost długości pęknięcia sprawia, że różnice te nieco się zwiększają;
- dla próbek CC(T) obserwuje się inne zachowanie trajektorii $J-Q$ w zależności od wartości wykładnika potęgowego n , niż dla próbek SEN(B) (Graba, 2008); w większości przypadków (różnej względnej długości pęknięcia a/W oraz różnej granicy plastyczności $\sigma_0/E \geq 0.00364$) im materiał silnie się umacnia (mniej-

sza wartość n), tym naprężenia Q przyjmują większą wartość (Rys. 8); dla małych granic plastyczności ($0.00153 \leq \sigma_0/E \leq 0.00200$) wraz ze wzrostem umocnienia materiału, poziom naprężeń Q maleje (Rys. 9); dla materiałów opisanych granicą plastyczności na poziomie $\sigma_0/E=0.00243$ różnice pomiędzy trajektoriami $J-Q$ dla różnych wartości wykładnika umocnienia są stosunkowo niewielkie i obserwuje się wzajemne krzyżowanie i pokrywanie trajektorii $J-Q$ (Rys. 10);

- im mniejsza długość pęknięcia, tym krzywe $J-Q$ dla próbek CC(T) charakteryzują się szybszymi zmianami wraz ze wzrostem obciążenia zewnętrznego wyrażonego poprzez całkę J (Rys. 8);
- w przypadku próbek CC(T) z krótkimi pęknięciami, obserwuje się szybsze osiągnięcie poziomu nasycenia niż ma to miejsce dla próbek ze szczelinami normatywnymi ($a/W=0,50$) oraz szczelinami długimi ($a/W=0,70$).



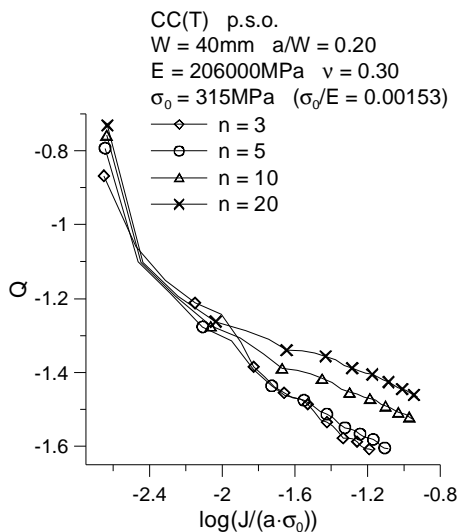
Rys. 6. Wpływ granicy plastyczności na rozkład krzywych $J-Q$ w próbkach CC(T) ($a/W=0,20$, $n=10$)



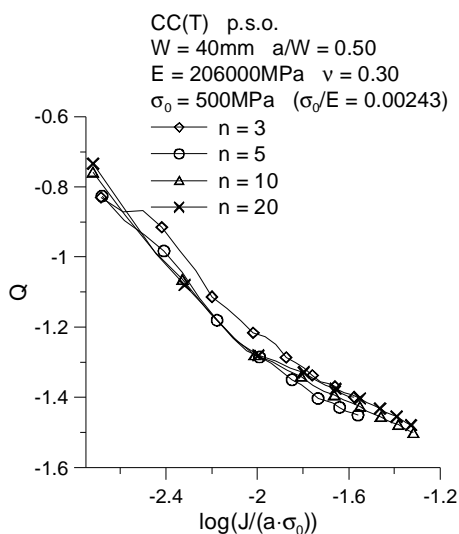
Rys. 7. Wpływ wykładnika umocnienia na rozkład krzywych $J-Q$ w próbkach CC(T) ($a/W=0,70$, $\sigma_0/E=0,0485$)

5. APROKSYMACJA WYNIKÓW OBLICZEŃ

Jak już wspomiano powyżej, literatura nie podaje empirycznych zależności jak obliczyć naprężenia Q , uwzględniając poziom obciążenia zewnętrznego, charakterystykę materiałową, czy geometrię próbki. Przedstawiony w pracy program badawczy, dostarcza katalog w ogólnym wzorze (7) pozwalającym obliczyć naprężenia Q , które uwzględniają wszystkie wymienione czynniki, decydujące o poziomie parametru Q . Uzyskane w programie przebiegi $Q=f(\log(J/(a\cdot\sigma_0)))$ zostały opisane prostymi wzorami analitycznymi uwzględniającymi zarówno geometrię próbki, poziom obciążenia zewnętrznego oraz charakterystykę materiału. Aproksymacji poddano wartości parametru Q wyznaczone w odległości $r=2J/\sigma_0$.



Rys. 8. Wpływ wykładnika umocnienia n w prawie R-O na rozkład trajektorii $Q=f(\log(J/(a\cdot\sigma_0)))$ w próbkach CC(T) ($a/W=0,20$; $\sigma_0=315\text{MPa}$)



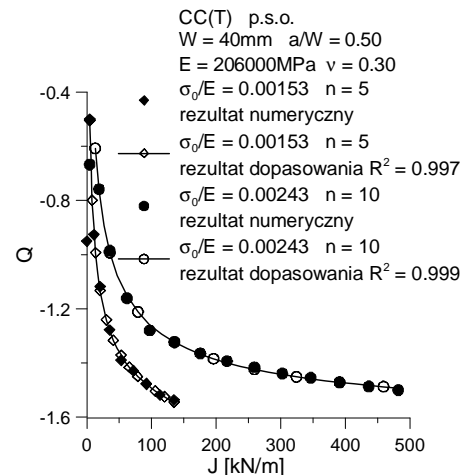
Rys. 9. Wpływ wykładnika umocnienia n w prawie R-O na rozkład trajektorii $Q=f(\log(J/(a\cdot\sigma_0)))$ w próbkach CC(T) ($a/W=0,50$; $\sigma_0=500\text{MPa}$)

Każdy z uzyskanych przebiegów $Q=f(\log(J/(a\cdot\sigma_0)))$, aproksymowano wielomianem III-go stopnia:

$$Q(J, a, \sigma_0) = A + B \cdot \left(\log \left(\frac{J}{a \cdot \sigma_0} \right) \right) + C \cdot \left(\log \left(\frac{J}{a \cdot \sigma_0} \right) \right)^2 + D \cdot \left(\log \left(\frac{J}{a \cdot \sigma_0} \right) \right)^3 \quad (7)$$

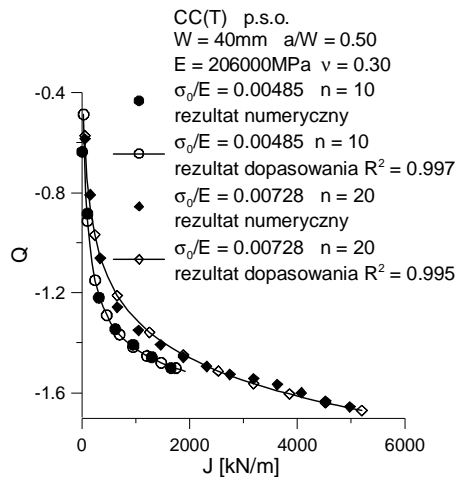
gdzie współczynniki A, B, C, D są funkcją wykładnika n , granicy plastyczności σ_0 oraz względnej długości pęknięcia oznaczanej przez a/W .

Wyniki aproksymacji przedstawiono w tabelach 3-5. O ile w przypadku próbek SEN(B) (Graba, 2008) można w trakcie aproksymacji wyników numerycznych obserwować identyczną tendencję zmian wartości współczynników wielomianu dla różnych długości pęknięcia i granic plastyczności, to w przypadku omawianych teraz próbek CC(T) nie jest możliwe proste opisanie zmian współczynników wraz ze zmianą wykładnika potęgowego n bądź granicy plastyczności σ_0 . Z tego względu w niniejszej pracy autor nie podaje dalszych formuł opisujących zmiany współczynników wielomianu w zależności od stałych materiałowych, czy geometrii próbki.



Rys. 11. Porównanie rezultatów obliczeń numerycznych i ich aproksymacji wzorami analitycznymi dla przebiegu trajektorii $J-Q$ dla próbek CC(T): $a/W=0,50$, $\sigma_0=\{315, 500\}\text{MPa}$, $n=\{5, 10\}$

Stopień dopasowania krzywych w najgorszym przypadku wynosił $R^2=0,94$ i charakteryzował próbki CC(T) z bardzo krótkimi szczelinami, tj. $a/W=0,05$, dla których wyniki nie są prezentowane w niniejszej pracy. Dla pozostałych próbek CC(T), zawierających szczeliny o względnej długości a/W ze zbioru $\{0,20; 0,50; 0,70\}$, współczynnik korelacji R^2 opisujący stopień dopasowania był większy od 0,99. Prowadząc opis matematyczny uzyskanych wyników numerycznych zwracano uwagę na fakt zachowania charakteru jakościowego trajektorii $Q=f(\log(J/(a\cdot\sigma_0)))$, ze względu na możliwość wykorzystania proponowanych formuł do wyznaczenia naprężeń Q dla obciążeń nie uwzględnionych w programie badawczym.



Rys. 11. Porównanie rezultatów obliczeń numerycznych i ich aproksymacji wzorami analitycznymi dla przebiegu trajektorii J - Q dla próbek CC(T): $a/W=0,50$, $\sigma_0=\{1000, 1500\}$ MPa, $n=\{10, 20\}$

Chcąc wyznaczyć naprężenia Q dla próbki CC(T) opisanej stałymi materiałowymi nie uwzględnionymi w programie badawczym, lub zawierającej pęknięcie o długości spoza zbioru wybranych do analizy, można wykorzystać podane w dysertacji wyniki numeryczne lub wielomiany aproksymacyjne dla dwóch lub więcej przypadków pasujących do zadanego, a poszukiwaną wartość wyznaczyć wykorzystując liniową lub kwadratową aproksymację uzyskanych danych.

Tab. 3. Współczynniki dopasowania równania (7) do wyników numerycznych dla próbek SEN(B) o $a/W=0,20$

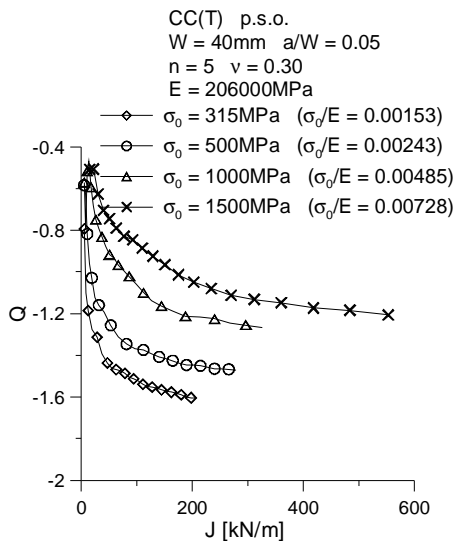
$\sigma_0 = 315\text{MPa}$		$\sigma_0/E = 0,00153$			
n	A	B	C	D	R^2
3	-3,40016	-2,97172	-1,63678	-0,33292	0,995
5	-2,81279	-2,11444	-1,22345	-0,26738	0,990
10	-2,23934	-1,40529	-0,89907	-0,21962	0,999
20	-2,13638	-1,32808	-0,84394	-0,20595	1,000
$\sigma_0 = 500\text{MPa}$		$\sigma_0/E = 0,00243$			
n	A	B	C	D	R^2
3	-2,27413	-1,18967	-0,58590	-0,13421	0,992
5	-2,29981	-1,38659	-0,81232	-0,19438	0,997
10	-2,42665	-1,88288	-1,19659	-0,27781	0,998
20	-2,57462	-2,29845	-1,48745	-0,33839	0,997
$\sigma_0 = 1000\text{MPa}$		$\sigma_0/E = 0,00485$			
n	A	B	C	D	R^2
3	-3,65130	-3,39214	-1,55538	-0,26722	0,973
5	-1,67933	-0,35103	-0,11710	-0,05261	0,995
10	-1,49619	-0,12541	-0,07218	-0,05963	0,997
20	-1,53751	-0,18282	-0,11915	-0,07285	0,991
$\sigma_0 = 1500\text{MPa}$		$\sigma_0/E = 0,00728$			
n	A	B	C	D	R^2
3	-1,27982	0,01996	0,14503	0,01481	0,989
5	-1,41550	-0,01120	0,11191	-0,00153	0,994
10	-1,54844	-0,25319	-0,11256	-0,06390	0,993
20	-1,67907	-0,45441	-0,25880	-0,10071	0,994

Tab. 4. Współczynniki dopasowania równania (7) do wyników numerycznych dla próbek SEN(B) o $a/W=0,50$

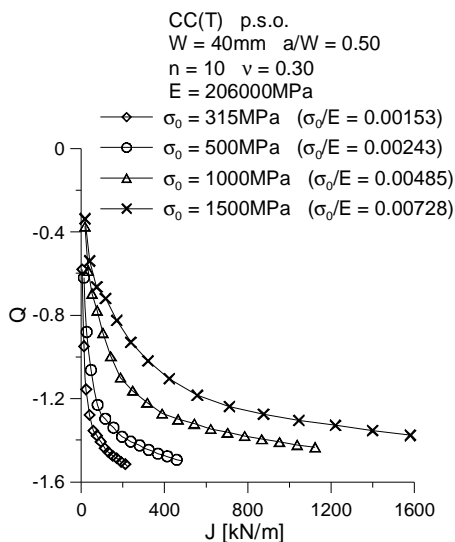
$\sigma_0 = 315\text{MPa}$		$\sigma_0/E = 0,00153$			
n	A	B	C	D	R^2
3	-3,85021	-2,64950	-1,05024	-0,17336	0,990
5	-2,54684	-1,13625	-0,51015	-0,11358	0,997
10	-2,24656	-0,98456	-0,50146	-0,11605	0,997
20	-3,18413	-2,55066	-1,29798	-0,24468	0,996
$\sigma_0 = 500\text{MPa}$		$\sigma_0/E = 0,00243$			
n	A	B	C	D	R^2
3	-3,55938	-2,47891	-0,95900	-0,15488	0,983
5	-0,96124	1,06111	0,56236	0,05471	0,998
10	-1,61943	-0,06732	-0,04079	-0,04818	0,999
20	-2,39669	-1,42289	-0,78360	-0,17829	0,999
$\sigma_0 = 1000\text{MPa}$		$\sigma_0/E = 0,00485$			
n	A	B	C	D	R^2
3	-3,42176	-2,52110	-0,90895	-0,13071	0,977
5	-1,63674	0,01781	0,19411	0,01940	0,994
10	-1,68070	-0,08345	0,05407	-0,02520	0,997
20	-1,88835	-0,39917	-0,13029	-0,06196	0,996
$\sigma_0 = 1500\text{MPa}$		$\sigma_0/E = 0,00728$			
n	A	B	C	D	R^2
3	-1,27394	-0,01699	0,04887	-0,01944	0,997
5	-1,57516	-0,02788	0,20193	0,03045	0,994
10	-1,94130	-0,43244	0,01182	-0,00341	0,994
20	-2,07357	-0,56398	-0,06157	-0,02087	0,995

Tab. 5. Współczynniki dopasowania równania (7) do wyników numerycznych dla próbek SEN(B) o $a/W=0,70$

$\sigma_0 = 315\text{MPa}$		$\sigma_0/E = 0,00153$			
n	A	B	C	D	R^2
3	-3,39313	-1,86453	-0,70116	-0,12257	0,991
5	-1,86720	-0,11810	-0,07379	-0,05049	0,998
10	-3,70437	-2,86445	-1,35357	-0,24114	0,997
20	-5,11211	-4,87495	-2,27736	-0,37934	0,997
$\sigma_0 = 500\text{MPa}$		$\sigma_0/E = 0,00243$			
n	A	B	C	D	R^2
3	-6,77352	-5,84374	-2,12683	-0,28448	0,981
5	-2,14513	-0,20561	0,07296	-0,00700	0,997
10	-2,09694	-0,47913	-0,18855	-0,06352	0,998
20	-2,21086	-0,88306	-0,48750	-0,12529	0,999
$\sigma_0 = 1000\text{MPa}$		$\sigma_0/E = 0,00485$			
n	A	B	C	D	R^2
3	-2,93370	-1,54934	-0,40487	-0,04995	0,986
5	-2,16067	-0,26326	0,17639	0,02853	0,997
10	-2,42945	-0,26930	0,25072	0,04251	0,998
20	-2,39733	-0,11232	0,32626	0,05005	0,998
$\sigma_0 = 1500\text{MPa}$		$\sigma_0/E = 0,00728$			
n	A	B	C	D	R^2
3	-2,02517	-0,78494	-0,17842	-0,02840	0,992
5	-2,05092	-0,46715	0,02955	0,00524	0,989
10	-2,10385	-0,19800	0,21559	0,03379	0,992
20	-2,31937	-0,32264	0,19251	0,03093	0,996



Rys. 12. Wpływ granicy plastyczności σ_0 na rozkład $Q=f(J)$ w próbkach CC(T) $a/W=0,20$; $n=5$



Rys. 13. Wpływ granicy plastyczności σ_0 na rozkład $Q=f(J)$ w próbkach CC(T) $a/W=0,50$; $n=10$

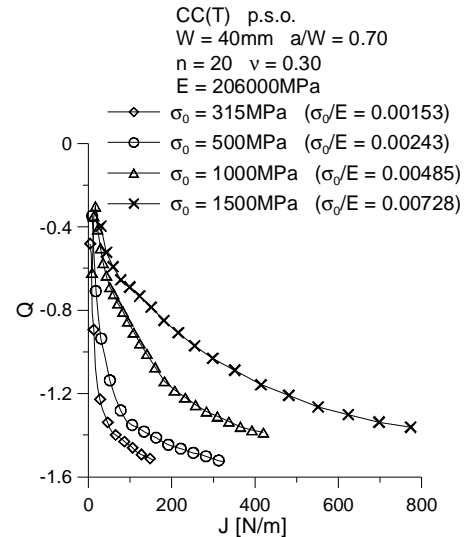
6. WNIOSKI KOŃCOWE

Jak się zatem okazuje naprężenia Q zależą od wielu czynników:

- od geometrii i sposobu obciążenia próbki; inne wartości i inne charakterystyczne przebiegi uzyskuje się dla próbek z przewagą rozciągania (CCT) i inne dla próbek z przewagą zginania (np. SEN(B)) przy tej samej charakterystyce materiałowej;
- naprężenia Q zależą od rodzaju materiału, który powszechnie opisuje się granicą plastyczności σ_0 i modułem Young'a E oraz wykładnikiem umocnienia n ;
- wpływ na wartość naprężeń Q ma także długość pęknięcia; to poprzez zmianę długości i „miejsca występowania” pęknięcia próbka „czuje” poziom płaskich więzów i ich wpływ na rozkład naprężeń. Inaczej zachowywać się będą zatem przebiegi $Q = f(J)$ dla próbek z przewagą zginania (takich jak SEN(B), C(T)), inaczej dla próbek

z przewagą rozciągania (takich jak DEN(T), CCT, SEN(T));

- zaprezentowany w pracy katalog krzywych $J-Q$ dla próbek z centralną szczeliną na wskroś poddawanych rozciąganiu, wraz z aproksymacją krzywych $Q=f(\log(J/(a\cdot\sigma_0)))$ może okazać się przydatny w analizach inżynierskich i stanowi pewnego rodzaju uzupełnienie podanych w 2007 roku na IV Sympozjum w Augustowie rozwiązań dla próbek SEN(B).



Rys. 14. Wpływ granicy plastyczności σ_0 na rozkład $Q=f(J)$ w próbkach CC(T) $a/W=0,70$; $n=20$

LITERATURA

1. **ADINA 8.4.1** (2006a), ADINA: User Interface Command Reference Manual - Volume I: ADINA Solids & Structures Model Definition, Report ARD 06-2, ADINA R&D, Inc.
2. **ADINA 8.4.1** (2006b), ADINA: Theory and Modeling Guide - Volume I: ADINA, Report ARD 06-7, ADINA R&D, Inc.
3. **FITNET** (2006), FITNET Report, (European Fitness-for-service Network), Edited by M. Kocak, S. Webster, J. J. Janosch, R. A. Ainsworth, R. Koers, Contract No. GIRT-CT-2001-05071.
4. **Graba M.** (2007a), Wpływ stałych materiałowych na rozkład naprężeń Q przed wierzchołkiem pęknięcia w materiałach sprężysto - plastycznych, IV MSMZMiK - Augustów 2007, materiały konferencyjne, 109-114;
5. **Graba M.** (2007b), The Influence of Material Properties on the Q -stress Value near the Crack Tip for Elastic-Plastic Materials, Theoretical Backgrounds, Transcom 2007, proceedings of the section 7 - Machines and Equipment, Applied Mechanics, 53-57.
6. **Graba M.** (2007c), The Influence of Material Properties on the Q -stress Value near the Crack Tip for Elastic-Plastic Materials. Numerical Results and their Approximation, Transcom 2007, proceedings of the section 7 - Machines and Equipment, Applied Mechanics, 59-63.
7. **Graba M.** (2008), The Influence of Material Properties on the Q -stress Value near the Crack Tip for Elastic-Plastic Materials, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 46, No. 2, 269-290.
8. **Hutchinson J.W.** (1968), Singular Behaviour at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 16, 13-31.

9. **Li Y., Wang Z.** (1985), High-Order Asymptotic Field of Tensile Plane-Strain Nonlinear Crack Problems, *Scientia Sinica (Series A)*, Vol. XXIX, No. 9, pp. 941-955.
10. **Neimitz A., Graba M., Dzioba I., Molasy R.** (2004), Wpływ więzów na odporność na pękanie materiałów kruchych, *Materiały XX Sympozjum Zmęczenia i Mechaniki Pęknięcia*, Bydgoszcz – Pieczęyska, 265-272.
11. **Neimitz A., Graba M., Gałkiewicz J.** (2007), An Alternative Formulation of the Ritchie-Knott-Rice Local Fracture Criterion, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 74, 1308–1322.
12. **O'Dowd N.P.** (1995), Applications of two parameter approaches in elastic-plastic fracture mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 52, No. 3, 445-465.
13. **O'Dowd N. P., Shih C. F.** (1991), Family of Crack-Tip Fields Characterized by a Triaxiality Parameter – I. Structure of Fields, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 39, No. 8, -1015.
14. **O'Dowd N. P., Shih C. F.** (1992), Family of Crack-Tip Fields Characterized by a Triaxiality Parameter – II. Fracture Applications, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 40, No. 5, 939-963.
15. **Rice J. R., Rosengren G. F.** (1968), Plane Strain Deformation Near a Crack Tip in a Power-law Hardening Material, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16, 1-12.
16. **Sharma, S.M., Aravas, N.** (1991), Determination of Higher Order Terms in Asymptotic Elastoplastic Crack Tip Solutions, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39, pp. 1043-1072.
17. **Shih C. F., O'Dowd N. P., Kirk M. T.** (1993), A Framework for Quantifying Crack Tip Constraint, *Constraint Effects in Fracture*, ASTM STP 1171, E.M. Hackett, K.-H. Schwalbe, R. H. Dodds, Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 2-20.
18. **SINTAP** (1999), SINTAP: Structural Integrity Assessment Procedures for European Industry. Final Procedure, *Brite-Euram Project No BE95-1426* – Rotherham: British Steel.
19. **Yang S., Chao Y.J., Sutton M.A.** (1993), Higher Order Asymptotic Crack Tip in a Power-Law Hardening Material, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 45, No. 1, 99. 1 – 20.

THE INFLUENCE OF MATERIAL PROPERTIES ON THE Q -STRESS VALUE NEAR THE CRACK TIP FOR ELASTIC-PLASTIC MATERIALS FOR CENTER CRACKED PLATE IN TENSION

Abstract: In the paper the values of the Q -stress determined for various elastic-plastic materials for central cracked plate in tension (CC(T)) are presented. The influence of the yield strength, the work-hardening exponent and the crack length on the Q -parameter was tested. The numerical results were approximated by the closed form formulas.

Pracę wykonano w ramach pracy własnej realizowanej w Politechnice Świętokrzyskiej na WMiBM – nr 1.22 / 8.57.

Autor pracy, Marcin Graba, uczestniczy w roku akademickim 2010 w stypendium stażowym dla młodych doktorów w ramach projektu „Program Rozwojowy Potencjału Dydaktycznego Politechniki Świętokrzyskiej: kształcenie w nowoczesnych obszarach techniki” współfinansowanego z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, Priorytet IV, Działanie 4.1, Poddziałanie 4.1.1, nr umowy: UDA-POKL.04.01.01-00-395/09-00.