

ASPEKTY MODELOWANIA DYNAMIKI RUCHU CZŁOWIEKA DLA ZADAŃ SYMULACJI ODWROTNEJ

Wojciech BLAJER*, Krzysztof DZIEWIECKI*, Zenon MAZUR*

*Instytut Mechaniki Stosowanej i Energetyki, Wydział Mechaniczny,
Politechnika Radomska, ul. Krasickiego 54, 26-600 Radom

w.blajer@pr.radom.pl, krzysztof.dziewiecki@pr.radom.pl, z.mazur.@pr.radom.pl

Streszczenie: W pracy omawiane są wybrane zagadnienia budowy modeli ciała człowieka dla zadań symulacji dynamicznej odwrotnej. Dyskusja prowadzona jest w odniesieniu do modelu płaskiego przeznaczonego do analizy skoków w płaszczyźnie strzałkowej, układu składającego się z 14 sztywnych segmentów połączonych za pomocą 13 przegubów. Omawia się dwa modele sterowania – deterministyczny (uproszczony), za pomocą wypadkowych momentów sił mięśniowych w stawach, oraz niedeterministyczny (uszczegółowiony) model mieszany, za pomocą sił mięśniowych (sterowanie nadmiarowe) w stawach kończyn dolnych i momentów sił mięśniowych w pozostałych stawach. Z zastosowaniem równań ruchu we współrzędnych absolutnych i niezależnych, dyskutuje się rozwiązania zadań symulacji dynamicznej odwrotnej dla obu modeli sterowania. Rozwiązaniem są przebiegi w czasie sterowania układem oraz reakcji modelu z podłożem (w fazie lotu z założenia równe zeru). Omawia się też metody wyznaczania sił reakcji w stawach, zależnych od sił mięśniowych i reakcji zewnętrznych.

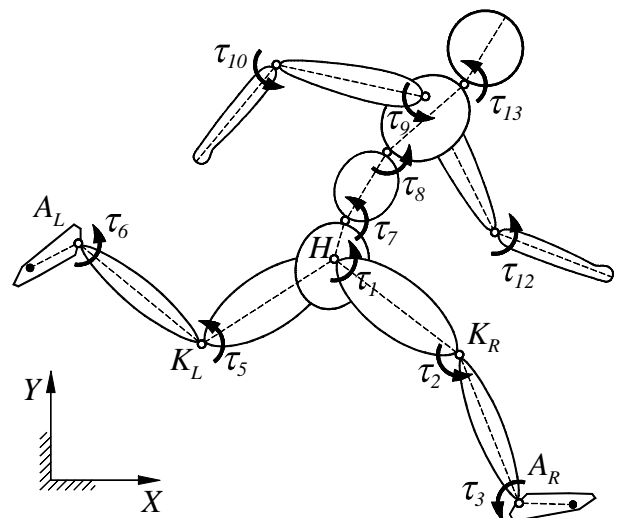
1. WSTĘP

Symulacja dynamiczna odwrotna czynności motorycznych człowieka, prowadzona z wykorzystaniem modeli mięśniowo-szkieletowych (wielocłonowych) oraz danych z badań eksperymentalnych, jest podstawową techniką bezinwazyjnego szacowania sił mięśniowych oraz obciążeń wewnętrznych i zewnętrznych w trakcie tych czynności. Jakościowe i ilościowe wyniki takich badań znajdują szerokie wykorzystanie w biomechanice sportu, ergonomii, rehabilitacji medycznej, ortopedii i transplantologii, niezależnie od aspektów poznawczych – lepszego zrozumienia budowy i sterowania skomplikowanym aparatem ruchu człowieka, źródła inspiracji dla wielu maszyn i mechanizmów.

Zgromadzone doświadczenia i wiedza, wspomagane zaawansowanymi technikami komputerowymi i pomiarowymi, umożliwiają dziś analizę bardzo skomplikowanych ruchów człowieka, możliwą często z wykorzystaniem programów komercyjnych takich jak *AnyBody* (Damsgaard et al., 2006) czy *MusculoGraphics* (Arnold et al., 2009). Pomimo swoich ogromnych możliwości (m.in. baza danych antropometrycznych), programy te wykorzystywane są jednak często jak „czarne skrzynki”, co nie zawsze jest zasadne w badaniach podstawowych/specjalistycznych. Są to ponadto programy bardzo drogie. Z tych powodów w wielu ośrodkach naukowych prowadzone są intensywne badania w zakresie doskonalenia oraz poszukiwania własnych metod modelowania i symulacji układów biomechanicznych. (Ambrósio i Abrantes, 2007; Blajer i inni, 2007; Pandy, 2001; Potkonjak i inni, 2009; Vukobratović i inni, 2007; Yamaguchi, 2001; Zajac i Winters, 1990), wyspecjalizowanych często dla badania szczególnych przypadków ruchu.

Niniejsza praca wpisuje się w nurt badań podstawowych dotyczących modelowania i symulacji układów biomechanicznych. Dyskutowane są aspekty modelowania dynamiki

ciała człowieka na przykładzie płaskiego modelu pokazanego na Rys. 1, przeznaczonego do badania szerokiej gamy skoków sportowych typu wyskok pionowy, skok w dal z miejsca, zeskok z podwyższenia, „przeskok przez kałużę” czy trójskok, których analizę można (z pewnym przybliżeniem) prowadzić w płaszczyźnie strzałkowej (skoki bez obrotu/śruby). Model składa się z $N=14$ sztywnych segmentów połączonych przegubowo w $k=13$ stawach. W fazie lotu układ ma $n=3+k=16$ stopni swobody.



Rys. 1. Model ciała człowieka sterowany za pomocą wypadkowych momentów sił mięśniowych

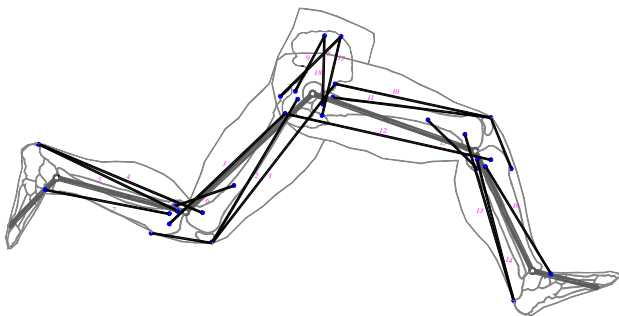
2. DYSKUSJA ZAŁOŻEŃ WSTĘPNYCH

Przeznaczenie budowanego modelu dla analizy skoków w sposób naturalny koncentruje uwagę na analizie pracy mięśni i obciążeniach w stawach kończyn dolnych. W niniejszej pracy

znajduje to odzwierciedlenie w uszczegółowieniu modelu aparatu ruchu kończyn dolnych i ich oddziaływania z podłożem. Pozostała część ciała może być zamodelowana bardziej zgrubnie lub wręcz potraktowana jako ruchome podparcie.

2.1. Modele sterowania ruchem

Wyróżnić można dwa podstawowe modele sterowania ruchem ciała człowieka: za pomocą wypadkowych momentów sił mięśniowych w stawach lub bezpośrednio za pomocą sił mięśniowych. Pierwszy, zdecydowanie uproszczony model sterowania zilustrowany jest na Rys. 1. Nie definiuje się w nim w ogóle mięśni ani sił mięśniowych, a ich działanie zastępuje momentami sterującymi, w rozważanym przypadku $k=13$ momentami $\mathbf{u}_\tau = [\tau_1 \dots \tau_{13}]^T$, w tym $k'=6$ momentami $\boldsymbol{\tau}' = [\tau_1 \dots \tau_6]^T$ w stawach kończyn dolnych i $k''=6$ momentami $\boldsymbol{\tau}'' = [\tau_7 \dots \tau_{13}]^T$ w pozostałych stawach, $\mathbf{u}_\tau = [\boldsymbol{\tau}'^T \boldsymbol{\tau}''^T]^T$. Z ważniejszych cech biomechanicznych, które nie są reprezentowane w tym modelu jest to, że momenty sterujące regulują wyłącznie ruchy względne w odpowiadających im stawach. Brak jest odzwierciedlenia cech działania mięśni wielostawowych, mogących wpływać jednocześnie na ruchy w wielu stawach. Siły mięśniowe mają ponadto istotny wpływ na obciążenia układu kostnego i siły reakcji w stawach, co jest zaniebdywane w modelach sterowanych za pomocą \mathbf{u}_τ .



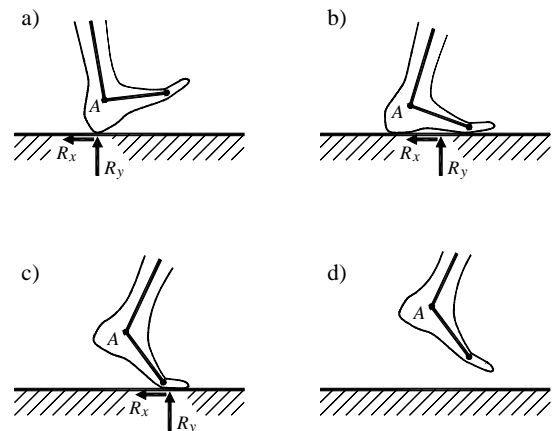
Rys. 2. Mięśnie aparatu ruchu kończyn dolnych

Sterowane za pomocą sił mięśniowych jest daleko lepszym przybliżeniem opisu aparatu ruchu człowieka. Sterowanie takie jest powszechnie wykorzystywane w modelach mięśniowo-szkieletowych kończyn dolnych i górnych (Pandy, 2001, Winter, 2005; Yamaguchi, 2001; Zajac i Winters, 2000). Budowa takich modeli dla tułowia wraz z odcinkiem szyjnym jest zdecydowanie trudniejsza ze względu na duże skomplikowanie budowy tych części ciała. Racjonalnym rozwiązaniem, zastosowanym we wcześniejszej pracy autorów (Blajer i inni, 2007), jest propozycja sterowania mieszanego – za pomocą sił mięśniowych w kończynach dolnych oraz momentów sił mięśniowych w stawach pozostałych części ciała. W rozważanym przypadku parametrami sterowania są $m'=18$ naprężenia mięśni kończyn dolnych (9 mięśni w każdej kończynie, Rys. 2), $\boldsymbol{\sigma}' = [\sigma_1 \dots \sigma_{18}]^T$, oraz $k''=7$ momentów sił mięśniowych $\boldsymbol{\tau}'' = [\tau_7 \dots \tau_{13}]^T$ w stawach górnej części ciała, przy czym $\sigma_i = F_i / A_i$, gdzie

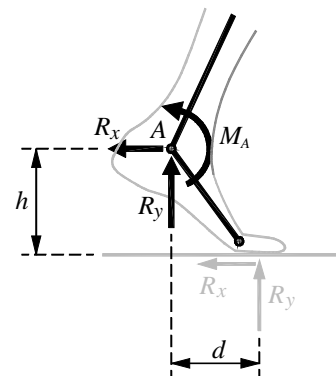
F_i jest siłą rozwijaną w i -tym mięśniu, a A_i jest wartością jego przekroju fizjologicznego. Wektor parametrów sterowania $\mathbf{u}_{\sigma\tau} = [\boldsymbol{\sigma}'^T \boldsymbol{\tau}''^T]^T$ ma teraz wymiar $m = m' + k'' = 25$. Podejście takie pozwala skoncentrować uwagę na uszczegółowionym modelu wyznaczania sił mięśniowych i obciążeń w stawach kończyn dolnych z uwzględnieniem dynamiki całego ciała człowieka.

2.2. Oddziaływanie z podłożem

Podłoże, z którym kontaktuje się stopa (lub stopy) modelowane jest w tej pracy jako nieskończenie sztywne. Kontakt stopy z podłożem przybierać może różne postacie (włączając w to brak kontaktu), zilustrowane na Rys. 3. Oddziaływanie na stopę zachodzi poprzez wypadkową reakcję $\bar{\mathbf{R}}$, rozłożoną na składowe R_x i R_y , a punkt przyłożenia tej siły nie jest stały. Z tego powodu $\bar{\mathbf{R}}$ wygodnie jest „przenieść równoległe” do punktu A (oś stawu skokowego), dodając moment siły $\bar{\mathbf{R}}$ względem A, $M_A = R_y d - R_x h$ (Rys. 4). Dla oszacowanych wartości R_x , R_y , M_A oraz h , zależność ta posłużyć może do wyznaczenia umiejscowienia składowej pionowej R_y reakcji $\bar{\mathbf{R}}$, czyli $d = (M_A + R_x h) / R_y$. Ostatecznie, wektor uogólnionej reakcji na stopę od podłoża zapisać można jako $\boldsymbol{\lambda}_r = [R_x \ R_y \ M_A]^T$ (w przypadku braku kontaktu stopy z podłożem jest z założenia $\boldsymbol{\lambda}_r = \mathbf{0}$).



Rys. 3. Możliwe przypadki oddziaływania stopy z podłożem



Rys. 4. Oddziaływanie od podłoża zredukowane do stawu skokowego stopy

2.3. Możliwa redukcja modelu

Opisany model odwzorowuje całe ciało człowieka. Jak zostanie pokazane dalej, pozwala on na oszacowanie (symulacja dynamiczna odwrotna) przebiegów sił mięśniowych i reakcji w stawach kończyn dolnych podczas badanych skoków. Wyliczane są również momenty sił mięśniowych w pozostałych połączeniach modelu oraz reakcje z podłożem $\lambda_r = [R_x \ R_y \ M_A]^T$ (kontakt jedną stopą). W fazie lotu reakcje z podłożem powinny być oczywiście równe zeru, a w fazie kontaktu z podłożem można je zmierzyć (pomiar na platformie dynamometrycznej). Porównanie wyliczanych $\lambda_r(t)$ z pomiarowymi (kontakt z podłożem) i oczekiwanymi ($\lambda_r = \mathbf{0}$ w fazie lotu) może być dobrym kryterium oceny poprawności budowanym modeli obliczeniowych i jakości danych kinematycznych użytych do obliczeń.

Dla analizy skoków, koncentrując uwagę na obciążeniach kończyn dolnych, zastosować można również model uproszczony, składający się z członu 7 (dolna część tułowia) z zaczepionymi do niej kończynami dolnymi (Rys. 2). Znany (pomiar kinematyczny) ruch członu 7 traktowany jest wówczas jako ruchome podparcie dla kończyn dolnych, co rzutuje na sposób generowania i postać równań ruchu tak zamodelowanego układu o $n^* = 6$ stopniach swobody. Rozwiązanie zadania symulacji dynamicznej odwrotnej z użyciem tych równań, czyli wyznaczenie sił mięśniowych oraz reakcji w stawach kończyn dolnych podczas analizowanych skoków, wymaga znajomości (pomiaru na platformie dynamometrycznej) reakcji $\lambda_r(t)$ działających na stopę w fazie kontaktu z podłożem (reakcji tych nie można wyznaczyć). Model ten nie będzie omawiany w tej pracy.

3. GENEROWANIE RÓWNAŃ RUCHU

Ważną cechą budowanych modeli ciała człowieka jest możliwość ich stosowania do zadań symulacji dynamicznej odwrotnej zarówno w fazie lotu jak i w fazie kontaktu z podłożem. W symulacji tej zastosować można dynamiczne równania wygenerowane we współrzędnych absolutnych lub we współrzędnych niezależnych.

3.1. Równania ruchu we współrzędnych zależnych

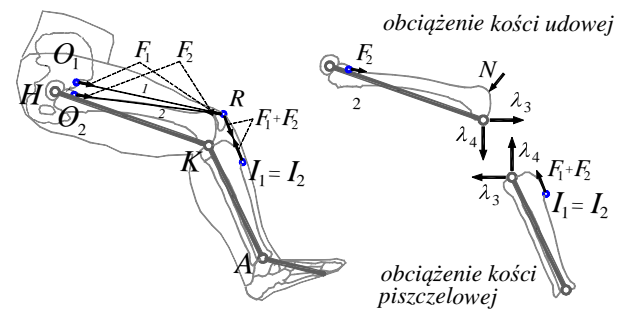
Współrzędnymi absolutnymi układu wielocłonowego z Rys. 1 są $\mathbf{p} = [x_{C1} \ y_{C1} \ \theta_1 \ \dots \ x_{CN} \ y_{CN} \ \theta_N]^T$, w liczbie $3N = 42$, na które składają się współrzędne środków mas i kąty obrotu członów względem inercjalnego układu odniesienia XY . Ruch członów skrępowany jest $l = 2k = 26$ więzami połączeń w stawach, a w fazie kontaktu z podłożem na stopę działają dodatkowo reakcje od podłoża λ_r . Równania więzów we współrzędnych absolutnych \mathbf{p} mają postać uwikłaną $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, gdzie \mathbf{z} wektorem współrzędnych więzów definiujących kierunki (poziome i pionowe) skrępowania w stawach (Blajer, 2004). Dynamiczne równaniu ruchu układu we współrzędnych \mathbf{p} mają następującą symboliczną ogólną postać macierzową

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}_g - \mathbf{C}^T(\mathbf{p})\lambda - \mathbf{C}_r^T(\mathbf{p})\lambda_r + \mathbf{f}_u(\mathbf{p}), \quad (1)$$

w których $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}_g$ jest złożeniem niezależnych równań dla członów swobodnych pod działaniem tylko sił grawitacyjnych. Siły bierne wynikające z więzów połączeń w stawach reprezentuje $3N$ -wektor uogólnionych sił reakcji więzów $\mathbf{f}_\lambda = -\mathbf{C}^T\lambda$, gdzie $\mathbf{C} = \partial\Phi/\partial\mathbf{p}$ jest $l \times 3N$ -wymiarową macierzą więzów, a $\lambda = [\lambda_1 \ \dots \ \lambda_l]^T$ jest wektorem (fizycznych) sił reakcji w stawach. Analogiczne określenia dotyczą wektora uogólnionych sił reakcji w wyniku kontaktu z podłożem, $\mathbf{f}_r = -\mathbf{C}_r^T\lambda_r$, które działają na stopę lewą lub prawą, a w fazie lotu są z założenia zerowe. Wektor uogólnionych sił sterujących, dla modeli sterowania omówionych w rozdziale 2.1, przyjmuje odpowiednio postać:

$$\mathbf{f}_u = \mathbf{B}_\tau \mathbf{u}_\tau \quad \text{lub} \quad \mathbf{f}_u = \mathbf{B}_{\sigma\tau}(\mathbf{p}) \mathbf{u}_{\sigma\tau} \quad (2)$$

gdzie \mathbf{B}_τ i $\mathbf{B}_{\sigma\tau}$ są macierzami dystrybucji parametrów sterowania \mathbf{u}_τ oraz $\mathbf{u}_{\sigma\tau}$ na kierunki $\dot{\mathbf{p}}$, o wymiarach odpowiednio $3N \times k$ i $3N \times m$. Ponieważ $\mathbf{u}_\tau = [\boldsymbol{\tau}^T \ \boldsymbol{\tau}^{\prime T}]^T$ oraz $\mathbf{u}_{\sigma\tau} = [\boldsymbol{\sigma}^{\prime T} \ \boldsymbol{\tau}^{\prime\prime T}]^T$, macierze te przedstawić można również jako $\mathbf{B}_\tau = [\mathbf{B}'_\tau : \mathbf{B}''_\tau]$ oraz $\mathbf{B}_{\sigma\tau} = [\mathbf{B}'_{\sigma\tau} : \mathbf{B}''_{\sigma\tau}]$, z czego \mathbf{B}'_τ i $\mathbf{B}'_{\sigma\tau}$ mają wymiary, odpowiednio, $3N \times k'$ i $3N \times m'$, a wymiar 'wspólnej' macierzy \mathbf{B}''_τ jest $3N \times k''$.



Rys. 5. Model działania prostowników stawu kolanowego

Większość składników równań (1) wyprowadza się relatywnie prosto, włączając w to generowanie równań więzów połączeń w stawach $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, a na tej podstawie wyznaczanie macierzy \mathbf{C} . Wysiłek modelowania skupia się na konstrukcji macierzy $\mathbf{B}_{\sigma\tau}$ dystrybucji parametrów sterowania mieszanego $\mathbf{u}_{\sigma\tau} = [\boldsymbol{\sigma}^{\prime T} \ \boldsymbol{\tau}^{\prime\prime T}]^T$, w części odpowiadającej sterowaniu za pomocą sił mięśniowych (naprężeń $\boldsymbol{\sigma}'$) w stawach kończyn dolnych. Trudność polega na zdefiniowaniu linii działania sił mięśniowych poprzez określenie miejsc wprowadzenia tych sił do odpowiednich członów. Miejskami tymi mogą być bowiem zarówno anatomiczne miejsca przyczepów mięśni do odpowiednich członów (kości) jak również punkty wynikające z faktu oplatania niektórych stawów przez ścięgna mięśni, co skutkuje niezerowym promieniem działania sił mięśniowych względem tych stawów niezależnie od wartości kąta stawowego. Jako przykład złożoności problemu posłużyć może model mięśnia czworogłowego uda (*quadriceps femoris*) – prostownika stawu kolanowego (Rys. 5), rozdzielonego na dwa aktony: 1 (prosty uda) oraz 2 (skupiający głowy boczną, przysrodkową i pośrodkową). Aktony te, zaczepione w punktach O_1 i O_2 odpowiednio do miednicy i uda (przyczepy początko-

we), poprzez rzepkę i wspólne ścięgno (wiązadło rzepki) zaczepione są do podudzia w punkcie $I_1 = I_2$ (przyczepy końcowe). W pewnym uproszczeniu, wiązadło rzepki jest nierozciągliwe, a przy zginaniu/prostowaniu stawu kolanego rzepka ślizga się (bez tarcia) po kłykciu kości udowej. Siły mięśniowe, poprzez rzepkę, oddziałują na kość udową siłą normalną N , będącą wypadkową sił \vec{F}_1 i \vec{F}_2 w aktach 1 i 2 oraz siła $\approx \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ w wiązadle rzepki. Na kość piszczelową działa siła $\approx \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (wzdłuż linii wiązadła rzepki) przyłożona w punkcie $I_1 = I_2$. Promień działania tej siły (prostującej) względem osi stawu kolanowego K jest zawsze większy od zera, niezależnie od wzajemnej konfiguracji uda i podudzia. Wyznaczenie linii działania siły \vec{N} na kość udową oraz siły $\approx \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ na kość piszczelową jest zadaniem, które nie będzie tu szczegółowo omawiane.

3.2. Równania ruchu we współrzędnych niezależnych

Dynamiczne równania ruchu we współrzędnych niezależnych wygodnie jest wyprowadzić stosując *metodę rzutową* (Blajer, 1998). Punktem wyjścia dla tego sformułowania są składowe \mathbf{M} , \mathbf{f} , \mathbf{C}_r i \mathbf{f}_u (\mathbf{B}_τ lub $\mathbf{B}_{\sigma\tau}$) równań ruchu (1) we współrzędnych absolutnych oraz zależności między $3N$ współrzędnymi absolutnymi \mathbf{p} oraz n współrzędnymi niezależnymi \mathbf{q} , będące równaniami więzów połączeń w stawach w postaci rozwikłanej. W zastosowaniu do rozważanego modelu ciała człowieka, równania te, na poziomie położenia, prędkości i przyspieszeń, mają postaci:

$$\mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) \Rightarrow \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \Rightarrow \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3)$$

gdzie $\mathbf{D} = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{q}$ jest macierzą o wymiarze $3N \times n$, a wektor $\gamma = \dot{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{q}}$ ma wymiar $3N$. Poszukiwane równania ruchu we współrzędnych niezależnych \mathbf{q} przyjmują postać

$$\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{d}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \overline{\mathbf{f}}_g(\mathbf{q}) - \overline{\mathbf{C}}_r(\mathbf{q})\lambda_r + \overline{\mathbf{f}}_u \quad (4)$$

gdzie $\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{D}^T \mathbf{M} \mathbf{D}$ jest $n \times n$ -wymiarową macierzą mas uogólnionych odpowiadających $\dot{\mathbf{q}}$, składnik $\overline{\mathbf{d}} = \mathbf{D}^T \mathbf{M} \gamma$, po przeniesieniu na prawą stronę równań ruchu, jest n -wektorem uogólnionych sił bezwładności, a $\overline{\mathbf{f}}_g = \mathbf{D}^T \mathbf{f}_g$ jest n -wektorem uogólnionych sił grawitacyjnych. Wektor uogólnionych sił sterujących, w odniesieniu do sterowania za pomocą \mathbf{u}_τ lub $\mathbf{u}_{\sigma\tau}$, ma postać:

$$\overline{\mathbf{f}}_u = \overline{\mathbf{B}}_\tau \mathbf{u}_\tau \quad \text{lub} \quad \overline{\mathbf{f}}_u = \overline{\mathbf{B}}_{\sigma\tau}(\mathbf{q}) \mathbf{u}_{\sigma\tau} \quad (5)$$

przy czym macierze $\overline{\mathbf{B}}_\tau = \mathbf{D}^T \mathbf{B}_\tau$ i $\overline{\mathbf{B}}_{\sigma\tau} = \mathbf{D}^T \mathbf{B}_{\sigma\tau}$ mają wymiary, odpowiednio, $n \times k$ (16×13) i $n \times m$ (16×25). Podobnie jak w przypadku sformułowań (2), ponieważ $\mathbf{u}_\tau = [\tau^T \ \tau'^T]^T$ i $\mathbf{u}_{\sigma\tau} = [\sigma^T \ \tau'^T]^T$, macierze te przedstawić można jako $\overline{\mathbf{B}}_\tau = [\overline{\mathbf{B}}'_\tau : \overline{\mathbf{B}}''_\tau]$ i $\overline{\mathbf{B}}_{\sigma\tau} = [\overline{\mathbf{B}}'_\sigma : \overline{\mathbf{B}}''_\sigma]$, gdzie $\overline{\mathbf{B}}'_\tau$ i $\overline{\mathbf{B}}'_\sigma$ mają wymiary $n \times k'$ i $n \times m'$, a wymiar 'wspólnej' macierzy $\overline{\mathbf{B}}''_\tau$ jest $n \times k''$.

Wybór współrzędnych niezależnych \mathbf{q} nie jest jednoznaczny. Dla rozważanego modelu racjonalnym wyborem jest $\mathbf{q} = [x_H \ y_H \ \varphi_1 \ \dots \ \varphi_{14}]^T$, gdzie x_H i y_H są współrzędnymi przegubu H (stawu biodrowego) w inercjalnym układzie odniesienia XY , a φ_i są kątami orientującymi poszczególne człony względem pionu, $i = 1, \dots, N$. Innym

wyborem może być zastąpienie współrzędnych kątowych φ_i przez kąty stawowe, orientujące człon następny względem poprzedniego. Możliwy jest też wybór \mathbf{q} zawierający współrzędne absolutne jednego członu (współrzędne środka masy i kąt orientujący ten człon względem układu inercjalnego) oraz kąty orientujące położenia pozostałych członów.

Niezależnie od wyboru współrzędnych niezależnych, dynamiczne równania ruchu (4) formułowane są z wykorzystaniem opisanego prostego algorytmu, wygodnego w zastosowaniach komputerowych. Analitycznego sformułowania wymagają: \mathbf{M} , \mathbf{f} , \mathbf{C}_r oraz $\mathbf{B}_\tau / \mathbf{B}_{\sigma\tau}$ w odniesieniu do \mathbf{p} , a następnie \mathbf{D} oraz γ będące konsekwencją równań więzów (3)₁, $\mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{q})$. Wszystkie składniki równań dynamicznych (5) formułowane są następnie za pomocą łatwych do skomputeryzowania operacji mnożenia macierzy.

4. SYMULACJA DYNAMICZNA ODWROTNA

Pod pojęciem *symulacji dynamicznej odwrotnej* rozumie się wyznaczanie sterowania układem wymaganego dla realizacji znanego/zadanego w czasie ruchu układu (i ewentualnie innych obciążeń układu, na przykład reakcji zewnętrznych), prowadzone z użyciem modelu dynamicznego układu. W przypadku układów biomechanicznych charakterystyki kinematyczne dla danego ruchu, $\mathbf{p}_d(t)$ lub $\mathbf{q}_d(t)$, są określane na podstawie pomiarów (filmowanie + obróbka numeryczna), skąd wyznacza się również $\dot{\mathbf{p}}_d(t) / \dot{\mathbf{q}}_d(t)$ oraz $\ddot{\mathbf{p}}_d(t) / \ddot{\mathbf{q}}_d(t)$. W zależności od wyboru \mathbf{u}_τ lub $\mathbf{u}_{\sigma\tau}$ jako parametry sterowania (rozdział 2.1), rozważany w tej pracy problem symulacji dynamicznej odwrotnej jest zagadnieniem deterministycznym lub niedeterministycznym.

4.1. Zagadnienie deterministyczne

Problem dotyczy symulacji dynamicznej odwrotnej przy wyborze $\mathbf{u}_\tau = [\tau_1 \ \dots \ \tau_{13}]^T$ jako parametry sterowania. W odniesieniu do równań ruchu (1) we współrzędnych absolutnych \mathbf{p} , wykorzystując charakterystyki kinematyczne dla analizowanego skoku, $\mathbf{p}_d(t)$, $\dot{\mathbf{p}}_d(t)$ oraz $\ddot{\mathbf{p}}_d(t)$, równania te przekształcają się w układ $3N = 42$ algebraicznych równań liniowych względem $l = 26$ mnożników Lagrange'a λ , $l_r = 3$ składowych λ_r oddziaływania na stopę od podłoża oraz $k = 13$ wypadkowych momentów sił mięśniowych \mathbf{u}_τ w stawach, $l + l_r + k = 3N$. Przebiegi tych zmiennych podczas analizowanego ruchu, $\lambda_d(t)$, $\lambda_{rd}(t)$ oraz $\mathbf{u}_{ad}(t)$, wyznaczyć można zatem jednoznacznie z zależności

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda_r \\ \mathbf{u}_\tau \end{bmatrix} = [\mathbf{C}^T(\mathbf{p}_d) : \mathbf{C}_r^T(\mathbf{p}_d) : \mathbf{B}_\tau]^{-1} (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}_d - \mathbf{f}_g) \quad (6)$$

gdzie $3N \times 3N$ -wymiarowa macierz $[\mathbf{C}^T : \mathbf{C}_r^T : \mathbf{B}_\tau]$ jest z założenia odwracalna. Rozwiązanie (6) obowiązuje zarówno dla fazy kontaktu z podłożem (poprzez jedną stopę) jak i dla fazy lotu, gdy żadna ze stóp nie kontaktuje się z podłożem. Jest oczywiste, że w fazie lotu otrzymane tą

drogą $\lambda_{rd}(t)$ powinny być zerowe, z niedokładnością wynikającą z nieściśłości modelu matematycznego oraz ograniczonej dokładności użytych do obliczeń charakterystyk kinematycznych i parametrów masowo-geometrycznych modelu. Zauważmy ponadto, że wyznaczone z zależności (6) przebiegi reakcji w stawach $\lambda_d(t)$ nie uwzględniają wpływu sił mięśniowych, który to wpływ może być znaczny.

Wychodząc z równań ruchu (4) we współrzędnych niezależnych \mathbf{q} , po podstawieniu charakterystyk kinematycznych $\mathbf{q}_d(t)$, $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$ i $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$, zadanie symulacji dynamicznej odwrotnej sprowadzi się do zależności

$$\begin{bmatrix} \lambda_r \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = [\bar{\mathbf{C}}_r^T(\mathbf{q}_d) \ ; \ \bar{\mathbf{B}}_r]^{-1} (\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_d) \ddot{\mathbf{q}}_d + \bar{\mathbf{d}}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - \bar{\mathbf{f}}_g(\mathbf{q}_d)) \quad (7)$$

na wyznaczanie $\lambda_{rd}(t)$ oraz $\mathbf{u}_{rd}(t)$, a odwracalna macierz $[\bar{\mathbf{C}}_r^T \ ; \ \bar{\mathbf{B}}_r]$ ma tym razem wymiar $n \times n$, $n = l_r + k = 16$.

4.2. Zagadnienie niedeterministyczne

Problem dotyczy symulacji dynamicznej odwrotnej przy wyborze $\mathbf{u}_{\sigma r} = [\boldsymbol{\sigma}^T \ \boldsymbol{\tau}^T] = [\sigma_1 \ \dots \ \sigma_{18} \ \tau_7 \ \dots \ \tau_{13}]^T$ jako parametry sterowania. Sterowanie ruchem kończyn dolnych jest w tym wypadku nadmiarowe – liczba mięśni $m' = 18$ biorąca udział w realizacji ruchu jest większa od liczby $k' = 6$ stopni swobody w stawach, $m' > k'$, co odnosi się ogólnie do wszystkich stawów kończyn dolnych jak i każdego stawu indywidualnie (niektóre mięśnie oddziałują też na więcej niż jeden staw). Dystrybucji wyliczanych jednoznacznie wypadkowych momentów sił mięśniowych $\boldsymbol{\tau}'_d(t)$ (zagadnienie deterministyczne) na poszczególne mięśnie (naprężenia $\boldsymbol{\sigma}'_d(t)$) dokonuje się zwykle z zastosowaniem odpowiednich kryteriów optymalizacyjnych (Tsirakos i inni, 1997; Erdemir i inni, 2007). W rozważanym przypadku nadmiarowość zlokalizowana jest jednak tylko lokalnie w stawach kończyn dolnych, a globalnie układ jest nie w pełni sterowany ($k = 13$ momentów sterujących w stawach przy $n = 16$ stopniach swobody układu). Rodzi to odpowiednie implikacje w modelowaniu tak postawionego zadania symulacji dynamicznej odwrotnej (Blajer i inni, 2007). Wymagany jest rzut dynamicznych równań ruchu do podprzestrzeni sterowanej. Dla równań ruchu (1) we współrzędnych absolutnych efekt ten uzyskuje się przez lewostronne przemnożenie tych równań przez $\mathbf{B}'_r \mathbf{M}^{-1}$. Z porównania prawych stron tak przemnożonych równań ruchu, dla sterowania za pomocą $\mathbf{u}_r = [\boldsymbol{\tau}'^T \ \boldsymbol{\tau}''^T]$ i $\mathbf{u}_{\sigma r} = [\boldsymbol{\sigma}'^T \ \boldsymbol{\tau}''^T]$, otrzymuje się

$$\mathbf{B}'_r \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_r \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}' \\ \boldsymbol{\tau}'' \end{bmatrix} = \mathbf{B}'_r \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_{\sigma r} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}' \\ \boldsymbol{\tau}'' \end{bmatrix} \quad (8)$$

z czego $k' = 6$ pierwszych zależności opisuje warunki równoważności sterowania za pomocą k' momentów sterujących $\boldsymbol{\tau}'$ i za pomocą m' sił mięśniowych (naprężeń $\boldsymbol{\sigma}'$). Z pomocą wprowadzonych w równaniu (2) sformułowań, $\mathbf{B}_r = [\mathbf{B}'_r \ ; \ \mathbf{B}''_r]$ oraz $\mathbf{B}_{\sigma r} = [\mathbf{B}'_{\sigma r} \ ; \ \mathbf{B}''_{\sigma r}]$, k' warunki równoważności sterowania w kończynach dolnych mają postać

$$\mathbf{G}'_r \boldsymbol{\tau}' = \mathbf{H}'_{\sigma r} \boldsymbol{\sigma}' \quad (9)$$

gdzie $\mathbf{G}'_r = \mathbf{B}'_r \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}'_r$ i $\mathbf{H}'_{\sigma r} = \mathbf{B}'_r \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}'_{\sigma r}$ są macierzami o wymiarach, odpowiednio, $k' \times k'$ i $k' \times m'$.

Podobnie, lewostronne przemnożenie równań ruchu (4) we współrzędnych niezależnych przez $\bar{\mathbf{B}}_r \bar{\mathbf{M}}^{-1}$, prowadzi do

$$\bar{\mathbf{B}}_r \bar{\mathbf{M}}^{-1} \bar{\mathbf{B}}_r \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}' \\ \boldsymbol{\tau}'' \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{B}}_r \bar{\mathbf{M}}^{-1} \bar{\mathbf{B}}_{\sigma r} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}' \\ \boldsymbol{\tau}'' \end{bmatrix} \quad (10)$$

a po uwzględnieniu $\bar{\mathbf{B}}_r = [\bar{\mathbf{B}}'_r \ ; \ \bar{\mathbf{B}}''_r]$ i $\bar{\mathbf{B}}_{\sigma r} = [\bar{\mathbf{B}}'_{\sigma r} \ ; \ \bar{\mathbf{B}}''_{\sigma r}]$ opisanych w równaniu (5), otrzymujemy ostatecznie

$$\bar{\mathbf{G}}'_r \boldsymbol{\tau}' = \bar{\mathbf{H}}'_{\sigma r} \boldsymbol{\sigma}' \quad (11)$$

gdzie $\bar{\mathbf{G}}'_r = \bar{\mathbf{B}}'_r \bar{\mathbf{M}}^{-1} \bar{\mathbf{B}}'_r$ i $\bar{\mathbf{H}}'_{\sigma r} = \bar{\mathbf{B}}'_r \bar{\mathbf{M}}^{-1} \bar{\mathbf{B}}'_{\sigma r}$ są macierzami o wymiarach, odpowiednio, $k' \times k'$ i $k' \times m'$. Jest oczywiste, że sformułowania (9) i (11) są sobie tożsame, a więc również $\mathbf{G}'_r = \bar{\mathbf{G}}'_r$ i $\mathbf{H}'_{\sigma r} = \bar{\mathbf{H}}'_{\sigma r}$. Dowód tych ostatnich równości sprowadza się do wykazania, że $\mathbf{D}(\mathbf{D}^T \mathbf{M} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T = \mathbf{M}^{-1}$, co łatwo pokazać, bo prawostronne przemnożenie tej zależności macierzowej przez $\mathbf{M} \mathbf{D}$ prowadzi do $\mathbf{D} = \mathbf{D}$.

Wykorzystując warunki (9) lub (11) równoważności sterowania w stawach kończyn dolnych za pomocą momentów sterujących $\boldsymbol{\tau}'$ i za pomocą naprężeń $\boldsymbol{\sigma}'$ w mięśniach, zagadnienie optymalizacyjne dystrybucji wyliczanych jednoznacznie wypadkowych momentów sił mięśniowych $\boldsymbol{\tau}'_d(t)$ (zagadnienie deterministyczne) na poszczególne mięśnie można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} \text{minimalizuj} & J(\boldsymbol{\sigma}) \\ \text{tak, by} & \mathbf{H}'_{\sigma}(\mathbf{p}_d) \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{G}'_r \boldsymbol{\tau}'_d \\ \text{oraz} & \boldsymbol{\sigma}'_{\min} \leq \boldsymbol{\sigma}' \leq \boldsymbol{\sigma}'_{\max} \end{cases} \quad (12)$$

co odpowiada sformułowaniu równań ruchu we współrzędnych absolutnych, a dla sformułowania we współrzędnych niezależnych zagadnienie optymalizacyjne ma postać

$$\begin{cases} \text{minimalizuj} & J(\boldsymbol{\sigma}) \\ \text{tak, by} & \bar{\mathbf{H}}'_{\sigma}(\mathbf{q}_d) \boldsymbol{\sigma}' = \bar{\mathbf{G}}'_r(\mathbf{q}_d) \boldsymbol{\tau}'_d(t) \\ \text{oraz} & \boldsymbol{\sigma}'_{\min} \leq \boldsymbol{\sigma}' \leq \boldsymbol{\sigma}'_{\max} \end{cases} \quad (13)$$

W sformułowaniach tych $J(\boldsymbol{\sigma})$ jest zadaną funkcją celu, a $\boldsymbol{\sigma}'_{\min}$ i $\boldsymbol{\sigma}'_{\max}$ są fizjologicznie dopuszczalnymi minimalnymi i maksymalnymi naprężeniami w poszczególnych mięśniach. W ten sposób wyznaczane są przebiegi $\boldsymbol{\sigma}'_d(t)$, które minimalizują $J(\boldsymbol{\sigma})$, spełniają warunki (9) lub (11) oraz mieszczą się w dopuszczalnym zakresie $\boldsymbol{\sigma}'_{\min} \leq \boldsymbol{\sigma}' \leq \boldsymbol{\sigma}'_{\max}$.

Dystrybucja $\boldsymbol{\tau}'_d(t) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}'_d(t)$ nie jest jednoznaczna, zależy między innymi od wyboru funkcji celu $J(\boldsymbol{\sigma})$ (Tsirakos i inni, 1997; Erdemir i inni, 2007). Powszechnie stosowane (i fizjologicznie uzasadnione) jest kryterium Crowninshielda i Branda (1981), minimalizujące sumę podniesionych do potęgi p naprężeń w mięśniach

$$J = \sum_i \sigma_i^p \quad (14)$$

a wartość wykładnika p jest zwykle równa dwa lub trzy. Yamaguchi i inni (1995) oraz Yamaguchi (2001) dowodzą też, że rozwiązanie zadania optymalizacyjnego (12)/(13) dla funkcji celu Crowninshielda i Branda (14) przy $p = 2$ (bez ograniczenia $\boldsymbol{\sigma}'_{\min} \leq \boldsymbol{\sigma}' \leq \boldsymbol{\sigma}'_{\max}$) jest równoważne (jed-

noznacznemu) rozwiązaniu analitycznemu, odpowiednio

$$\sigma'_d(t) = \mathbf{H}'_{\sigma}{}^{\dagger}(\mathbf{p}_d) \mathbf{G}'_{\tau} \tau'_d \quad \text{lub} \quad \sigma'_d(t) = \overline{\mathbf{H}}'_{\sigma}{}^{\dagger}(\mathbf{q}_d) \overline{\mathbf{G}}'_{\tau}(\mathbf{q}_d) \tau'_d \quad (15)$$

gdzie $\mathbf{H}'_{\sigma}{}^{\dagger} = \mathbf{H}'_{\sigma}{}^T (\mathbf{H}'_{\sigma} \mathbf{H}'_{\sigma}{}^T)^{-1}$ jest $m' \times k'$ -wymiarową macierzą pseudo-odwrotną do $k' \times m'$ -wymiarowej macierzy \mathbf{H}'_{σ} (analogicznie $\overline{\mathbf{H}}'_{\sigma}{}^{\dagger} = \overline{\mathbf{H}}'_{\sigma}{}^T (\overline{\mathbf{H}}'_{\sigma} \overline{\mathbf{H}}'_{\sigma}{}^T)^{-1}$). Wadą tego prostego i numerycznie efektywnego rozwiązania jest to, że otrzymywane rozwiązania $\sigma'_d(t)$ mogą mieć zarówno dodatnie jak i ujemne wartości, co przeczy zasadzie działania sił mięśniowych jako skracających mięsień. Problem ten rozwiązuje się przez kolejne eliminowanie ujemnych składowych $\sigma'_d(t)$, zastępując je wartościami zerowymi/minimalnymi, a następnie uruchamiając procedurę obliczeń (15) kolejny raz tak długo aż wszystkie składowe $\sigma'_d(t)$ będą nieujemne.

W omówionych rozwiązaniach procedury optymalizacyjne bazują na warunkach (9) i (11) równoważności działania momentów sił mięśniowych i bezpośrednio sił mięśniowych w stawach kończyn dolnych. Wykorzystywane są też przebiegi $\tau'_d(t)$ otrzymane z rozwiązania zagadnienia deterministycznego. W poprzedniej pracy autorów (Blajer i inni, 2007), dla sformułowania we współrzędnych niezależnych, $\sigma'_d(t)$ wyznaczano bezpośrednio z dynamicznych równań ruchu (zrzutowanych do podprzestrzeni sterowanej), bez wcześniejszego określania $\tau'_d(t)$. Zagadnienia optymalizacyjne (13) zmodyfikować należy wówczas do postaci

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimalizuj} \quad J(\sigma) \\ \text{tak, by} \quad \overline{\mathbf{H}}'_{\sigma}(\mathbf{q}_d) \sigma' = \overline{\mathbf{h}}'_{\tau}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d, \lambda_{rd}) \\ \text{oraz} \quad \sigma'_{\min} \leq \sigma' \leq \sigma'_{\max} \end{array} \right. \quad (16)$$

gdzie $\overline{\mathbf{h}}'_{\tau} = \overline{\mathbf{B}}_{\tau}{}^T [\ddot{\mathbf{q}}_d + \overline{\mathbf{M}}^{-1}(\overline{\mathbf{d}} - \overline{\mathbf{f}}_g + \overline{\mathbf{C}}_r \lambda_{rd})]$. Zależność analityczna (15)₂ przyjmie natomiast kształt

$$\sigma'_d(t) = \overline{\mathbf{H}}'_{\sigma}{}^{\dagger}(\mathbf{q}_d) \overline{\mathbf{h}}'_{\tau}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d, \lambda_{rd}) \quad (17)$$

Jak widać, dla wyznaczenia $\sigma'_d(t)$ ze sformułowań (16) i (17) wymagana jest znajomość $\lambda_{rd}(t)$ – reakcji od podłoża podczas wykonywanego skoku. Jeśli nie są one mierzone, można je wyznaczyć analitycznie z zależności będącej konsekwencją rzutu równań ruchu do podprzestrzeni niesterowanej, a mianowicie (Blajer i inni, 2007)

$$\lambda_{rd}(t) = [\overline{\mathbf{A}}_{\tau} \overline{\mathbf{C}}_r{}^T(\mathbf{q}_d)]^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{\tau} [\overline{\mathbf{f}}_g(\mathbf{q}_d) - \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_d) \ddot{\mathbf{q}}_d - \overline{\mathbf{d}}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)] \quad (18)$$

gdzie $\overline{\mathbf{A}}_{\tau}$ jest $n \times l_r$ -wymiarową macierzą uzupełnienia ortogonalnego do $n \times k$ -wymiarowej macierzy sterowania $\overline{\mathbf{B}}_{\tau}$, czyli $\overline{\mathbf{A}}_{\tau} \overline{\mathbf{B}}_{\tau} = \mathbf{0}$ oraz $n = k + l_r = 13 + 3 = 16$. Analogiczne podejście dla sformułowania we współrzędnych absolutnych jest nieco bardziej złożone.

5. WYZNACZANIE REAKCJI W STAWACH KOŃCZYN DOLNYCH

Siły reakcji w stawach $\lambda_d(t)$ otrzymywane jako rozwiązanie zadania deterministycznego (6), w którym sterowanie modelem realizowane jest za pomocą wypadkowych momentów sił mięśniowych $\mathbf{u}_{\tau} = [\tau_1 \dots \tau_{13}]^T$, obciążone są niedoszacowaniem wynikającym z nieuwzględnienia wpły-

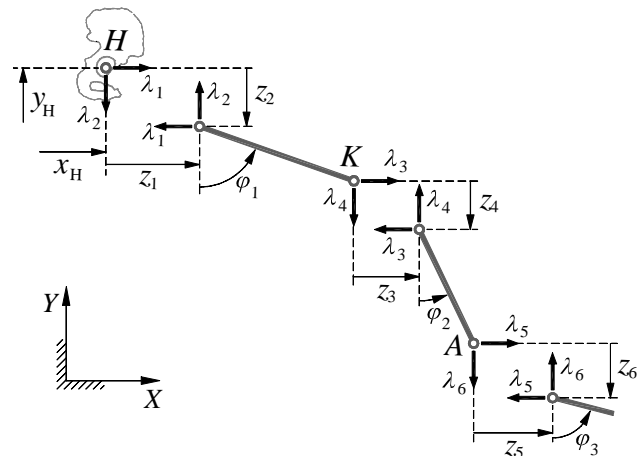
wu sił mięśniowych ma te reakcje. Wpływ ten jest w rzeczywistości bardzo istotny (Yamaguchi, 2001; Zajac i Winters, 1990; Zatsiorsky, 2002), co wymusza wyznaczanie reakcji w stawach z użyciem modeli sterowanych za pomocą sił mięśniowych, po wcześniejszym oszacowaniu tych sił. Dla rozważanego w tej pracy sterowania mieszanego, za pomocą sił mięśniowych w stawach kończyn dolnych oraz momentów sił mięśniowych w pozostałych stawach modelu, $\mathbf{u}_{\sigma\tau} = [\sigma'^T \tau'^T] = [\sigma_1 \dots \sigma_{18} \tau_7 \dots \tau_{13}]^T$, realne oszacowanie reakcji w stawach dotyczy więc tylko stawów kończyn dolnych: skokowego (A), kolanowego (K) i biodrowego (H).

Wyróżnić można co najmniej trzy sposoby algebraicznego (zautomatyzowanego) wyznaczania reakcji w stawach (Blajer, 2004). Założeniem wspólnym jest, że znane są przebiegi $\lambda_{rd}(t)$ (reakcje od podłoża) oraz $\mathbf{u}_{\sigma\tau d}(t)$ (sterowanie układem). W odniesieniu do równań ruchu (1) we współrzędnych absolutnych \mathbf{p} , po zrzutowaniu tych równań do podprzestrzeni skrępowania (lewostrobnym ich przemnożeniu przez $\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}$), zależność na liczenie reakcji we wszystkich stawach ma ogólną postać (Blajer, 1998)

$$\lambda(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \lambda_r, \mathbf{u}_{\sigma\tau}) = (\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}^T)^{-1} [\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_g - \mathbf{C}_r^T \lambda_r + \mathbf{B}_{\sigma\tau} \mathbf{u}_{\sigma\tau}) - \xi] \quad (19)$$

gdzie $\xi(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = -\dot{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{p}}$ otrzymuje się po dwukrotnym zróżniczkowaniu względem czasu uwikłanych postaci równań więzów połączeń w stawach, tzn. $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\Phi} \equiv \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \Rightarrow \ddot{\Phi} \equiv \mathbf{C}\ddot{\mathbf{p}} - \xi = \mathbf{0}$. Zależność ta, wyrażona we współrzędnych niezależnych przez wprowadzenie równań więzów w postaci rozwikłanej (3), tzn. $\mathbf{C}[\mathbf{g}(\mathbf{q})]$, $\mathbf{C}_r[\mathbf{g}(\mathbf{q})]$, $\mathbf{B}_{\sigma\tau}[\mathbf{g}(\mathbf{q})]$ oraz po zastosowaniu $\mathbf{C}\gamma = \xi$, modyfikuje się do postaci

$$\lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \lambda_r, \mathbf{u}_{\sigma\tau}) = (\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C}[\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_g - \mathbf{C}_r^T \lambda_r + \mathbf{B}_{\sigma\tau} \mathbf{u}_{\sigma\tau}) - \gamma] \quad (20)$$



Rys. 6. Współrzędne więzów i siły reakcji w stawach kończyn dolnych

Wadą obu powyższych schematów jest to, że liczone są reakcje we wszystkich stawach (w stawach sterowanych za pomocą τ'' z niedoszacowaniem wpływu sił mięśniowych), a ich efektywność numeryczną obniża konieczność

generowania i odwracania $l \times l$ - wymiarowej (26×26) macierzy $\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}^T$. Schematy te są też niewygodne dla analizy prowadzonej we współrzędnych niezależnych \mathbf{q} . Dla sformułowania dynamicznych równań (4) w tych współrzędnych nie jest bowiem konieczne wprowadzanie równań więzów połączeń w postaci uwikłanej, $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, na podstawie których generowane są \mathbf{C} i ξ stosowane w schematach (19) i (20). Dla sformułowań we współrzędnych niezależnych wygodniejszym sposobem wyznaczania reakcji w stawach jest metoda rozszerzonych współrzędnych złączkowych (Blajer, 2004). Pozwala ona, w sposób szczególnie efektywny w zastosowaniu do układów biomechanicznych (Blajer i inni, 2007), na selektywne wyznaczanie reakcji tylko w wybranych stawach. Idea metody polega na tym, że tradycyjne równania więzów połączeń w postaci rozwikłanej (3)₁, czyli związki między współrzędnymi absolutnymi i niezależnymi, $\mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{q})$, uzupełnia się o zależność również od współrzędnych więzów \mathbf{z} (Rys. 6), czyli

$$\mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) \quad (21)$$

gdzie $\mathbf{z} = [z_1 \dots z_l]^T$ oznaczają „zablokowane” kierunki przemieszczeń względnych w połączeniach, uzupełniające definiowane przez \mathbf{q} kierunki „dopuszczane” przez więzy. Zależność (21) jest oczywiście równoważna (3)₁, bo z założenia $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, a zależność od \mathbf{z} jest wprowadzana tylko dla wygenerowania $n \times l$ - wymiarowej macierzy \mathbf{E} takiej, że

$$\dot{\mathbf{p}} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{0}} \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{0}} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{E}\dot{\mathbf{z}} \quad (22)$$

co też jest równoważne sformułowaniu tradycyjnemu (3)₂, $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}$, bo z założenia $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$. Generowana tak macierz \mathbf{E} ma bardzo użyteczną własność – posiada cechy macierzy pseudo-odwrotnej do (prostokątnej) macierzy \mathbf{C} , czyli

$$\mathbf{C}\mathbf{E} = \mathbf{E}^T\mathbf{C}^T = \mathbf{I} \quad (23)$$

gdzie \mathbf{I} jest $l \times l$ - wymiarową macierzą jednostkową. Inną użyteczną własnością omawianego podejścia jest możliwość wprowadzenia współrzędnych \mathbf{z} tylko w tych połączeniach, w których chce się wyznaczyć reakcje (pozostałe połączenia pozostawiając „domknięte”). W rozważanym przypadku są to stawy kończyn dolnych (Rys. 6 dotyczy kończyny lewej). Oznaczając $\mathbf{z} = [\mathbf{z}'^T \ \mathbf{z}''^T]^T$, gdzie $\mathbf{z}' = [z_1 \dots z_{12}]^T$ odnoszą się do $l' = 12$ współrzędnych więzów w kończynach dolnych, a $\mathbf{z}'' = [z_{13} \dots z_{26}]^T$ są współrzędnymi $l'' = 14$ więzów w pozostałych stawach, zapisać można odpowiednio $\mathbf{C} = [\mathbf{C}'^T \ ; \ \mathbf{C}''^T]^T$ i $\mathbf{E} = [\mathbf{E}' \ ; \ \mathbf{E}'']$. Konsekwencją (23) jest następnie $\mathbf{C}'\mathbf{E}'' = \mathbf{0}$ oraz $\mathbf{C}''\mathbf{E}' = \mathbf{0}$, a następnie

$$\mathbf{E}'^T\mathbf{C}^T = [\mathbf{I}' \ ; \ \mathbf{0}] \quad (24)$$

gdzie \mathbf{I}' jest macierzą jednostkową o wymiarze $l' \times l'$.

Zależność na wyznaczanie reakcji w stawach kończyn dolnych, $\lambda' = [\lambda_1 \dots \lambda_{12}]^T$, uzyskuje się przez zrzutowanie równań ruchu (1) do l' - wymiarowej podprzestrzeni definiowanej przez kolumny \mathbf{E}' , czyli przez lewostronne przemnożenie tych równań przez \mathbf{E}'^T . Wykorzystując własność (24) oraz równania więzów połączeń w postaci rozwikłanej (3), otrzymuje się ostatecznie

$$\begin{aligned} \lambda'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \lambda_r, \mathbf{u}_{\sigma r}) = \\ = \mathbf{E}'^T [\mathbf{f}_g - \mathbf{C}'^T \lambda_r + \mathbf{B}_{\sigma r} \mathbf{u}_{\sigma r} - \mathbf{M}(\mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\gamma})] \end{aligned} \quad (25)$$

gdzie $\mathbf{C}'[\mathbf{g}(\mathbf{q})]$ oraz $\mathbf{B}_{\sigma r}[\mathbf{g}(\mathbf{q})]$. Dla otrzymania $\lambda'_d(t)$ wymagane są zatem otrzymane z pomiarów $\mathbf{q}_d(t)$, $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$ i $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$ oraz obliczone wcześniej $\lambda_{rd}(t)$ i $\mathbf{u}_{\sigma rd}(t)$.

6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Modelowanie ciała człowieka (istot żywych) jest zadaniem niezmiernie trudnym, głównie ze względu na złożoną strukturę i sposób realizacji ruchu, trudnymi do opisanie adekwatnym modelem fizycznym. Złożone jest też samo modelowanie matematyczne (na bazie modelu fizycznego), nawet wówczas, gdy rzeczywistą strukturę ciała człowieka przybliżymy tylko bardzo zgrubnym modelem fizycznym. Niektóre aspekty tego modelowania omówione zostały w niniejszej pracy.

Na sposób modelowania układów biomechanicznych wpływa wiele różnych czynników. Modelować można całe ciało człowieka lub jego fragment (kończynę górną/dolną). Sterowanie modelować można z użyciem wypadkowych momentów sił mięśniowych w stawach (prosty model deterministyczny) lub bezpośrednio za pomocą sił mięśniowych (sterowanie nadmiarowe) z zastosowaniem różnych modeli działania mięśni (co nie było przedmiotem dyskusji w tej pracy). Model sterowania z uwzględnieniem specyfiki działania mięśni, w tym linii działania sił mięśniowych, ma fundamentalnie znaczenie dla adekwatności prowadzonych symulacji numerycznych. Zaproponowany w pracy (Blajer i inni, 2007) model sterowania mieszanego – za pomocą sił mięśniowych w stawach kończyn dolnych oraz momentów sił mięśniowych w pozostałych stawach – łączy cechy uszczegółowionej analizy obciążeń w kończynach dolnych z prostotą analizy dynamiki całego ciała z wykorzystaniem modelu deterministycznego. Połączenie tych dwu różnych modeli sterowania wymaga odpowiednich metod modelowania matematycznego, omówionych w zarysie w tej pracy.

Na sposób modelowania matematycznego układów biomechanicznych, oprócz struktury modelu fizycznego ciała człowieka, wpływ mają również czynniki stricte techniczne, na przykład wybór współrzędnych, w których prowadzona jest analiza czy potrzeba (lub nie) wyznaczania sił reakcji w stawach. W niniejszej pracy omówiono modelowanie ciała człowieka z zastosowaniem dwu klasycznych rodzajów współrzędnych – absolutnych (zależnych) i niezależnych. Możliwe są jednak również inne wybory, na przykład tzw. współrzędnych naturalnych, których zastosowanie omawiane zostało szczegółowo przez Czaplickiego (2009). Złożony jest również problem wyznaczania reakcji w stawach. Opisany w tej pracy schemat (25) z zastosowaniem metody rozszerzonych współrzędnych złączkowych (Blajer, 2004) wydaje się szczególnie użyteczny w zastosowaniu do symulacji dynamicznej odwrotnej układów biomechanicznych. Na sposób modelowania pewien wpływ może mieć rodzaj (i jakość) danych pomiarowych, wykorzystywanych do zadań symulacji dynamicznej odwrotnej. Oprócz charakterystyk kinematycznych badanego ruchu bardzo pomocne są zwykle również pomiary sił reakcji z otocze-

niem. Dysponowanie tymi dodatkowymi danymi pomiarowymi pozwala często zastosować uproszczone (zredukowane) modele matematyczne, o czym nadmieniono krótko w rozdziale 2.3.

Niniejsza praca koncentruje się wyłącznie na (wybranych) zagadnieniach modelowania układów biomechanicznych. Wyniki symulacji dynamicznej odwrotnej z zastosowaniem proponowanych modeli omówione zostaną w przyszłych publikacjach autorów. W ograniczonym zakresie, z użyciem jakościowo podobnych modeli, wyniki takie prezentowane były też już w (Blajer i inni, 2007, 2009), gdzie oceniano również wrażliwość rozwiązań numerycznych na zmiany różnych parametrów modelu, sposobów modelowania oraz metod symulacji (optymalizacji przy rozwiązywaniu zagadnienia sterowania nadmiarowego). Bardzo wartościowe są też próby weryfikacji (jakościowej i ilościowej) poprawności wyników symulacji. Prosty sposób takiej weryfikacji może być porównanie wyliczanych sił reakcji z podłożem (co umożliwiłaby opisywany w tej pracy model) z wartościami mierzonymi z użyciem platformy dynamometrycznej oraz sprawdzenie czy wyliczane tak reakcje w fazie lotu są bliskie zeru. Wartościowe mogą być ponadto pomiary EMG, weryfikujące rzeczywiste okresy aktywacji mięśni w trakcie badanych czynności na tle otrzymany z obliczeń. Są to wszystko wnioski i inspiracje dla dalszych badań autorów w zakresie modelowania i symulacji układów biomechanicznych.

LITERATURA

1. **Ambrósio J. A. C., Abrantes J. M. C. S.** (2007), Developments in biomechanics of human motion for health and sports, w: Pereira M. S. (ed.), *A Portrait of State-of-the-Art Research at the Technical University of Lisbon*, Springer, Netherlands, pp. 531-553.
2. **Arnold E. M., Ward S. R., Lieber R. L., Delp S. L.** (2009), A model of the lower limb for analysis of human movement, *Annals of Biomechanical Engineering*, (published online).
3. **Blajer W.** (1998), *Metody dynamiki układów wielocłonowych*, Wyd. Politechniki Radomskiej, Radom.
4. **Blajer W.** (2004), On the determination of joint reactions in multibody mechanisms, *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 126, 341-350.
5. **Blajer W., Dziewiecki K., Mazur Z.** (2007), Multibody modeling of human body for the inverse dynamics analysis of sagittal plane movements, *Multibody System Dynamics*, Vol. 18, 217-232.
6. **Blajer W., Dziewiecki K., Mazur Z.** (2009), Sensitivity of muscle force estimates to selected modeling and computational aspects, *Proceedings of ECCOMAS Thematic Conference, Multibody Dynamics 2009*, 29.06–2.07 2009, Warsaw, Poland.
7. **Crowninshield R. D., Brand R. A.** (1981), A physiologically based criterion of muscle force prediction in locomotion, *Journal of Biomechanics*, Vol. 14, 793-801.
8. **Czaplicki A.** (2009), *Modelowanie we współrzędnych naturalnych w biomechanice*, Monografie i opracowania, nr 7, AWF w Warszawie, Zamiejscowy Wydział Wychowania w Białej Podlaskiej, Biała Podlaska.

9. **Damsgaard M., Rasmussen J., Christensen S. T., Egidijus Surma E., de Zee M.** (2006), Analysis of musculoskeletal systems in the AnyBody Modeling System, *Simulation Modeling Practice and Theory*, Vol. 14, No. 8, 1100-1111.
10. **Erdemir A., McLean S., Herzog W., van den Bogert A.** (2007), Model-based estimation of muscle forces exerted during movements, *Clinical Biomechanics*, Vol. 22, 131-154.
11. **Pandy M. G.** (2001), Computer modeling and simulation of human movement, *Annual Review of Biomedical Engineering*, Vol. 3, 245-273.
12. **Potkonjak V., Vukobratović M., Babković K., Borovac B.** (2009), Dynamics and simulation of general human and humanoid motion in sports, w: Pope N., Kuhn K.-A. L., Forster J. J. H. (eds.), *Digital Sport for Performance Enhancement and Competitive Evolution: Intelligent Gaming Technologies*, IGI Global, 36-62.
13. **Tsirakos D., Baltzopoulos V., Bartlett R.** (1997), Inverse optimization: functional and physiological considerations related to the force-sharing problem, *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, Vol. 25, 371-407.
14. **Vukobratović M., Potkonjak V., Babković K., Borovac B.** (2007), Simulation model of general human and humanoid motion, *Multibody System Dynamics*, Vol. 17, 71-96.
15. **Winter D. A.** (2005), *Biomechanics and Motor Control of Human Movement*, Wiley, Hoboken.
16. **Yamaguchi G. T.** (2001), *Dynamic Modeling of Musculoskeletal Motion. A Vectorized Approach for Biomechanical Analysis in Three Dimensions*, Kluwer, Dordrecht.
17. **Yamaguchi G. T., Moran D. W., Si J.** (1995), A computationally efficient method for solving the redundant problem in biomechanics, *Journal of Biomechanics*, Vol. 28, 999-1005.
18. **Zajac F. E., Winters J. M.** (1990), Modeling musculoskeletal movement systems: joint and body segmental dynamics, musculoskeletal actuation, and neuromuscular control, w: Winters J. M., Woo S. L.-Y. (eds.), *Multiple Muscle Systems: Biomechanics and Movement Organizations*, Springer, New York, 121-148.
19. **Zatsiorsky V. M.** (2002), *Kinetics of Human Motion*, Human Kinetics, Champaign.

REMARKS ON HUMAN BODY MOVEMENT MODELING FOR THE INVERSE DYNAMICS ANALYSIS

Abstract: The paper deals with some aspects of mathematical modeling of human body for the inverse dynamics analysis. The discussion is related to a sample planar model composed of 14 rigid segments connected by 13 hinge joints, branching from the hip joint in the open loop linkages. Two ways of control are considered: a simplified (determinate) model with joint torques as control parameters that represent the muscle action in the joints, and hybrid (indeterminate) control model with a mix set of muscle stresses in the lower extremity joints and joint torques in the upper part of the body. Using dynamic equations of motion derived both in absolute and independent coordinates, a discussion is provided on possible solutions to the inverse dynamics analysis related to the mentioned two models of control. Possibilities for determination of reaction forces in the lower extremity joints, which involves the influence of muscle forces and external reactions from the ground, are also discussed.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego nr N N501 156438 finansowanego ze środków na naukę w latach 2010-2012.