

NUMERYCZNE ASPEKTY W MODELOWANIU DRGAŃ ELEKTROFILTRÓW

Iwona ADAMIEC-WÓJCIK*, Stanisław WOJCIECH*

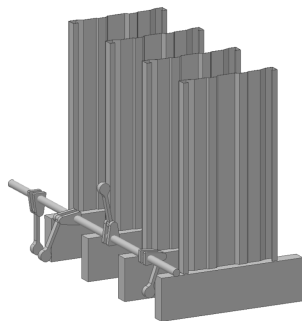
*Katedra Informatyki Stosowanej, Wydział Zarządzania i Informatyki,
Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej, ul. Willowa 2, 43-309 Bielsko-Biała

i.adamiec@ath.eu, swojciech@ath.eu

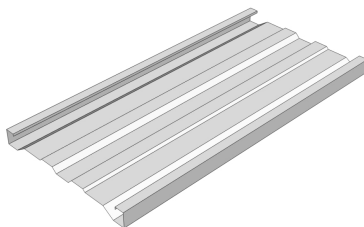
Streszczenie: W pracy przedstawiono algorytmy umożliwiające znaczne skrócenie czasu obliczeń przy modelowaniu dynamiki płyt zbiorczych elektrofiltrów. W przypadku gdy podkłady (płyty oraz belka podtrzymująca i drąg strzepujący) łączą się w niewielu miejscach, można znacząco przyspieszyć działanie programu komputerowego. Przedstawiono przykładowe wyniki obliczeń oraz sformułowano wnioski związane z planowanym wykorzystaniem techniki obliczeń równoległych.

1. WPROWADZENIE

Urządzenia służące do odpylania gazów przemysłowych cechują się bardzo dużą efektywnością (często przekraczającą 99%). Jednymi z najczęściej stosowanych są elektrofiltry, produkowane również w Polsce. Zanieczyszczony gaz przepływa pomiędzy elektrodami a cząsteczki pyłu osadzają się wskutek działania pola elektrostatycznego na płytach zbiorczych (Rys.1).



Rys. 1. Układ elektrod zbiorczych



Rys. 2. Elektroda typu Sigma

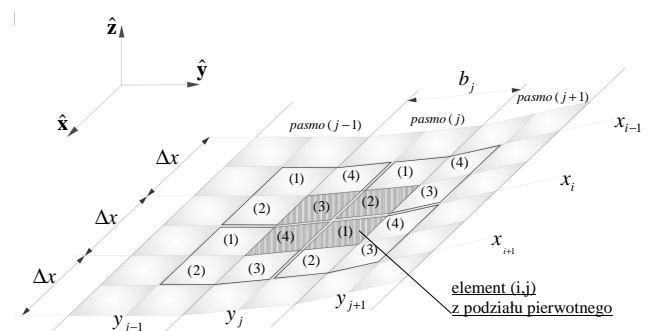
Co jakiś czas specjalne bijaki uderzają w drąg strzepujący wzbudzając drgania płyt z nim połączonych. W opinii konstruktorów o skuteczności strzepywania decydują przyspieszenia pojawiające się w płytach wskutek uderzenia. Wartości przyspieszeń zależą nie tylko od siły uderzenia ale również od kształtu i długości elektrod.

Autorzy niniejszej pracy od kilku lat zajmują się mode-

lowaniem dynamiki płyt zbiorczych przy zastosowaniu współczesnych metod obliczeniowych. Powstały dwa różne modele, krótko opisane poniżej. Wstępne wyniki dotyczące analizy drgań własnych i obliczenia ugięć statycznych przedstawiono w pracach (Adamiec-Wójcik i inni, 2009; Nowak i Adamiec-Wójcik, 2009; Nowak i Brzozowski, 2010).

2. MODELE UKŁADU

Pierwszy z modeli, nazywany modelem hybrydowym, łączy MES (metodę elementów skończonych) (Rakowski i Kacprzyk, 2005; Zienkiewicz i inni, 2006) z MSES (metodą sztywnych elementów skończonych) (Kruszewski i inni, 1975; Wittbrodt i inni, 2006). Belka górna i drąg strzepujący są dyskretyzowane metodą sztywnych elementów skończonych. Natomiast płyty są modelowane w dwóch etapach. Do wyznaczenia energii potencjalnej odkształcenia sprężystego płyt stosowany jest klasyczna metoda elementów skończonych (jest to tzw. podział pierwotny). W drugim etapie cechy bezwładnościowe płyty przejmują sztywne elementy skończone (ses) (Rys.3).



Rys. 3. Podział płyty na sztywne elementy skończone

Dzięki ściśle określonym regułom transformacji współrzędnych elastycznych (z podziału pierwotnego) do współrzędnych sztywnych (z podziału płyty na ses) uzyskuje się

podział wtórny, w którym stopniami swobody elementów są trzy przemieszczenia translacyjne i trzy rotacyjne ses.

W przypadku drugiego z modeli, belkę podtrzymującą i drąg strzepujący modelowano wykorzystując ses belkowe o sześciu stopniach swobody. Natomiast płyty modelowano metodą pasm płytowych (Zienkiewicz i Taylor, 2003), przyjmując że przemieszczenia tarczowe $u^{(j)}$, $v^{(j)}$ oraz płytowe $w^{(j)}$ w j -tym paśmie płytowym określają zależności:

$$u^{(j)}(x', y') = \sum_{i=-1}^{n+1} \varphi_i(x') [P_1(y') \quad P_2(y')] \begin{bmatrix} \alpha_i u_1^{(j)} \\ \alpha_i u_2^{(j)} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$v^{(j)}(x', y') = \sum_{i=-1}^{n+1} \varphi_i(x') [P_1(y') \quad P_2(y')] \begin{bmatrix} \alpha_i v_1^{(j)} \\ \alpha_i v_2^{(j)} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$w^{(j)}(x', y') = \sum_{i=-1}^{n+1} \varphi_i(x') \mathbf{Q}(y') \bar{\mathbf{w}}^{(j)} \quad (1.3)$$

gdzie:

$$\varphi_k(x') = \begin{cases} 0 & x' < x_{k-2} \\ (x' - x_{k-2})^3 & x_{k-2} \leq x' \leq x_{k-1} \\ h^3 + 3h^2(x' - x_{k-1}) + 3h(x' - x_{k-1})^2 - 3(x' - x_{k-1})^3 & x_{k-1} \leq x' \leq x_k \\ h^3 - 3h^2(x' - x_{k+1}) + 3h(x' - x_{k+1})^2 + 3(x' - x_{k+1})^3 & x_k \leq x' \leq x_{k+1} \\ (x_{k+2} - x')^3 & x_{k+1} \leq x' \leq x_{k+2} \\ 0 & x_{k+2} < x' \end{cases}$$

odpowiednio dla $x_{k-2} \leq x' \leq x_{k-1}$, $x_{k-1} \leq x' \leq x_k$, $x_k \leq x' \leq x_{k+1}$, $x_{k+1} \leq x' \leq x_{k+2}$, $x_{k+2} < x'$, $x_k = kh$, $h = \frac{L}{n}$,

$k = -3, 0, 1, \dots, n-1, n, n+3$, L – długość płyty,

$$P_1(y') = -\frac{y'}{b_j} + 1, P_2(y') = \frac{y'}{b_j}, \quad \bar{\mathbf{w}}^{(j)} = \begin{bmatrix} \alpha_i w_1^{(j)} \\ \alpha_i \theta_1^{(j)} \\ \alpha_i w_2^{(j)} \\ \alpha_i \theta_2^{(j)} \end{bmatrix},$$

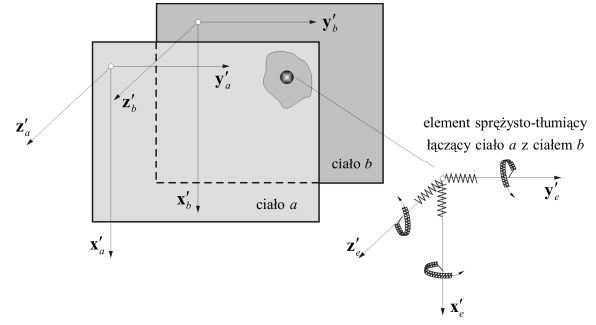
$$\mathbf{Q}(y') = [Q_1(y') \quad Q_2(y') \quad Q_3(y') \quad Q_4(y')],$$

$$Q_1(y') = 1 - \frac{3y'^2}{b_j^2} + \frac{2y'^3}{b_j^3}, \quad Q_2(y') = y' - \frac{2y'^2}{b_j} + \frac{y'^3}{b_j^2},$$

$$Q_3(y') = \frac{3y'^2}{b_j^2} - \frac{2y'^3}{b_j^3}, \quad Q_4(y') = -\frac{y'^2}{b_j} + \frac{y'^3}{b_j^2},$$

b_j – szerokość j -tego pasma płyty.

Płyty łączono z belką górną i drągiem strzepującym przy pomocy elementów sprężystych przedstawionych na Rys. 4.



Rys. 4. Element łączący płyty i belki

W przypadku metody hybrydowej takie połączenie jest łatwo zrealizować, bowiem i belki i płyty są dzielone na sztywne elementy skończone. W przypadku metody pasm płytowych rozbudowano modele pojedynczej płyty do modułu zawierającego oprócz współrzędnych uogólnionych opisujących przemieszczenia wyrażone wzorami (1) również ciała sztywne (dodane w punktach potencjalnych połączeń pasm z płytami). Tak zdefiniowane moduły łączono następnie z ses belek elementami z Rys.4.

3. RÓWNANIA RUCHU UKŁADU

Równania ruchu wyprowadzono z równań Lagrange'a II rodzaju. W obu opisanych wyżej modelach mają one postać:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} \quad (2)$$

gdzie: \mathbf{M} , \mathbf{C} – odpowiednio macierz mas i sztywności o stałych elementach, \mathbf{F} – wektor sił uogólnionych pochodzących od sił ciężkości i uderzenia bijaka, \mathbf{q} – wektor współrzędnych uogólnionych.

Równania (2) całkowano metodą Newmarka (ze stałym krokiem) co prowadzi do konieczności wyznaczenia $\ddot{\mathbf{q}}_t = \ddot{\mathbf{q}}(t)$ jako rozwiązania układu równań algebraicznych liniowych:

$$[\mathbf{M} + \alpha h^2] \ddot{\mathbf{q}}_t = \mathbf{F}_t - \mathbf{C} [\mathbf{q}_{t-h} + h\dot{\mathbf{q}}_{t-h} + (\frac{1}{2} - \alpha)h^2\ddot{\mathbf{q}}_{t-h}] \quad (3)$$

a następnie $\dot{\mathbf{q}}_t$ i \mathbf{q}_t ze wzorów:

$$\dot{\mathbf{q}}_t = \dot{\mathbf{q}}_{t-h} + (1 - \delta)h\ddot{\mathbf{q}}_{t-h} + \delta h\ddot{\mathbf{q}}_t \quad (4.1)$$

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{t-h} + h\dot{\mathbf{q}}_{t-h} + (\frac{1}{2} - \alpha)h^2\ddot{\mathbf{q}}_{t-h} + \alpha h^2\ddot{\mathbf{q}}_t \quad (4.2)$$

gdzie: α, δ – stałe, h – krok całkowania.

Przyjmowano ponadto następujące warunki początkowe:

$$\dot{\mathbf{q}}|_{t=0} = 0 \quad (5.1)$$

oraz $\mathbf{q}|_{t=0} = \mathbf{q}_0$ jako rozwiązanie układu równań:

$$\mathbf{C}\mathbf{q}_0 = \mathbf{F}_0 \quad (5.2)$$

Zasadniczą część czasu obliczeniowego zajmuje rozwiązywanie układów równań algebraicznych liniowych

postaci (3) i (5.2). Konstrukcja układu, narzuca jednak sposób postępowania, który zostanie opisany poniżej.

4. ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH LINIOWYCH

Równania odpowiadające zagadnieniu (3) i (5.2) można ogólnie zapisać w postaci:

$$\mathbf{A}_g \mathbf{X}_g + \sum_{s=1}^p \mathbf{A}_s^{(g)} \mathbf{X}_s = \mathbf{F}_g \quad (6.1)$$

$$\mathbf{A}_k^{(g)T} \mathbf{X}_g + \sum_{s=1}^p \mathbf{A}_{k,s}^{(p)} \mathbf{X}_s + \mathbf{A}_k^{(d)T} \mathbf{X}_d = \mathbf{F}_k^{(p)} \quad (6.2)$$

$$\sum_{s=1}^p \mathbf{A}_s^{(d)} \mathbf{X}_s + \mathbf{A}_d \mathbf{X}_d = \mathbf{F}_d \quad (6.3)$$

gdzie: $k=1, \dots, p$, \mathbf{X}_g – wektor niewiadomych dotyczących belki górnej, \mathbf{X}_s – wektor niewiadomych dotyczących płyty, \mathbf{X}_d – wektor niewiadomych dotyczących belki dolnej (drażga), p – liczba płyt.

W szczególnym przypadku, gdy płyty są jednakowe i nie są połączone ze sobą (jak to ma miejsce w konstrukcjach rzeczywistych) zachodzi:

$$\mathbf{A}_{k,s}^{(p)} = \mathbf{A}, \quad k, s=1, \dots, p \quad (7)$$

a układ (6) przyjmuje postać:

$$\mathbf{A}_g \mathbf{X}_g + \sum_{s=1}^p \mathbf{A}_s^{(g)} \mathbf{X}_s = \mathbf{F}_g \quad (8.1)$$

$$\mathbf{A}_k^{(g)T} \mathbf{X}_g + \mathbf{A} \mathbf{X}_k + \mathbf{A}_k^{(d)T} \mathbf{X}_d = \mathbf{F}_k^{(p)} \quad (8.2)$$

$$\sum_{s=1}^p \mathbf{A}_s^{(d)} \mathbf{X}_s + \mathbf{A}_d \mathbf{X}_d = \mathbf{F}_d \quad (8.3)$$

Z równania (8.2) można obliczyć:

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{A}^{-1} \left[\mathbf{F}_k^{(p)} - \mathbf{A}_k^{(g)T} \mathbf{X}_g - \mathbf{A}_k^{(d)T} \mathbf{X}_d \right] \quad (9)$$

Wstawiając (9) do równań (8.1) i (8.3) otrzymuje się:

$$\left[\mathbf{A}_g - \overline{\mathbf{A}}^{(g)} \right] \mathbf{X}_g - \overline{\mathbf{A}}^{(d)} \mathbf{X}_d = \mathbf{F}_g - \overline{\mathbf{A}}^{(F)} \quad (10.1)$$

$$-\overline{\mathbf{A}}^{(g)} \mathbf{X}_g + \left[\mathbf{A}_d - \overline{\mathbf{A}}^{(d)} \right] \mathbf{X}_d = \mathbf{F}_d - \overline{\mathbf{A}}^{(F)} \quad (10.2)$$

gdzie:

$$\overline{\mathbf{A}}^{(g)} = \sum_{s=1}^p \mathbf{A}_s^{(g)} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_s^{(g)T}, \quad \overline{\mathbf{A}}^{(d)} = \sum_{s=1}^p \mathbf{A}_s^{(d)} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_s^{(d)T},$$

$$\overline{\mathbf{A}}_d^{(g)} = \sum_{s=1}^p \mathbf{A}_s^{(d)} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_s^{(g)T}, \quad \overline{\mathbf{A}}_d^{(d)} = \sum_{s=1}^p \mathbf{A}_s^{(d)} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_s^{(d)T},$$

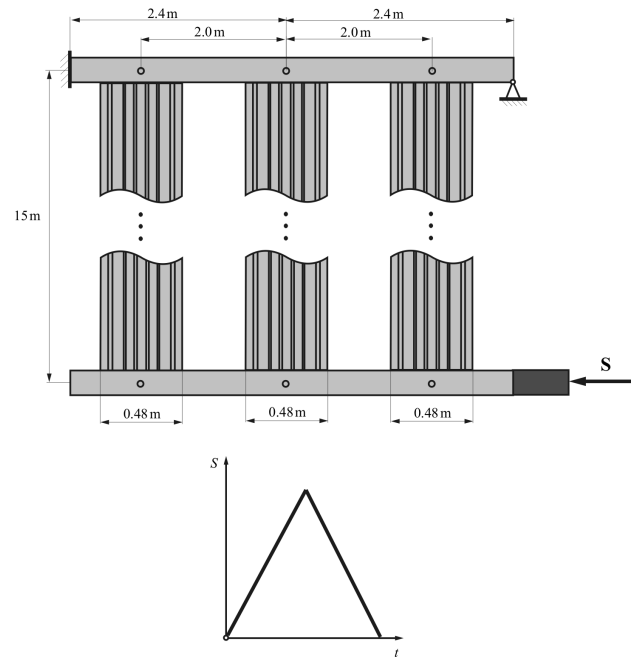
$$\overline{\mathbf{A}}_g^{(F)} = \sum_{s=1}^p \mathbf{A}_s^{(g)} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}_s^{(p)}, \quad \overline{\mathbf{A}}_d^{(F)} = \sum_{s=1}^p \mathbf{A}_s^{(d)} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}_s^{(p)}.$$

Rozwiązując układ równań (10) można wyznaczyć \mathbf{X}_g i \mathbf{X}_d , a następnie z (9) \mathbf{X}_k dla $k=1, \dots, p$. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że macierz \mathbf{A} jest macierzą o stałych elementach. Dlatego, dla potrzeb rozwiązywania układu równań (3) wystarczy macierz odwrotną \mathbf{A}^{-1} obliczyć tylko raz (przy wspomnianym wcześniej stałym kroku całkowania). Liczba elementów wektorów \mathbf{X}_g i \mathbf{X}_d odpowiadających współrzędnym uogólnionym belki górnej i drażga strzepującego jest rzędu kilkuset. Natomiast liczba elementów wektorów \mathbf{X}_k jest rzędu kilku tysięcy. Do rozwiązywania układu równań (10) i odwracania macierzy \mathbf{A} zastosowano algorytm rozkładu na czynniki trójkątne dla macierzy symetrycznych.

5. PRZYKŁADOWE WYNIKI OBLICZEŃ, WNIOSKI

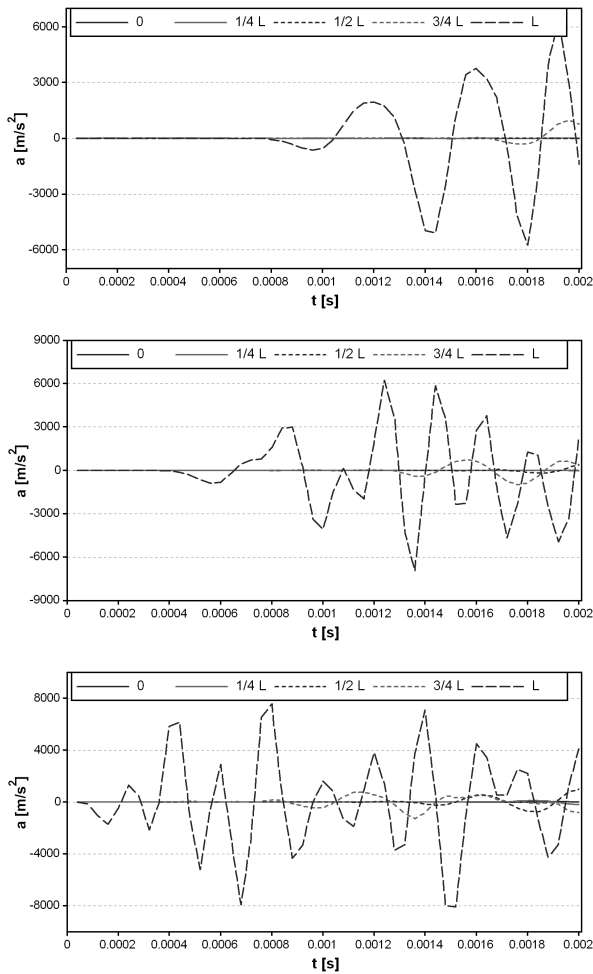
Obie wymienione wcześniej metody (hybrydowa i pasm płytowych) mają już swoje implementacje komputerowe. Obie przeszły już fazę weryfikacji poprawności numerycznej i są w fazie walidacji – porównania wyników obliczeń z pomiarami.

Przedstawione dalej wyniki obliczeń dotyczą przypadku, w którym na belce górnej zawieszono trzy jednakowe płyty o długości 15m. Założono trójkątny przebieg siły uderzenia (Rys. 5).

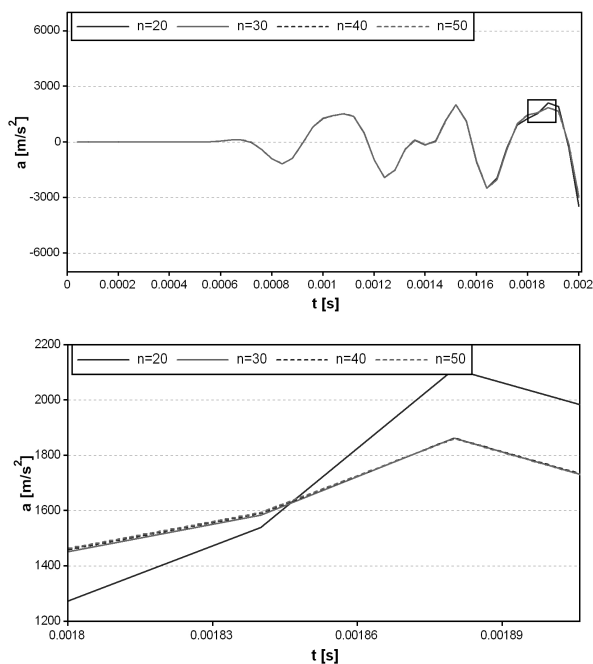


Rys. 5. Układ trzech płyt i przebieg siły uderzenia

Na Rys. 6 przedstawiono wyniki uzyskane metodą pasm płytowych. Pokazują one przebiegi przyspieszeń w punktach położonych odpowiednio w punktach połączeń płyt z belką dolną i górną oraz w 1/4, 1/2, 3/4 wysokości płyty. Pierwszy wykres pokazuje przyspieszenia w płycie położonej najbliżej młotka, następny w płycie środkowej i ostatni w płycie zewnętrznej. Przedstawione wykresy umożliwiają analizę rozprzestrzeniania się drgań w układzie płyt osadczych.



Rys. 6. Przebiegi przyspieszeń normalnych do powierzchni płyt osadczyc



Rys. 7. Wpływ liczby funkcji sklepanych na przebiegi przyspieszeń normalnych w punkcie znajdującym się w połowie długości płyty

Wpływ liczby funkcji sklepanych wykorzystanych w modelowaniu przemieszczeń płyt na dokładność wyników przedstawia Rys. 7.

Wykresy przedstawiają wartości przyspieszeń normalnych obliczanych dla płyty środkowej w połowie jej wysokości. Wyniki otrzymano dla układu płyt o długości 1m.

Autorzy mają nadzieję na pozytywne rezultaty walidacji obu modeli.

Wiążemy też duże oczekiwania z możliwością zastosowania obliczeń rozproszonych. W jednostce głównej rozwiązywany byłby układ równań (10), natomiast obliczenia wektorów \mathbf{X}_k z równania (9) realizowane byłyby na jednostkach satelitarnych. Warto również zaznaczyć, że macierze $\mathbf{A}_s^{(g)}$ i $\mathbf{A}_s^{(d)}$, wobec przyjętego łączenia płyt z belkami, mają niezerowe tylko pojedyncze podmacierze 6x6 co wykorzystano w implementacji komputerowej.

LITERATURA

1. **Adamiec-Wójcik I., Nowak A. P., Wojciech S.** (2009), Dynamic analysis of electrostatic precipitators using finite strip method, W: *10th Conference on Dynamical Systems- Theory and Applications DSTA 2009 Łódź*: proceedings, Vol. 1, 889-896.
2. **Kruszewski J., Gawroński W., Wittbrodt E., Najbar F., Grabowski S.** (1975), *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Arkady, Warszawa.
3. **Nowak A.P., Adamiec-Wójcik I.** (2009), Vibration analysis of collecting electrodes of precipitators by means of the hybrid finite element method, W: *Multibody Dynamics 2009: ECCOMAS Thematic Conference Warsaw*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.
4. **Rakowski G., Kacprzyk Z.** (2005), *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
5. **Wittbrodt E., Adamiec-Wójcik I., Wojciech S.** (2006), *Dynamics of flexible multibody systems, Rigid finite element method*, Springer, Berlin.
6. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** (2003), *The finite element method, Vol.2 Solid Mechanics*, 5th ed. Elsevier Butterworth Heinemann, Oxford.
7. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.** (2006), *The finite element method, Its basis and fundamentals*, 6th ed. Elsevier Butterworth Heinemann, Oxford.

NUMERICAL ASPECTS IN MODELLING VIBRATIONS OF PRECIPITATORS

Abstract: The paper presents algorithms which enable us to shorten time of calculations when modeling dynamics of collecting electrodes of precipitators. In the case when subsystems (plates and top and bottom beams) are connected only in few places, computer program can be considerably accelerated. Results of calculations are presented and some conclusions are made.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu rozwojowego nr NR03 0035 04 finansowanego ze środków Narodowego Centrum Badań i Rozwoju.