

WSPÓŁCZYNNIKI INTENSYWNOŚCI NAPRĘŻENIA K_I DLA PŁASKIEJ SZCELINY TUNELOWEJ W PRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ

Mykhaylo SAVRUK*, Krzysztof MOLSKI*, Grzegorz ROGOWSKI*

*Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok

m.savruk@pb.edu.pl; kmolski@pb.edu.pl; grogowski@doktoranci.pb.edu.pl

Streszczenie: Praca dotyczy zagadnienia wyznaczania współczynników intensywności naprężenia K_I dla płaskiej dwuwymiarowej szczeliny tunelowej w przestrzeni sprężystej, w przypadku obciążenia powierzchni szczeliny dowolnym ciśnieniem normalnym. Stosując metodę osobliwych równań całkowych i techniki numeryczne, wyznaczono współczynnik K_I wzdłuż obu frontów szczeliny, której obie powierzchnie są obciążone parą sił skupionych P . Otrzymano numeryczne rozwiązania i porównano je z innymi przybliżonymi wyrażeniami K_I znanymi z literatury.

1. WSTĘP

Współczynniki intensywności naprężenia K_I , K_{II} i K_{III} należą do podstawowych parametrów stosowanych do prognozowania krytycznych, ze względu na pęknięcie, stanów konstrukcji. O ile zagadnienia dwuwymiarowe z jednowymiarowymi szczelinami są stosunkowo łatwe do modelowania matematycznego, to prognozowanie zachowania się pęknięć dwuwymiarowych w przestrzeni 3-D należy do jednych z najtrudniejszych problemów inżynierskich. Złożone kształty szczelin, ich różne położenie względem brzegów elementu konstrukcyjnego, dowolne rozkłady obciążenia oraz zmienność współczynnika K_I wzdłuż frontu szczeliny dwuwymiarowej to podstawowe czynniki, które muszą być uwzględnione w modelowaniu dwuwymiarowych szczelin oraz stanowią główną przyczynę trudności obliczeniowych.

W literaturze znanych jest wiele metod wyznaczania współczynników K_I dla zagadnień przestrzennych. Często stosowane jest podejście polegające na zredukowaniu obciążenia zewnętrznego do powierzchni szczeliny i traktowaniu znanego rozkładu ciśnienia powierzchniowego jako jedyne obciążenie, które zgodnie z zasadą podaną przez Buecknera (1970) generuje wartości współczynników K_I wzdłuż frontu szczeliny identyczne jak przy obciążeniu zewnętrznym przyłożonym z daleka od szczeliny. Niektóre rozwiązania analityczne, jak na przykład rozwiązania Shah i Kobayashi (1971) dla płaskiej szczeliny eliptycznej obciążonej na obu powierzchniach ciśnieniem normalnym wyrażonym w postaci wielomianów, są ściśle w sensie matematycznym teorii sprężystości i mogą służyć jako wartości referencyjne przy szacowaniu dokładności metod przybliżonych.

Kolejna metoda wyznaczania współczynników intensywności naprężenia K_I w zagadnieniach płaskich szczelin polega na wyznaczeniu funkcji Greena, odpowiadającej obciążeniu przeciwległych powierzchni szczeliny parą przeciwnie skierowanych sił skupionych. Funkcja ta umożliwia obliczanie współczynników K_I dla dowolnego rozkła-

du ciśnienia rozwierającego powierzchnie szczeliny. Jednym z takich zagadnień jest płaska szczelina tunelowa w przestrzeni trójwymiarowej. W literaturze znane są ściśle rozwiązania tego zagadnienia dla kilku rodzajów obciążenia: stałego ciśnienia na całej powierzchni szczeliny, ciśnienia zmieniającego się liniowo w obu kierunkach – wzdłuż i w poprzek szczeliny oraz dla obciążenia liniowego działającego wzdłuż szczeliny w stałej odległości od obu frontów. Ostatni przypadek można sprowadzić do znanego zagadnienia płaskiego, gdzie jednowymiarowa szczelina wewnętrzna o skończonej długości obciążona jest na powierzchni zrównoważoną parą sił skupionych przyłożonych w pewnej odległości od obu wierzchołków.

Celem obecnej pracy jest podanie ogólnej metody rozwiązania zagadnienia płaskiej szczeliny tunelowej w trójwymiarowej przestrzeni sprężystej przy zastosowaniu metody osobliwych równań całkowych, podanie numerycznego rozwiązania funkcji Greena dla tego zagadnienia oraz porównanie wyników obliczeń z rozwiązaniami opublikowanymi wcześniej przez innych autorów.

2. METODA ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA SZCELINY TUNELOWEJ

Rozważmy trójwymiarowe ciało jednorodne i izotropowe z płaską szczeliną leżącą w płaszczyźnie $z=0$ i zajmującą obszar $G=\{(x, y); -l \leq x \leq l, -\infty < y < \infty\}$ (Rys. 1). Obie powierzchnie szczeliny poddane są wzajemnie równoważącym się obciążeniom normalnym

$$\sigma_z^+(x, y) = \sigma_z^-(x, y) = -p(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (1)$$

stanowiącym jedyne obciążenie w całej rozpatrywanej przestrzeni. Indeksy $+$ i $-$ odnoszą się odpowiednio do górnej i dolnej powierzchni szczeliny. Składowe wzdłużne przemieszczeń powierzchni szczeliny zachowują ciągłość i symetrię

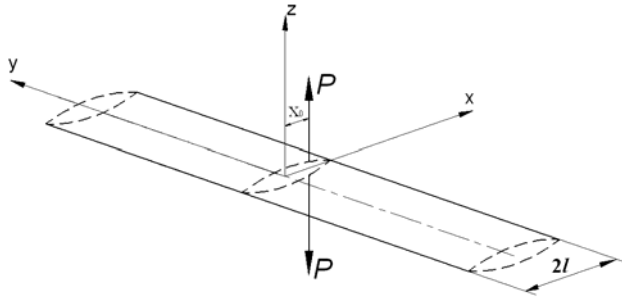
$$u_x^+(x, y) = u_x^-(x, y), u_y^+(x, y) = u_y^-(x, y),$$

$$(x, y) \in G, \tag{2}$$

natomiast składowe normalne nie są ciągłe, to znaczy

$$u_z^+(x, y, 0) = -u_z^-(x, y, 0) = \beta u(x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in G, \tag{3}$$

gdzie $\beta = \mu(1-\nu)^{-1}$, a μ i ν oznaczają odpowiednio moduł sztywności poprzecznej i współczynnik Poissona materiału.



Rys. 1. Płaska szczelina tunelowa w przestrzeni trójwymiarowej obciążona parą sił skupionych P

Przemieszczenia rozwieranych powierzchni szczeliny w kierunku normalnym opisane są funkcją $u(x,y)$ równą zero poza obszarem szczeliny G i spełniają przy $(x, y) \in G$ różniczkowo-całkowe równanie (Panasiuk 1968):

$$\Delta_{xy} \iint_G \frac{u(x', y')}{r} dx' dy' = -2\pi p(x, y), \quad (x, y) \in G; \tag{4}$$

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

gdzie Δ_{xy} oznacza dwuwymiarowy operator Laplace'a:

$$\Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{5}$$

W celu uzyskania rozwiązania tak postawionego problemu redukujemy dwuwymiarowe różniczkowo-całkowe równanie (4) do całkowego równania jednowymiarowego przez zastosowanie odpowiedniej transformacji, po dokonaniu której jeden z wymiarów zostaje sprowadzony do roli parametru.

Zastosujemy do równania (4) transformację całkową Fouriera względem zmiennej y

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{isy} dy. \tag{6}$$

Przekształcenie odwrotne będzie wówczas opisane wzorem

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(x) e^{-isy} ds. \tag{7}$$

Zakładamy, że funkcja $p(x, y)$ (względem zmiennej y) jest odcinkami ciągła w dowolnym przedziale i bezwzględnie całkowna w przedziale $(-\infty, \infty)$, natomiast $u(x, y)$ jest funkcją klasy $L_2(-\infty, \infty)$ względem zmiennej y i razem z pierwszą pochodną dąży do zera dla $x \rightarrow \pm\infty$.

Równanie (4) po przekształceniach Fouriera ma następującą postać:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - s^2 \right) \int_{-l}^l \tilde{u}(t) L_0[s(t-x)] dt = -\pi \tilde{p}(x) \tag{8}$$

gdzie (Бейтмен і Эрдейи, 1969):

$$L_0(sx) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y^2 + x^2}} e^{isy} dy = \int_0^{\infty} \frac{\cos(sy)}{\sqrt{y^2 + x^2}} dy = K_0(|sx|). \tag{9}$$

Jądro $K_0(|sx|)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela drugiego rodzaju.

Różniczkowo-całkowe równanie (8) może być również zapisane w postaci osobliwego równania całkowego

$$\int_{-l}^l \tilde{u}'(t) K(t-x) dt = -\pi \tilde{p}(x), \tag{10}$$

gdzie jądro $K(u)$ ma następującą postać:

$$K(u) = s \left(K_1(u) + \int_0^u K_0(v) dv \right) = s \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\tau^2 + 1}}{\tau} \sin(su\tau) d\tau. \tag{11}$$

W tym przypadku funkcja $K_1(u)$ jest również zmodyfikowaną funkcją Bessela drugiego rodzaju.

Osobliwe równanie całkowe (10) ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnej prawej strony przy dodatkowym warunku zapewniającym jednoznaczność przemieszczeń w obszarze otaczającym szczelinę

$$\int_{-l}^l \tilde{u}'(t) dt = 0. \tag{12}$$

Rozwiązanie osobliwego równania całkowego (10) można otrzymać metodą numeryczną (Panasiuk i inni, 1976).

Można również otrzymać przybliżone rozwiązanie tego równania w postaci zamkniętej, zbieżne z rozwiązaniem dokładnym dla małych i dużych wartości parametru s .

3. PRZYBLIŻONE ROZWIĄZANIE RÓWNIANIA CAŁKOWEGO (10) W POSTACI ZAMKNIĘTEJ

Przedstawmy jądro $K(u)$ równania (11) w postaci całki Fouriera:

$$K(u) = s \int_0^{\infty} L(\tau) \sin(su\tau) d\tau, \quad L(\tau) = \frac{\sqrt{\tau^2 + 1}}{\tau}. \tag{13}$$

Ponieważ funkcja $L(\tau)$ posiada własności

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau L(\tau) = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} L(\tau) = 1 \tag{14}$$

możemy ją aproksymować wyrażeniem

$$\tilde{L}(\tau) = \coth \tau. \tag{15}$$

Dokładność takiej aproksymacji przedstawiono graficznie linią ciągłą na Rys. 2. Maksymalny błąd wynosi w tym przypadku około 8%. Z równania (13) znajdziemy teraz aproksymowane jądro

$$\tilde{K}_0(u) \approx s \int_0^\infty \coth \tau \sin(su\tau) d\tau = \tag{16}$$

$$\frac{\pi s}{2} \coth \frac{\pi s u}{2} = B \coth B u, \text{ gdzie } B = \frac{\pi s}{2}.$$

Po dokonaniu zamiany zmiennych

$$\xi = \frac{\tanh B t}{b}, \quad \eta = \frac{\tanh B x}{b}, \quad b = \tanh B l \tag{17}$$

i wprowadzeniu oznaczeń:

$$\gamma_0(\xi) = \tilde{u}'(t) \cosh^2 B t, \quad \psi(\eta) = -\tilde{p}(x) \cosh^2 B x, \tag{18}$$

otrzymujemy osobliwe równanie całkowe z jądrem Cauchy'ego postaci

$$\int_{-1}^1 \frac{\gamma_0(\xi) d\xi}{\xi - \eta} = \pi \psi(\eta), \quad |\eta| < 1. \tag{19}$$

Rozwiązanie równania (19), przy uwzględnieniu warunku (20)

$$\int_{-1}^1 \gamma_0(\xi) d\xi = 0, \tag{20}$$

wynikającego z równania (12), ma następującą postać (Mუსхелишвили, 1968):

$$\gamma_0(\eta) = -\frac{1}{\pi \sqrt{1-\eta^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2} \psi(\xi) d\xi}{\xi - \eta}. \tag{21}$$

Przekształcenie Fouriera dla współczynników intensywności naprężenia wzdłuż lewego (\tilde{K}_l^-) i prawego (\tilde{K}_l^+) frontu szczeliny tunelowej można obliczyć ze wzorów

$$\tilde{K}_l^\pm(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty K_l^\pm(x) e^{-isx} dx = pl \sqrt{\pi l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} f_0^\pm(\lambda), \tag{22}$$

gdzie p oznacza parametr o wymiarze naprężenia, do którego odnosimy obciążenie $p(x,y)$,

$$f_0^\pm(\lambda) = \mp \frac{2bv_0(\pm 1)}{pl \sqrt{\pi Bl \sinh 2Bl}}; \tag{23}$$

$$v_0(\eta) = \gamma_0(\eta) \sqrt{1-\eta^2}; \quad \lambda = sl.$$

Z równań (21) i (23) otrzymujemy

$$f_0^\pm(\lambda) = \frac{2\sqrt{B}}{\pi \sqrt{\pi l \sinh 2Bl}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{\tanh Bl \pm \tanh Bt}}{\sqrt{\tanh Bl \mp \tanh Bt}} \bar{p}(t) dt, \tag{24}$$

$$\bar{p}(t) = \frac{\tilde{p}(t)}{pl}.$$

Współczynniki intensywności naprężenia otrzymujemy po przeprowadzeniu odwrotnego przekształcenia Fouriera zgodnie ze wzorem (7). Otrzymamy wówczas

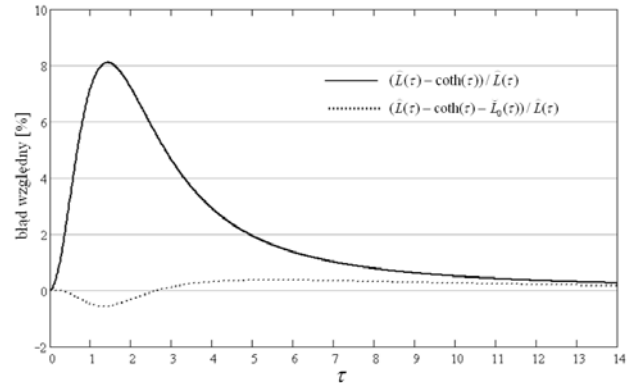
$$K_l^\pm = p \sqrt{\pi l} F_l^\pm, \tag{25}$$

gdzie

$$F_l^\pm = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f_0^\pm(\lambda) e^{-i\lambda \tilde{y}} d\lambda; \quad \tilde{y} = y/l. \tag{26}$$

Dla parzystych funkcji $f_0^\pm(\lambda)$ otrzymamy:

$$F_l^\pm(\tilde{y}) = \int_0^\infty f_0^\pm(\lambda) \cos \lambda \tilde{y} d\lambda. \tag{27}$$



Rys. 2. Dokładność przybliżonego opisu funkcji $L(t)$ (13) aproksymowanej wzorem (15) (linia ciągła) oraz z przykładowym użyciem jednego członu dodatkowej funkcji poprawkowej (35) (linia punktowa)

Rozważmy teraz przypadek, gdy obciążenie powierzchni szczeliny opisane jest wzorem:

$$p(x,y) = P \delta(x-x_0) \delta(y), \tag{28}$$

gdzie $\delta(x)$ jest funkcją delta Diraca, za pomocą której przedstawimy siłę skupioną P przyłożoną w punkcie $(x_0, 0)$ (Rys. 1). Przekształcenie Fouriera funkcji (28) ma wówczas postać:

$$\tilde{p}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty p(x,y) e^{isy} dy = \tag{29}$$

$$\frac{P}{\sqrt{2\pi}} \delta(x-x_0) \int_{-\infty}^\infty \delta(y) e^{isy} dy = \frac{P}{\sqrt{2\pi}} \delta(x-x_0).$$

Po uwzględnieniu, że

$$\bar{p}(x) = \frac{P}{\sqrt{2\pi}} \delta(x-x_0) / (pl) = \tag{30}$$

$$\frac{l}{\sqrt{2\pi}} \delta(x-x_0), \quad p = \frac{P}{l^2}$$

otrzymujemy następującą zależność:

$$f_0^\pm(\lambda) = \frac{\sqrt{2Bl}}{\pi^2 \sqrt{\sinh 2Bl}} \sqrt{\frac{\tanh Bl \pm \tanh Bx_0}{\tanh Bl \mp \tanh Bx_0}} = \tag{31}$$

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi \sqrt{\pi \sinh \pi \lambda}} \sqrt{\frac{\tanh \frac{\pi \lambda}{2} \pm \tanh \frac{\pi \lambda \varepsilon}{2}}{\tanh \frac{\pi \lambda}{2} \mp \tanh \frac{\pi \lambda \varepsilon}{2}}}$$

gdzie $\varepsilon = \frac{x_0}{l}$.

Poszukiwane wartości współczynników intensywności naprężenia wyznaczamy wówczas ze wzorów (25) i (26). Chociaż otrzymane rozwiązanie ma postać zamkniętą, jest rozwiązaniem przybliżonym ze względu na wprowadzoną aproksymację jądra równania (13) zależnością (15).

4. WPROWADZENIE FUNKCJI POPRAWKOWEJ

Przedstawmy teraz jądro $K(u)$ równania (11) w postaci sumy

$$K(u) = \hat{K}_0(u) + k(u). \quad (32)$$

Drugi wyraz ma następującą postać:

$$k(u) = s \int_0^\infty \hat{L}(\tau) \sin(su\tau) d\tau, \quad (33)$$

gdzie

$$\hat{L}(\tau) = \frac{\sqrt{\tau^2 + 1}}{\tau} - \coth \tau. \quad (34)$$

Ze względu na trudności obliczeniowe wygodniej będzie opisać przybliżoną wartość jądra $k(u)$ w równaniu (33) za pomocą funkcji aproksymacyjnej

$$\hat{L}_0(\tau) = \sum_{i=1}^M \frac{c_i \tau}{(d_i^2 + \tau^2)^2}, \quad (35)$$

której każdy wyraz, podobnie jak funkcja $\hat{L}(\tau)$ (34), zeruje się w zerze i w nieskończoności.

Uwzględniając postać nowej funkcji aproksymacyjnej, wyrażenie (33) przyjmuje następującą formę (Двайт, 1973):

$$\hat{k}(u) = \sum_{i=1}^M s \int_0^\infty \frac{c_i \tau}{(d_i^2 + \tau^2)^2} \sin(su\tau) d\tau = \sum_{i=1}^M \frac{\pi s^2 u c_i}{4 d_i} \exp(-|s u d_i|) \quad (36)$$

Nieznane wartości stałych c_i i d_i można teraz dobrać metodą najmniejszych kwadratów lub minimalizując największe różnice między funkcją dokładną (34) i przybliżoną (35). Użycie funkcji poprawkowej (35), razem z funkcją aproksymującą (15), pozwoliło znacząco zwiększyć dokładność opisu funkcji $L(\tau)$ (13). Dokładność tę można dowolnie zwiększać przyjmując odpowiednią liczbę M członów korekcyjnych. W przypadku użycia tylko jednego członu funkcji (35) i wartości stałych: $c_1=2,7$ i $d_1=2,0$, największy błąd względny nie przekracza 0,5%, co przedstawiono graficznie na rysunku 2 linią punktową.

5. ROZWIĄZANIE NUMERYCZNE CAŁKOWEGO RÓWNANIA OSOBLIWEGO (10)

Przedstawmy teraz równanie całkowe (10) w postaci

$$\int_{-1}^1 \hat{u}'(t) \left\{ \frac{B}{\tanh Bt - \tanh Bx} + \cosh^2(Bx) k(t-x) \right\} \frac{dt}{\cosh^2 Bx} = -\pi \hat{p}(x) \quad (37)$$

Po wprowadzeniu do równania (37) współrzędnych bezwymiarowych (17) otrzymujemy

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\xi - \eta} + M(\xi, \eta) \right] \gamma(\xi) d\xi = \pi \psi(\eta), \quad |\eta| < 1, \quad (38)$$

gdzie

$$M(\xi, \eta) = \frac{b}{B(1-b^2\eta^2)} k \left[\frac{1}{\pi s} \ln \frac{(1+b\xi)(1-b\eta)}{(1-b\xi)(1+b\eta)} \right]. \quad (39)$$

Jednoznaczne rozwiązanie równania (37), w klasie funkcji z całkowalnymi osobliwościami na końcach przedziału $(-1,1)$, jest możliwe przy zachowaniu dodatkowego warunku (Мухелишвили, 1968)

$$\int_{-1}^1 \gamma(\xi) d\xi = 0. \quad (40)$$

Poszukujemy obecnie rozwiązania równania (38) w postaci sumy

$$\gamma(\xi) = \gamma_0(\xi) + \gamma_1(\xi), \quad (41)$$

gdzie funkcja $\gamma_0(\xi)$, będąca rozwiązaniem równania całkowego (19), dana jest wyrażeniem (21) dla ogólnego przypadku obciążenia. Chociaż takie podejście do rozwiązania równania (19) może być stosowane w ogólnym przypadku obciążenia, to najlepiej je stosować wtedy, gdy prawa strona równania jest funkcją nieciągłą. Wówczas, jeżeli funkcja obciążenia ma np. osobliwość, można uzyskać zmodyfikowane osobliwe równanie całkowe z ciągłą prawą stroną, które można efektywnie rozwiązać metodami numerycznymi, dlatego w dalszej części pracy przedstawiono rozwiązanie dla funkcji obciążenia danej wzorem (28).

Podstawiając poszukiwaną funkcję (41) do równania (38) otrzymujemy

$$\int_{-1}^1 \bar{K}(\xi, \eta) [\gamma_0(\xi) + \gamma_1(\xi)] d\xi = \pi \psi(\eta), \quad |\eta| < 1, \quad (42)$$

$$\bar{K}(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi - \eta} + M(\xi, \eta).$$

Zakładając, że funkcja $\gamma_0(\xi)$ jest rozwiązaniem równania (19), otrzymamy równanie całkowe pozwalające wyznaczyć funkcję $\gamma_1(\xi)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{K}(\xi, \eta) \gamma_1(\xi) d\xi = \bar{p}_1(\eta, \varepsilon) = \frac{p l \lambda \sqrt{1-\varepsilon^2}}{2b\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{M(\xi, \eta) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(\xi-\varepsilon)}, \quad -1 \leq \eta \leq 1 \quad (43)$$

$$\int_{-1}^1 \gamma_1(\xi) d\xi = 0.$$

gdzie prawą stroną jest funkcja ograniczona w przedziale: $|\eta| < 1$ dla $|\varepsilon| < 1$.

Rozwiązanie numeryczne równania (43) można otrzymać stosując np. metodę kwadratur Gaussa-Czebyszewa zarówno dla osobliwych jak i nieosobliwych całek (Panasiuk i inni, 1976; Panasiuk i inni, 1984; Savruk, 1988).

Poszukiwaną funkcję przedstawmy w następującej postaci:

$$\gamma(\xi) = \frac{v(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (44)$$

gdzie nowa nieznaną funkcją $v(\xi)$, jest ciągła w przedziale domkniętym $[-1,1]$. W rezultacie otrzymujemy układ n algebraicznych równań liniowych

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{K}(\xi_k, \eta_m) v_1(\xi_k) = \bar{p}_1(\eta_m, \varepsilon), \quad m = \overline{1, n-1}; \quad (45)$$

$$\sum_{k=1}^n v_1(\xi_k) = 0,$$

gdzie

$$\xi_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad (k = \overline{1, n}); \quad (46)$$

$$\eta_m = \cos \frac{\pi m}{n}, \quad (m = \overline{1, n-1}).$$

Wartości funkcji $\bar{p}_1(\eta, \varepsilon)$ można obliczyć dla dowolnego parametru ε , jednak wygodniej jest przyjąć, że

$$\varepsilon = \varepsilon_r = \cos \frac{r\pi}{n} \quad (r = \overline{1, n-1}). \quad (47)$$

Wówczas prawą stronę równania (33) obliczymy z zależności

$$\bar{p}_1(\eta_m, \varepsilon_r) = \frac{pl\lambda}{2bn\sqrt{2\pi}} \sqrt{1-\varepsilon_r^2} \sum_{k=1}^n \frac{M(\xi_k, \eta_m)}{\xi_k - \varepsilon_r}. \quad (48)$$

Transformaty Fouriera współczynników intensywności naprężenia dla lewego (\tilde{K}_I^-) i prawego (\tilde{K}_I^+) frontu szczeliny tunelowej mają postać

$$\tilde{K}_I^\pm = \mp \frac{\sqrt{2\pi}lb[v_0(\pm 1) + v_1(\pm 1)]}{\sqrt{Bl} \sinh 2Bl} = \quad (49)$$

$$pl\sqrt{\pi l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} [f_0^\pm(\lambda) + f_1^\pm(\lambda)]$$

gdzie

$$f_1^\pm(\lambda) = \mp \frac{2bv_1(\pm 1)}{pl\sqrt{\pi Bl} \sinh 2Bl}. \quad (50)$$

Wartości funkcji $v_1(\pm 1)$ można wyznaczyć za pomocą wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a:

$$v_1(1) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k v_1(\xi_k) \cot \frac{2k-1}{4n} \pi; \quad (51)$$

$$v_1(-1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} v_1(\xi_k) \tan \frac{2k-1}{4n} \pi.$$

Współczynniki intensywności naprężenia wyznaczmy korzystając z przekształcenia odwrotnego (7) oraz ze wzoru (25), w którym funkcja $F_I^\pm(\tilde{y})$ przyjmuje teraz następującą postać:

$$F_I^\pm(\tilde{y}) = \int_0^\infty [f_0^\pm(\lambda) + f_1^\pm(\lambda)] \cos \lambda \tilde{y} d\lambda \quad (52)$$

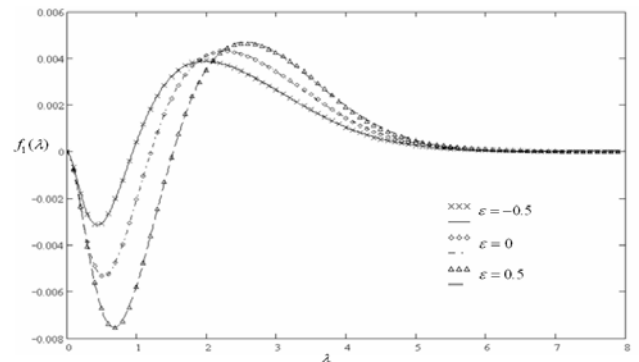
Dla dużych wartości współrzędnych \tilde{y} (lub y) funkcja podcałkowa wykazuje własności oscylacyjne, co znacznie utrudnia obliczenie wartości całki. W takim wypadku należy zastosować specjalne wzory kwadraturowe (Крылов і Скобля, 1974; Задирака, 1983; Brigham, 1988; Averbuch i inni, 2000; Evans i Webster, 1997; Ixaru, 2001; Ixaru i Paternoster, 2001; Kim i inni, 2002; Kuijpers i inni, 1997; Milovanovic, 1988; Shu i Chew, 1997; Ooura i Mori, 1999).

6. OBLICZANIE WSPÓŁCZYNNIKÓW INTENSYWNOŚCI NAPRĘŻENIA K_I

Wartości współczynników K_I , dla przyjętych wartości r (47) i parametrów ε , obliczano numerycznie ze wzorów (25) i (52). Funkcje $f_0^\pm(\lambda)$ opisane są wzorami (31), natomiast przebiegi funkcji $f_1^\pm(\lambda)$, dla różnych wartości parametru ε , wyznaczono z zależności (50). Poszczególne wartości $v_1(\pm 1)$ obliczono za pomocą wielomianów (51), gdzie wektor $v_1(\xi_k)$ stanowił rozwiązanie układu n równań liniowych (45) zbudowanych w węzłach Gaussa-Czebyszewa, opisanych wzorami (46). Otrzymywane w ten sposób dyskretne wartości funkcji $f_1^\pm(\lambda)$ opisywano za pomocą funkcji interpolacyjnych

$$f_1(\lambda) = e^{-C|\lambda|} \sum_{k=1}^N A_k \lambda^{2k}, \quad (53)$$

co umożliwiło analityczne obliczenie wartości całek zgodnie ze wzorem (52). Współczynniki C i A_k dobierano metodą najmniejszych kwadratów, oddzielnie dla każdej wartości parametru ε , dopasowując je do obliczonych wcześniej dyskretnych wartości funkcji $f_1^\pm(\lambda)$.



Rys. 3. Przykładowe wartości numeryczne funkcji $f_1(\lambda)$ (symbole) otrzymane w wyniku rozwiązania układów 420 równań liniowych (45) oraz ich interpolacje (linie) dla wybranych wartości parametru ε

Na Rys. 3 przedstawiono przykładowe dyskretne wartości funkcji $f_1^\pm(\lambda)$, obliczone według powyższej procedury, dla trzech wartości parametru ε oraz ich aproksymacje funkcjami ciągłymi zgodnie ze wzorem (53), przyjmując $N=6$. Dokładność obliczanych wartości funkcji $f_1^\pm(\lambda)$ oraz jej aproksymacji zależała od liczby przyjętych węzłów (liczby równań liniowych). Po zbadaniu wpływu liczby węzłów na dokładność rozwiązania numerycznego funkcji $f_1^\pm(\lambda)$, przyjęto $n=420$ równań liniowych jako wartość refe-

rencyjną, która okazała się być rozsądnym kompromisem między dokładnością a czasem obliczeń, i dla tej liczby równań przeprowadzono wszystkie dalsze obliczenia współczynników intensywności naprężenia przedstawione poniżej.

7. PORÓWNANIE OTRZYMANÝCH WARTOŚCI K_I Z ROZWIĄZANIAMÍ PODANYMI PRZEZ INNYCH AUTORÓW

Na Rys. 4-8 linią ciągłą przedstawiono obliczone wartości współczynnika K_I wzdłuż prawego frontu szczeliny, przy różnym oddaleniu $l-x_0$ punktu przyłożenia jednostkowego obciążenia skupionego.

W dostępnej literaturze można znaleźć różne przybliżone rozwiązania opisujące współczynnik K_I wzdłuż frontu szczeliny tunelowej obciążonej parą sił skupionych P . Martynenko (1970) pierwszy zaproponował przybliżone rozwiązanie tego zagadnienia w postaci wzoru

$$K_I^M = \frac{P\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(\pi l)^{3/2} \left[(1-\varepsilon)^2 + \left(\frac{y}{l}\right)^2 \right]} \quad (54)$$

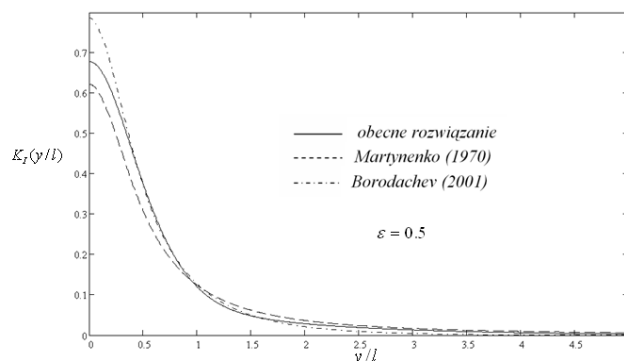
przedstawionego graficznie linią przerywaną na Rys. 4-8. Niektórzy autorzy późniejszych prac, np. Harris (1973) oraz Oore i Burns (1980), dochodzą również do zależności (54) wychodząc z innych założeń.

Rozwiązanie to dąży do dokładnych wartości współczynników intensywności naprężenia przy zbliżaniu punktu przyłożenia siły P do linii frontu szczeliny, co w granicznym przypadku odpowiada znanemu rozwiązaniu analitycznemu dla szczeliny w postaci półpłaszczyzny (patrz np. Savruk, 1988). W miarę jednak oddalania się obciążenia skupionego w stronę przeciwnego frontu, dokładność rozwiązania maleje. Wyznaczane wartości współczynników K_I są zaniżone dla punktów frontu szczeliny bliskich miejscu przyłożenia siły P , natomiast są zawyżone dla punktów bardziej odległych. Interesujący jest fakt dokładnego spełnienia przez ten wzór warunku całkowego, odpowiadającego jednorodnemu obciążeniu powierzchni szczeliny siłami P wzdłuż prostej równoległej do obu frontów, dla którego znane jest ściśle rozwiązanie analityczne (zagadnienie płaskie).

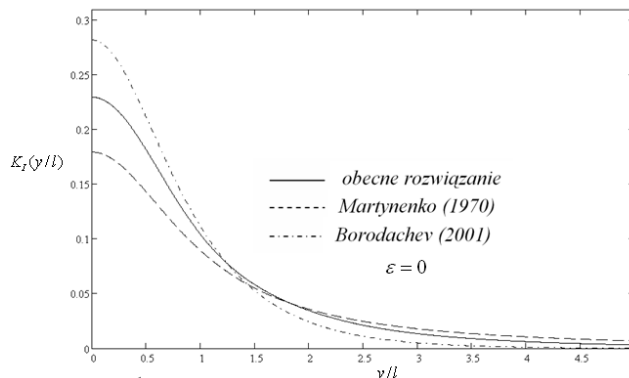
Borodachev (2001) opublikował alternatywną zależność

$$K_I^B = \frac{P}{2l\sqrt{\pi l}\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon\right)}{\cosh\left(\frac{\pi y}{2l}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon\right)}, \quad (55)$$

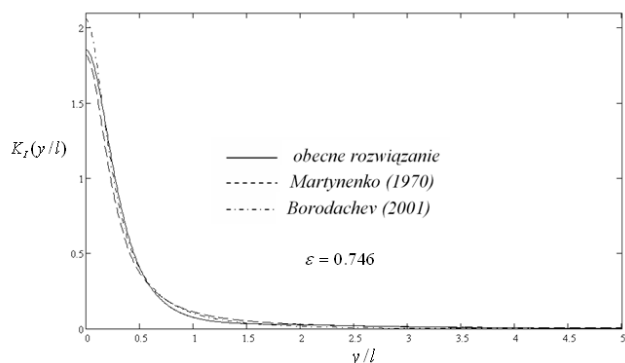
która również dokładnie spełnia wspomniany wyżej warunek całkowity, ale wartości współczynnika K_I w poszczególnych miejscach frontu szczeliny różnią się od rozwiązania Martynenki.



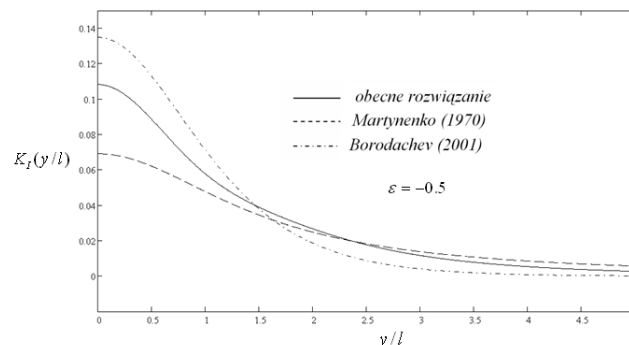
Rys. 5. Wartości współczynników K_I wzdłuż frontu szczeliny $x=l$ dla $\varepsilon=0,5$; $P=1$; $l=1$. Rozwiązanie obecne porównane ze wzorami Martynenki (1970) i Borodacheva (2001)



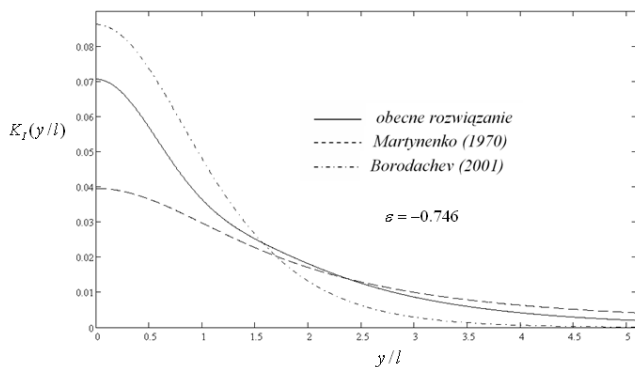
Rys. 6. Wartości współczynników K_I wzdłuż frontu szczeliny $x=\pm l$ dla $\varepsilon=0$; $P=1$; $l=1$. Rozwiązanie obecne porównane ze wzorami Martynenki (1970) i Borodacheva (2001)



Rys. 4. Wartości współczynników K_I wzdłuż frontu szczeliny $x=l$ dla $\varepsilon=0,746$; $P=1$; $l=1$. Rozwiązanie obecne porównane ze wzorami Martynenki (1970) i Borodacheva (2001)



Rys. 7. Wartości współczynników K_I wzdłuż frontu szczeliny $x=l$ dla $\varepsilon=-0,5$; $P=1$; $l=1$. Rozwiązanie obecne porównane ze wzorami Martynenki (1970) i Borodacheva (2001)



Rys. 8. Wartości współczynników K_I wzdłuż frontu szczeliny $x=l$ dla $\varepsilon=-0,746$; $P=1$; $l=1$. Rozwiązanie obecne porównane ze wzorami Martynenki (1970) i Borodacheva (2001)

We wszystkich przedstawionych przypadkach obecne rozwiązanie daje wyniki praktycznie pośrednie między rozwiązaniem Martynenki i Borodacheva. Wyraźnie widać, że wszystkie rozwiązania są zbieżne w miarę jak ε dąży do 1 (np. dla $\varepsilon=0,746$), co oznacza, że obciążenie położone jest blisko prawego frontu szczeliny. Natomiast im mniejsze są wartości parametru ε , uwidaczniają się znaczące różnice między poszczególnymi rozwiązaniami. Na uwagę zasługuje fakt, że same wartości K_I są wówczas znacznie mniejsze.

Dokładna analiza podanego obecnie rozwiązania pozwala stwierdzić, że ono również spełnia wspomniany wcześniej warunek całkowy. Interesujący jest fakt spełnienia tego warunku w przypadku wykorzystania w obliczeniach tylko pierwszego, przybliżonego rozwiązania analitycznego (15), bez uwzględniania funkcji poprawkowej.

8. PODSUMOWANIE

Za pomocą transformacji Fouriera, dwuwymiarowe różniczkowo-całkowe równanie dla przestrzeni sprężystej ze szczeliną tunelową znajdującą się pod dowolnym ciśnieniem, sprowadzono do jednowymiarowego osobliwego równania całkowego. Zamieniając jądro tego równania na jądro aproksymowane, otrzymano jego przybliżone analityczne rozwiązanie dla dowolnej prawej strony (dowolnego obciążenia powierzchni szczeliny), włączając obciążenia siłami skupionymi. Korzystając z rozwiązania dla sił skupionych i stosując metodę superpozycji, otrzymano równania z ciągłą prawą stroną, co umożliwia otrzymanie rozwiązania numerycznego.

Obliczono wartości współczynników intensywności naprężenia K_I wzdłuż obu frontów szczeliny tunelowej obciążonej na powierzchni parą sił skupionych P i porównano je z przybliżonymi rozwiązaniami podanymi przez Martynenkę (1970) oraz Borodacheva (2001). Względne różnice między tymi rozwiązaniami są coraz mniejsze w miarę zbliżania się obciążającej pary sił P do analizowanego frontu szczeliny (np. dla $\varepsilon=0,746$) i są tym większe, im bardziej zadana para sił oddala się od danego frontu i zbliża do frontu przeciwnego (np. dla $\varepsilon=-0,746$), jednak należy zwrócić uwagę, że wartości współczynników K_I w tym przypadku są małe.

LITERATURA

1. Averbuch A., Braverman E., Coifman R., Israeli M., Sidi A. (2000), Efficient Computation of Oscillatory Integrals via Adaptive Multiscale Local Fourier Bases, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 9, 19-53.
2. Borodachev N. M. (1998), A method of constructing a weight function for a body with a crack, *J. Appl. Math. Mech.*, 62, No 2, 303-307.
3. Borodachev N. M. (2001), Three-dimensional weight function for the problem of thermoelasticity for a striplike crack, *Strength Mater.*, 33, No 1, 74-80.
4. Brigham E. O. (1988), *The Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
5. Bueckner H. F. (1970), A novel principle for the computation of stress intensity factors., *ZAMM*, 50, No 9, 529-546.
6. Evans G. A., Webster J. R. (1997), A high order, progressive method for the evaluation of irregular oscillatory integrals, *Appl. Numer. Math.*, 23, 205-218.
7. Glinka G., Shen G. (1991), Universal features of weight functions for cracks in mode I, *Eng. Fract. Mech.*, 40, No 6, 1135-1146.
8. Harris D. O. (1973), Slicing procedure for approximate three-dimensional Green's functions for cracks in plates of finite thickness, *Int. J. Fract.*, 9, No 1, 21-32.
9. Ixaru L. G. (2001), Numerical operations on oscillatory functions, *Comput. Chem.*, 25, 39-53.
10. Ixaru L. Gr., Paternoster B. (2001), A Gauss quadrature rule for oscillatory integrands, *Comput. Phys. Comm.*, 133, 177-188.
11. Kim K. J., Cools R., Ixaru L. G. (2002), Quadrature rules using rst derivatives for oscillatory integrands, *J. Comput. Appl. Math.*, 140, 479-497.
12. Kuijpers A. H. W. M., Verbeek G., Verheij J. W. (1997), An improved acoustic Fourier boundary method using Fast Fourier transform integration, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 102, 1394-1401.
13. Milovanovic G. V. (1998), Numerical calculation of integrals involving oscillatory and singular kernels and some applications of quadratures, *Comput. Math. Appl.*, 36, No 8, 19-39.
14. Mofakhar A. A., Glinka G. (1992), Calculation of stress intensity factors by efficient integration of weight functions, *Eng. Fract. Mech.*, 43, 749-756.
15. Oore M., Burns D. J. (1980), Estimation of stress intensity factors for embedded irregular cracks subjected to arbitrary normal stress fields, *J. Press. Ves. Technol.*, 102, No 2, 202-211.
16. Ooura T., Mori M. (1999), A robust double exponential formula for Fourier type integrals, *J. Comput. Appl. Math.*, 112, 229-241.
17. Shah R. C., Kobayashi A. S. (1971), Stress intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading, *Eng. Fract. Mech.*, 3, No, 071-96.
18. Shu C., Chew Y. T. (1997), Fourier expansion-based differential quadrature and its application to Helmholtz eigenvalue problems., *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 13, 643-653.
19. Абрамовиц М., Стиган И. (Ред.) (1979), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, М.: Наука.
20. Бейтмен Г., Эрдейи А. (1969), *Таблицы интегральных преобразований*, М.: Наука.
21. Гольдштейн Р. В., Капцов А. В., Корельштейн Л. Б. (1984), Асимптотическое решение пространственных задач теории упругости о вытянутых плоских трещинах отрыва, *ПММ*, 48, No 5, 854-863.
22. Двайт Г. Б. (1973), *Таблицы интегралов и другие математические формулы*, М.: Наука.

23. **Задирака В. К.** (1983), *Теория вычисления преобразования Фурье*, К.: Наук. Думка.
24. **Кит Г. С., Побережный О. В.** (1992), *Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин*, К.: Наук. Думка.
25. **Крылов В. И., Скобля Н. С.** (1974), *Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа*, М.: Наука.
26. **Мартыненко М. Д.** (1970), Некоторые пространственные задачи о равновесии упругого тела, ослабленного трещиной, *ПМ*, 6, No 10, 84-88.
27. **Мухелишвили Н. И.** (1968), *Сингулярные интегральные уравнения*, М.: Наука.
28. **Панасюк В. В.** (1968), *Предельное равновесие хрупких тел с трещинами*, Киев: Наук. думка, 1968.
29. **Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.** (1976), *Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках*, Киев: Наук. думка, 1976.
30. **Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т.** (1984), *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции*, Киев: Наук. Думка.
31. **Саврук М. П.** (1988), *Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами*, *Механика разрушения и прочность материалов: Справочное пособие под общей редакцией Панасюка В.В. - Т.2.* - Киев: Наук. Думка.
32. **Снеддон И.** (1955), *Преобразования Фурье*, М.: ИЛ.

STRESS INTENSITY FACTORS K_I FOR A PLANE TUNNEL CRACK IN ELASTIC SPACE

Abstract: The present paper deals with determination of stress intensity factors K_I for a plane two-dimensional tunnel crack in elastic space when both crack faces are subjected to any normal pressure. Using the method of singular integral equations and numerical techniques Green's function was also obtained, which makes it possible to calculate values of stress intensity factors K_I at any point along both crack fronts. Approximate analytical solutions of high accuracy were found. Numerical values of K_I were compared with other solutions known from the literature, obtained by different authors.