

MODELOWANIE MATEMATYCZNE PROCESU WYRYWANIA ARKUSZA Z WARSTWY KLEJOWEJ GRZBIETU KSIĄŻKI

Yuriy PYRYEV*, Georgij PETRIASZWILI*

*Zakład Technologii Poligraficznych, Instytut Mechaniki i Poligrafii, Politechnika Warszawska, ul. Konwiktorska 2, 00-217 Warszawa

y.pyryev@wip.pw.edu.pl, j.petriaszwili@wip.pw.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono model matematyczny warstwy klejowej grzbietu oprawy, który uwzględnia parametry geometryczne oraz właściwości materiału kleju podczas otwarcia oprawy i wyrywania kartki z grzbietu wg metody Pull Test

1. OPRACOWANIE MODELU

1.1. Wstęp

Obecnie stosowane technologie oprawiania w poligrafii nastawione są w dużej mierze na wykorzystaniu metody klejowej, która polega na sfrezowaniu grzbietów składek w taki sposób aby klej, który наносzony jest w następnej kolejności, mógł połączyć wszystkie kartki wkładu. Łączenie klejowe, w porównaniu z innymi sposobami oprawiania, ma znaczne zalety techniczno-ekonomiczne: większa wydajność, mniejsza pracochłonność i niższe koszty wytwarzania. Różnorodność produkcji poligraficznej w ostatnich latach znacznie się zwiększyła. Stosowanie do procesu oprawiania nowych rodzajów klejów i gatunków papieru stwarza wiele problemów. Z powodu nieznanności w pełni wpływu parametrów procesu obróbki na wytrzymałość opraw klejowych częste są przypadki produkcji książek nietrwałych, nazywanych przez użytkowników „jednorazowymi”. Szczególnie niską wytrzymałością charakteryzują się oprawy intensywnie użytkowane, w tym podręczniki szkolne i akademickie.

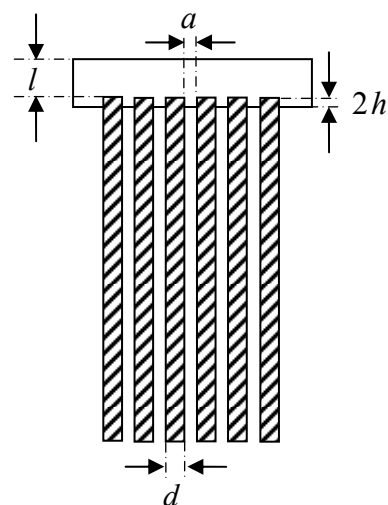
Nowa sytuacja na rynku wymusiła znaczny wzrost wymagań wydawców i konsumentów w zakresie jakości i wytrzymałości opraw. Jednym z parametrów oceny wytrzymałości opraw, uznawanym na rynku poligraficznym jako standardowy, jest wartość siły wyrywania arkusza z grzbietu książki. Parametr ten można otrzymać za pomocą specjalnych aparatów do testowania opraw, zasada których polega na pomiarze siły wyrywania pojedynczej kartki z oprawy (metoda Pull Test) (Petriaszwili, 2002). Niestety, aparaty do testowania różnych producentów charakteryzują się różnymi warunkami mocowania opraw i wyrywania arkuszy, co w znacznym stopniu przyczynia się do wadliwej oceny wytrzymałości opraw (Petriaszwili i Gawęł, 2003). Dla tego też, opracowanie podstaw teoretycznych oraz parametrów testowania opraw ma istotne znaczenie.

Celem pracy jest opracowanie modelu matematycznego wyrywania arkusza z grzbietu klejowej oprawy oraz ba-

danie wpływu różnych parametrów na wytrzymałość opraw.

1.2. Model klejowego połączenia arkuszy

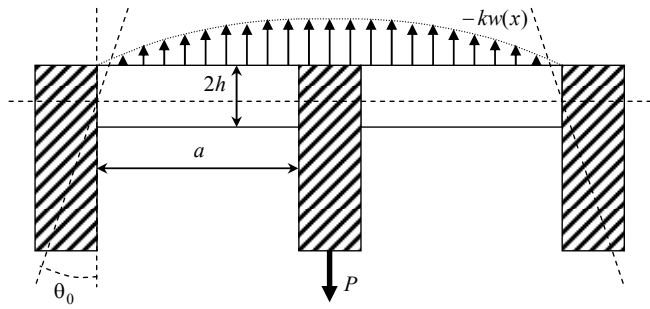
W niniejszej pracy zaproponowano matematyczny model do obliczeń naprężeń powstających w warstwie klejowej grzbietu podczas wyrywania kartki z grzbietu otwartej oprawy. Schemat klejowego połączenia arkuszy papieru w warstwie klejowej przedstawiono na Rys. 1, gdzie d – grubość arkusza papieru, l – grubość warstwy kleju na grzbiecie oprawy, a – odległość pomiędzy arkuszami, $2h$ – grubość warstwy kleju pomiędzy kartkami papieru. Pod czas badania książki na wytrzymałość zadaje się kąt otwarcia arkusze papieru $2\theta_0$ znajdujących cię po obu stron wyrywanego arkusza siłą P . Największe naprężenia powstają w warstwie klejowej pomiędzy arkuszami (Petriaszwili i Pyryew, 2007).



Rys. 1. Schemat klejowego połączenia arkuszy papieru

Przedmiotem rozważań w danym opracowaniu jest dwie warstwy kleju pomiędzy dwiema kartkami książki znajdu-

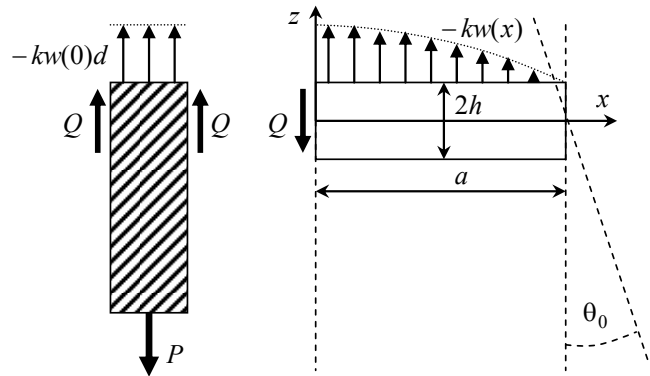
jące się w kontakcie z arkuszem, na który działa wyrywająca siła P (Rys. 2).



Rys. 2. Schemat modelu wyrywania arkusza

Uważa się, że warstwy kleju mają wymiary $a \times b \times 2h$, gdzie b – wysokość grzbietu oprawy i opierają się na sprężyste podłoże klejowe o grubości l . Przyjmujemy, że obciążenie $g(x)$ działające ze strony podłoża klejowego jest proporcjonalne wygięciu płyty $w(x)$ (model Winklera) i równe $g(x) = -kw(x)$ (Pisarenko i inni, 1986). Uwagę skupimy na wyznaczeniu pola naprężeń, które powstaje przy użytkowaniu oprawy, a mianowicie przy rozwarciu książki na kąt $2\theta_0$ (Petriaszwili i Pyrjew, 2008) i przyłożeniu siły P .

Z uwagi na symetrię zagadnienia rozpatrzono jedną warstwę i arkusz wyrywający (Rys. 3).



Rys. 3. Obliczeniowy schemat modelu wyrywania kartki papieru

W rozpatrywanym modelu wprowadzono założenia, że papier jest materiałem sztywnym, a klej jest jednorodnym izotropowym materiałem sprężystym o własnościach mechanicznych: E – moduł Younga, ν – współczynnik Poissona (Kornilow, 2001).

Równanie różniczkowe wygięcia warstwy kleju na sprężystym podłożu w postaci ugięcia prostokątnej wydłużonej płyty $w(x)$ (ugięcie po łuku) ma postać (Pisarenko i inni, 1986):

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 4\alpha^4 w(x) = 0 \quad (1)$$

gdzie: $4\alpha^4 = k/D$, $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$ – sztywność cylindryczna płyty.

Rozpatrywane zagadnienie sprowadza się do rozwiązania równania (1) z warunkami brzegowymi

$$w(x)|_{x=a} = 0, \quad -\frac{dw(x)}{dx}|_{x=a} = -\theta_0, \quad (2)$$

$$-\frac{dw(x)}{dx}|_{x=0} = 0, \quad -D\frac{d^3 w(x)}{dx^3}|_{x=0} = Q, \quad (3)$$

gdzie ścinająca siła Q związana z wyrywającą siłą P równaniem równowagi dla arkusza (Rys. 3)

$$P = 2Q - kw(0)d. \quad (4)$$

2. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

2.1. Obliczenie ugięcia i naprężeń w warstwie klejowej

Ogólne rozwiązanie równania (1) zapiszemy w postaci

$$w(x) = B_1 W_1(x) + B_2 W_2(x) + B_3 W_3(x) + B_4 W_4(x), \quad (5)$$

gdzie wprowadzone szczególne rozwiązania równania (1)

$$W_1(x) = \cosh(\alpha x) \cos(\alpha x), \quad (6)$$

$$W_2(x) = \frac{1}{2\alpha} (\cosh(\alpha x) \sin(\alpha x) + \sinh(\alpha x) \cos(\alpha x)), \quad (7)$$

$$W_3(x) = \frac{1}{2\alpha^2} \sinh(\alpha x) \sin(\alpha x), \quad (8)$$

$$W_4(x) = \frac{1}{4\alpha^3} (\cosh(\alpha x) \sin(\alpha x) - \sinh(\alpha x) \cos(\alpha x)), \quad (9)$$

Cztery niewiadomych B_1, B_2, B_3, B_4 znajdujemy wykorzystując cztery warunki brzegowych (2), (3).

Ostatecznie rozwiązanie rozpatzonego zagadnienia zapiszemy w postaci

$$w(x) = + \frac{(-PZ_1(\alpha a) - 2D\theta_0 W_3(a))W_1(x)}{d k Z_1(\alpha a) + 2DZ(\alpha a)} + \frac{(PZ_2(\alpha a) + 2D\theta_0 W_1(a) - d k \theta_0 W_4(a))W_3(x)}{d k Z_1(\alpha a) + 2DZ(\alpha a)} - \frac{(PZ(\alpha a) - d k \theta_0 W_3(a))W_4(x)}{d k Z_1(\alpha a) + 2DZ(\alpha a)} \quad (10)$$

gdzie

$$Z(\alpha a) = \frac{\sin(2\alpha a) + \sinh(2\alpha a)}{4\alpha}, \quad (11)$$

$$Z_1(\alpha a) = \frac{\cos(2\alpha a) + \cosh(2\alpha a) - 2}{16\alpha^4}, \quad (12)$$

$$Z_2(\alpha a) = \frac{\cos(2\alpha a) - \cosh(2\alpha a)}{8\alpha^2}, \quad (13)$$

Siła poprzeczna została zapisana w postaci

$$Q(x) = -D \frac{4\alpha^4(-PZ_1(\alpha a) - 2D\theta_0 W_3(a))W_2(x)}{dk Z_1(\alpha a) + 2DZ(\alpha a)} + D \frac{4\alpha^4(PZ_2(\alpha a) + 2D\theta_0 W_1(a) - dk\theta_0 W_4(a))W_4(x)}{dk Z_1(\alpha a) + 2DZ(\alpha a)} - D \frac{(PZ(\alpha a) - dk\theta_0 W_3(a))W_1(x)}{dk Z_1(\alpha a) + 2DZ(\alpha a)} \quad (14)$$

Naprężenia normalne ($\sigma_y = \nu \sigma_x$) i styczne w przekroju warstwy klejowej obliczamy według wzorów

$$\sigma_x(x) = \frac{3z}{2h^3} M_x(x), \quad \sigma_{xz}(x) = \frac{3Q(x)}{4h^3} [h^2 - z^2] \quad (15)$$

gdzie moment zginający ma postać:

$$M_x(x) = +D \frac{4\alpha^4(-PZ_1(\alpha a) - 2D\theta_0 W_3(a))W_3(x)}{dk Z_1(\alpha a) + 2DZ(\alpha a)} - D \frac{(PZ_2(\alpha a) + 2D\theta_0 W_1(a) - dk\theta_0 W_4(a))W_1(x)}{dk Z_1(\alpha a) + 2DZ(\alpha a)} + D \frac{(PZ(\alpha a) - dk\theta_0 W_3(a))W_2(x)}{dk Z_1(\alpha a) + 2DZ(\alpha a)} \quad (16)$$

2.2. Obliczenie naprężeń w warstwie klejowej grzbietu oprawy

Według przyjętej modeli otrzymano naprężenie normalne $\sigma_z = -kw(0)$ powstające w warstwie klejowej grzbietu oprawy w miejscu styku z wyrywana kartką papieru

$$\sigma_z = -k \frac{-PZ_1(\alpha a) - 2D\theta_0 W_3(a)}{dk Z_1(\alpha a) + 2DZ(\alpha a)}, \quad (17)$$

W pracy wykorzystana hipoteza największej energii odkształcenia czysto postaciowego (energetyczna hipoteza wytrzymałościowa Hubera-Misesa-Hency)

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\sigma_{xz}^2} \leq [\sigma], \quad (18)$$

gdzie $[\sigma]$ – naprężenie dopuszczalne.

2.3. Bezwymiarowa postać naprężeń w warstwie klejowej

Wprowadzimy bezwymiarowe współrzędne

$$\xi = x/a, \quad 0 < \xi < 1, \quad \zeta = z/a, \quad -H < \zeta < H, \quad (19)$$

i bezwymiarowe funkcji poszukiwane, a same ugięcie, moment gnący i siłę tnącą (siłę poprzeczną)

$$w(\xi) = \frac{w(\xi a)}{a}, \quad m_x(\xi) = \frac{M_x(\xi a)}{Da^{-1}}, \quad q(\xi) = \frac{Q(\xi a)}{Da^{-2}}, \quad (20)$$

oraz bezwymiarowe parametry

$$\Lambda = \alpha a, \quad \delta = \frac{d}{a}, \quad H = \frac{h}{a}, \quad q = \frac{Qa^2}{D}, \quad p = \frac{Pa^2}{2D}. \quad (21)$$

$$\sigma_* = (1 - \nu^2)[\sigma]/E, \quad \sigma_k = (1 - \nu^2)\sigma_z/E. \quad (22)$$

Bezwymiarowe rozwiązanie zagadnienia (1)-(4) ma postać

$$w(\xi) = -pw_p(\xi) - \theta_0 w_\theta(\xi) \quad (23)$$

gdzie

$$w_p(\xi) = (Z_1^* w_1(\xi) - Z_2^* w_3(\xi) + Z^* w_4(\xi)) / z^* \quad (24)$$

$$w_\theta(\xi) = \left\{ w_3^* w_1(\xi) - w_1^* w_3(\xi) + 2\delta \Lambda^4 (w_4^* w_3(\xi) - w_3^* w_4(\xi)) \right\} / z^* \quad (25)$$

$$w_1(\xi) = \cosh(\Lambda \xi) \cos(\Lambda \xi), \quad (26)$$

$$w_2(\xi) = \frac{1}{2\Lambda} (\cosh(\Lambda \xi) \sin(\Lambda \xi) + \sinh(\Lambda \xi) \cos(\Lambda \xi)), \quad (27)$$

$$w_3(\xi) = \frac{1}{2\Lambda^2} \sinh(\Lambda \xi) \sin(\Lambda \xi), \quad (28)$$

$$w_4(\xi) = \frac{1}{4\Lambda^3} (\cosh(\Lambda \xi) \sin(\Lambda \xi) - \sinh(\Lambda \xi) \cos(\Lambda \xi)), \quad (29)$$

$$w_1^* = \cosh(\Lambda) \cos(\Lambda), \quad (30)$$

$$w_2^* = \frac{1}{2\Lambda} (\cosh(\Lambda) \sin(\Lambda) + \sinh(\Lambda) \cos(\Lambda)), \quad (31)$$

$$w_3^* = \frac{1}{2\Lambda^2} \sinh(\Lambda) \sin(\Lambda), \quad (32)$$

$$w_4^* = \frac{1}{4\Lambda^3} (\cosh(\Lambda) \sin(\Lambda) - \sinh(\Lambda) \cos(\Lambda)) \quad (33)$$

$$z^* = 2\delta \Lambda^4 Z_1^* + Z^*, \quad (34)$$

$$Z^* = \frac{1}{4\Lambda} (\sinh(2\Lambda) + \sin(2\Lambda)), \quad (35)$$

$$Z_1^* = \frac{1}{16\Lambda^4} (\cosh(2\Lambda) + \cos(2\Lambda) - 2), \quad (36)$$

$$Z_2^* = \frac{1}{8\Lambda^2} (\cosh(2\Lambda) - \cos(2\Lambda)), \quad (37)$$

Zostało zapisano bezwymiarowe naprężenie powstające w warstwie klejowej grzbietu oprawy w miejscu styku z wyrywana kartką papieru

$$\sigma^* = -\frac{8}{3} \Lambda^4 H^3 \frac{pZ_1^* - \theta_0 w_3^*}{z^*}, \quad (38)$$

2.4. Warunek wytrzymałościowy

Warunek wytrzymałościowy według przyjętej hipotezy Hubera przyjmie postać bezwymiarową

$$\sigma_i \leq \sigma_*, \quad (39)$$

$$\sigma_i = \sqrt{(1 - \nu + \nu^2)\zeta^2 m_x^2(\xi) + \frac{3}{4}(H^2 - \zeta^2)^2 q^2(\xi)}, \quad (40)$$

gdzie $q(\xi) = d^3 w(\xi)/d\xi^3$, $m_x(\xi) = -d^2 w(\xi)/d\xi^2$.

Warunek (39) w punktach niebezpiecznych znajdujących się na powierzchni $\xi = 0$ daje możliwość wyznaczyć bezwymiarową dopuszczalną siłę wyrywającą

$$P_{\max} = \frac{\theta_0 B + \sqrt{AX^2 + \theta_0^2(B^2 - AC)}}{A}, \quad (41)$$

gdzie

$$A = A_m^2 \nu_1 \zeta^2 + A_q^2 \frac{3}{4} H_\zeta, \quad \nu_1 = 1 - \nu + \nu^2, \quad (42)$$

$$B = A_m B_m \nu_1 \zeta^2 + A_q B_q \frac{3}{4} H_\zeta, \quad H_\zeta = (H^2 - \zeta^2)^2, \quad (43)$$

$$C = B_m^2 \nu_1 \zeta^2 + B_q^2 \frac{3}{4} H_\zeta, \quad X = z^* \sigma_*, \quad A_m = -Z_2^*, \quad (44)$$

$$B_m = -2\delta\Lambda^4 w_4^* + w_1^*, \quad A_q = -Z^*, \quad B_q = -2\delta\Lambda^4 w_3^*. \quad (45)$$

Przy $\theta_0 = 0$ dopuszczalna siła będzie największa

$$P_{\max} = \frac{X}{\sqrt{A}}, \quad (46)$$

Zwiększenie kąta θ_0 prowadzi do zmniejszenia P_{\max} według wzoru (41).

Dla małej wartości parametru Λ dopuszczalna siła ma postać

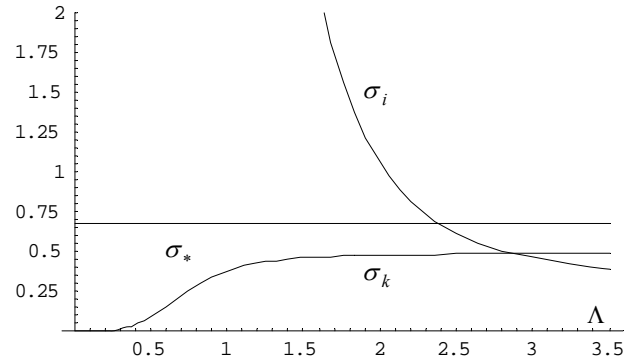
$$P_{\max} = \frac{2}{3H_\zeta + \zeta^2 \nu_1} \left(-\zeta^2 \nu_1 \theta_0 + \sqrt{(3H_\zeta + \zeta^2 \nu_1)\sigma_*^2 - 3\zeta^2 H_\zeta \nu_1 \theta_0^2} \right) + O(\Lambda^4) \quad (47)$$

Warunek wytrzymałościowy w warstwie klejowej grzbietu oprawy w miejscu styku z wyrywającą kartką papieru według przyjętej hipotezy Hubera daje ograniczenie na siłę wyrywania

$$p \leq \frac{3X}{8\Lambda^4 H^3 Z_1^*} - \theta_0 \frac{w_3^*}{Z_1^*}, \quad (48)$$

Na Rys. 4 przedstawiono zależność bezwymiarowej intensywności naprężeń σ_i , bezwymiarowego naprężenia w warstwie kleju na końcu kartki papieru σ_k i bezwymiarowego dopuszczalnego naprężenia σ_* od parametru Λ dla parametrów $\zeta = -0.21$, $\zeta = 0$, $\delta = 20$, $2\theta_0 = 80^\circ$, $H = 0.25$, $p_e = 481.37$, $\sigma_* = 0.677$.

Takim parametrom odpowiadają następujące wartości: $P = 400 N \cdot m^{-1}$, $a = 0.01 \cdot 10^{-3} m$, $h = 0.0025 \cdot 10^{-3} m$, $d = 0.02 \cdot 10^{-3}$, $\nu = 0.35$, $E = 3,5 \cdot 10^6 N \cdot m^{-2}$, $[\sigma] = 2.7 MPa$, $D = 4,15 \cdot 10^{-11} N \cdot m$.



Rys. 4. Zależność bezwymiarowych intensywności naprężeń σ_i , naprężenia w warstwie kleju na końcu karki papieru σ_k i dopuszczalnego naprężenia σ_* od parametru Λ .

3. WNIOSKI

Rozwiązanie według założonej liniowości zagadnienia zależy w sposób liniowy od parametrów p i θ_0 . Bezwymiarowa postać rozwiązania zależy również od bezwymiarowych geometrycznych parametrów δ , H i parametru fizycznego geometrycznego Λ .

Z obliczeń przedstawionych na Rys. 4 wynika, że punkty niebezpieczne znajdują się na powierzchni $x = 0$ dla parametru $\Lambda < \Lambda_{kr}$. W miejscu styku wyrywającego arkusza z warstwą klejową grzbietu oprawy zawsze jest spełniony warunek wytrzymałościowy $\sigma_k < \sigma_*$.

Przeprowadzona analiza teoretyczna umożliwiła prowadzić symulacje numeryczną badań wytrzymałości opraw na etapie projektowania książek.

LITERATURA

1. Kornilow I. K. (2001), *Proektirovanie kniznykh konstruktsii*, MGUP, Moskwa.
2. Pisarenko G. S., Agaew W. A., Kwitka A. L., Popkow W. G., Umanskiy E. S. (1986), *Soprotivlenie materialow*, Wyšča škola, Kiew.
3. Petriaszwili G. (2002), Ocena wytrzymałości opraw łączonych klejowo, *Wydawca*, № 1, 50 – 53.
4. Petriaszwili G., Gawel J. (2003), Jakość łączenia klejowego. Metody badań i aparatura do oceny wytrzymałości opraw bezszyciowych, *Świat druku*, № 4, 66 – 68.
5. Petriaszwili G., Pyrjew Yu. (2007), An analysis of the tensions in adhesive layer during books operational use, *VIII Seminar in Graphic Arts, Conference Proceeding, University Pardubice*, 193-197.
6. Petriaszwili G., Pyrjew Yu. (2008), Analysis of a model of the adhesive layer between two sheets of paper, *Journal of Vibroengineering*, Vol.10, No 3, 282-284.

MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS OF PULLING OUT THE SHEET FROM THE BOOK SPINE ADHESIVE LAYER

Abstract: The research study proposed spine adhesive layer model with the paper pages which represents the actual geometry and material properties of the spine during opening and testing the book by Pull Test method.