

ZAGADNIENIE KONTAKTOWE Z UWZGLĘDNIENIEM WYTWARZANIA CIEPŁA DLA PÓLPRZESTRZENI KOMPOZYTOWEJ O STRUKTURZE PERIODYCZNEJ O BRZEGU PROSTOPADŁYM DO UWARSTWIENIA

Dariusz M. PERKOWSKI*, Roman KULCHYTSKY-ZHYHAIŁO*, Stanisław J. MATYSIAK*

*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

d.perkowski@pb.edu.pl, ksh@pb.edu.pl, s.j.matysiak@uw.edu.pl

Streszczenie: W pracy rozpatrzono zagadnienie kontaktowe dla półprzestrzeni kompozytowej z uwzględnieniem wytwarzania ciepła. Ośrodek materialny jest kompozytem warstwowym składającym się z dwuskładnikowych liniowo-termosprężystych lamin powtarzających się periodycznie a brzeg ciała jest prostopadły do uwarstwienia. Nieodkształcalny stempel o przekroju parabolicznym porusza się ze stałą prędkością powodując wytwarzanie ciepła na skutek tarcia, które opisano prawem Coulomba. Ponadto założono, że stempel jest izolatorem cieplnym a całe ciepło przejmowane jest przez półprzestrzeń kompozytową. Poza strefą kontaktu założono brak obciążeń zewnętrznych oraz zerową temperaturę. Sformułowane zagadnienie rozwiązano w ramach modelu homogenizowanego z parametrami mikrolokalnymi, Woźniak (1987), Matysiak i Woźniak (1988).

1. WPROWADZENIE

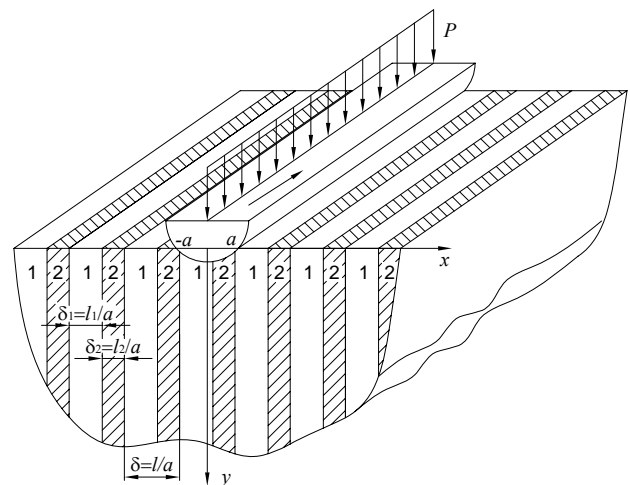
Elementy konstrukcyjne pracujące w kontakcie ze sobą narażone są na oddziaływanie wysokich nacisków kontaktowych. Modelowanie takich zagadnień jest bardzo ważne z punktu widzenia inżynierskiego. Problemy te badane były przez wielu badaczy, możemy tu przedstawić kilka publikacji dotyczących modelowania zagadnień kontaktowych w ramach teorii sprężystości: Fabrikant (1991), Galin (1980), Gladwell (1980), Goryacheva i Dobykhin (1988), Johnson (1985). Ośrodki anizotropowe były badane między innymi przez np. Willsa (1966), Hwu i Fana (1998), Rogowskiego (1982) oraz Liao (2001).

Zagadnienia kontaktowe dla kompozytów warstwowych o strukturze periodycznej z brzegiem równoległym do uwarstwienia, rozwiązywanych w ramach modelu homogenizowanego, możemy znaleźć w pracach Kaczyńskiego i Matysiaka (1988, 1993, 2001), Kulchytsky'ego-Zhyhailo i Matysiaka (1995), Matysiaka i Pauka (1995), Kulchytsky'ego-Zhyhailo i Kołodziejczyka (2004), Kołodziejczyka (2008). Należy tu wspomnieć, że w pracach Kulchytsky'ego-Zhyhailo i Kołodziejczyka (2004) oraz Kołodziejczyka (2008) przedstawiono porównanie rozwiązań otrzymanych na drodze klasycznego podejścia jakim jest teoria sprężystości z rozwiązaniem otrzymanym w ramach modelu homogenizowanego. Autorzy na podstawie przeprowadzonych badań wykazali, że model homogenizowany daje dostatecznie dobre przybliżenie w przypadku, gdy bezwymiarowa grubość komórki periodyczności odniesiona do charakterystycznego liniowego wymiaru strefy kontaktu jest mała (rzędu 0.1). Dla większych grubości warstwy podstawowej zagadnienie należy rozpatrywać zastępując kompozyt ośrodkiem zbudowanym z pewnej ilości oddzielnych komórek periodyczności połączonych z

ośrodkiem homogenizowanym. Wyżej wymienione prace dotyczą kompozytów warstwowych o brzegu równoległym do uwarstwienia. W literaturze brakuje rozwiązań dla przypadków kompozytów o brzegach prostopadłych do uwarstwienia. Niniejsza praca stanowi pewną próbę wypełnienia tej luki.

1.1. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy dwuwymiarowe zagadnienia kontaktowe z uwzględnieniem wytwarzania ciepła na skutek tarcia pod poruszającym się stemplem. Schemat zagadnienia przedstawiono na Rys. 1.



Rys. 1. Schemat rozpatrywanego zagadnienia kontaktowego z generacją ciepła

Stempel wciskany jest w ośrodek warstwowy o strukturze periodycznej siłą o intensywności P i porusza się ze stałą prędkością v_{st} w kierunku osi Oz . Uwzględniane tarcie opiszemy prawem Coulomba.

Zakładamy ponadto, że ciepło powstałe w wyniku tarcia przejmowane jest tylko przez jedno ciało, a mianowicie przez półprzestrzeń kompozytową. Opisany wyżej problem prowadzi do stacjonarnego płaskiego stanu odkształcenia. Do rozwiązania zastosujemy model homogenizowany z parametrami mikrolokalnymi Woźniak (1987), Matysiak i Woźniak (1987). Podobnie jak w pracy Perkowski inni (2007) wykorzystane będą uśrednione warunki brzegowe na naprężenia $\sigma_{yy}^{(j)}$ oraz składową strumienia wektora $q^{(j)}(x)$ ciepła w kierunku osi Oy . Zakładamy ponadto, że uśredniony strumień ciepła $q(x)$ w kierunku Oy jest proporcjonalny do uśrednionego ciśnienia kontaktowego $p(x)$, co można zapisać następująco

$$q(x) = f v_{st} p(x), \quad (1)$$

gdzie f jest współczynnikiem tarcia. Ze względu na przyjęte wyżej założenia zagadnienie sprowadza się do dwuwymiarowego dla półpłaszczyzny.

2. MODEL HOMOGENIZOWANY

Ograniczymy się tu do omówienia modelu homogenizowanego z parametrami mikrolokalnymi dla płaskich stacjonarnych zagadnień termosprężystości. Wektor przemieszczeń \mathbf{u} , w przypadku płaskiego stanu odkształcenia, oraz temperatura mają następujące składowe:

$$\mathbf{u}(x, y) = (\hat{u}(x, y), \hat{v}(x, y), 0), \quad T = T(x, y). \quad (2)$$

Rozkład przemieszczeń oraz pole temperatur przewidujemy w następującej postaci (Matysiak i Woźniak (1987), Kaczyński i Matysiak):

$$\hat{u}(x, y) = U(x, y) + \underline{h(x)p(x, y)}, \quad (3)$$

$$\hat{v}(x, y) = V(x, y) + \underline{h(x)q(x, y)}, \quad (4)$$

$$T(x, y) = \mathcal{G}(x, y) + \underline{h(x)\gamma(x, y)}. \quad (5)$$

Funkcje $U(x, y)$, $V(x, y)$ i $\mathcal{G}(x, y)$ są niewiadomymi funkcjami reprezentującymi odpowiednio makroprzemieszczenia oraz makrotemperaturę. Nieznane są także funkcje $p(x, y)$, $q(x, y)$ i $\gamma(x, y)$ zwane parametrami mikrolokalnymi lub korektorami. Funkcja $h(x)$ jest l -periodyczną funkcją kształtu tak dobraną, by spełnione były warunki idealnego kontaktu mechanicznego oraz termicznego. Funkcja kształtu $h(x)$ w przypadku kompozytów dwuskładnikowych dana jest a priori wzorem (Kaczyński i Matysiak (1988)):

$$h(x) = \begin{cases} x - 0,5l_1 & \text{dla } 0 \leq x \leq l_1, \\ -\eta x / (1 - \eta) - 0,5l_1 + l_1 / (1 - \eta) & \text{dla } l_1 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (6)$$

$$h(x + l) = h(x), \quad (7)$$

gdzie: $\eta = l_1 / l$ jest współczynnikiem nasycenia warstwy podstawowej warstwą pierwszego rodzaju o grubości l_1 . Funkcja kształtu dana wzorem (6) została tak dobrana, aby spełnić warunki ciągłości.

Równania modelu homogenizowanego z parametrami mikrolokalnymi mają postać (Kaczyński i Matysiak (1988)):

$$A_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (B + C) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - K_1 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

$$A_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (B + C) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

$$\hat{K} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} = 0. \quad (10)$$

gdzie $\hat{K} = K / \tilde{k}$. Procedura homogenizacji pozwala nam także wyznaczyć stałe materiałowe występujące w powyższych równaniach (tzw. moduły efektywne):

$$A_1 = \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}{(1 - \eta)(\lambda_1 + 2\mu_1) + \eta(\lambda_2 + 2\mu_2)} > 0, \quad (11)$$

$$A_2 = A_1 + \frac{4\eta(1 - \eta)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2)}{(1 - \eta)(\lambda_1 + 2\mu_1) + \eta(\lambda_2 + 2\mu_2)} > 0, \quad (12)$$

$$B = \frac{(1 - \eta)\lambda_2(\lambda_1 + 2\mu_1) + \eta\lambda_1(\lambda_2 + 2\mu_2)}{(1 - \eta)(\lambda_1 + 2\mu_1) + \eta(\lambda_2 + 2\mu_2)} > 0, \quad (13)$$

$$C = \frac{\mu_1\mu_2}{(1 - \eta)\mu_1 + \eta\mu_2} > 0, \quad (14)$$

$$K_1 = \frac{(1 - \eta)\beta_2(\lambda_1 + 2\mu_1) + \eta\beta_1(\lambda_2 + 2\mu_2)}{(1 - \eta)(\lambda_1 + 2\mu_1) + \eta(\lambda_2 + 2\mu_2)} > 0, \quad (15)$$

$$K_2 = \frac{\eta\beta_1\lambda_2 + (1 - \eta)\beta_2\lambda_1}{(1 - \eta)(\lambda_1 + 2\mu_1) + \eta(\lambda_2 + 2\mu_2)} + \frac{2(\eta\mu_2 + (1 - \eta)\mu_1)(\eta\beta_1 + (1 - \eta)\beta_2)}{(1 - \eta)(\lambda_1 + 2\mu_1) + \eta(\lambda_2 + 2\mu_2)} > 0, \quad (16)$$

$$K = \frac{k_1 k_2}{(1 - \eta)k_1 + \eta k_2} > 0. \quad (17)$$

Tu $\lambda_i, \mu_i, i=1,2$, są stałymi Lamego, k_i są współczynnikami przewodnictwa ciepła, β_i są stałymi termomechanicznymi poszczególnych warstw. Składowe tensora naprężenia obliczamy ze wzorów:

$$\sigma_{xx}^{(j)} = A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial V}{\partial y} - K_1 \mathcal{G}, \quad (18)$$

$$\sigma_{xy}^{(j)} = C \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad (19)$$

$$\sigma_{yy}^{(j)} = D_j \frac{\partial U}{\partial x} + E_j \frac{\partial V}{\partial y} - F_j \vartheta, \quad (20)$$

$$\sigma_{zz}^{(j)} = \frac{\lambda_j}{2(\lambda_j + \mu_j)} (\sigma_{xx}^{(j)} + \sigma_{yy}^{(j)}) - \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j} \beta_j \vartheta, \quad j = 1, 2, \quad (21)$$

gdzie:

$$D_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_j + 2\mu_j} A_1, \quad E_j = \frac{4\mu_j(\lambda_j + \mu_j)}{\lambda_j + 2\mu_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_j + 2\mu_j} B, \quad (22)$$

$$F_j = \frac{2\beta_j \mu_j}{\lambda_j + 2\mu_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_j + 2\mu_j} K_1, \quad j = 1, 2. \quad (23)$$

Składowe wektora strumienia ciepła obliczamy ze wzoru:

$$\mathbf{q}^{(j)}(x, y) = \left(-K \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, -k_j \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, 0 \right), \quad j = 1, 2. \quad (24)$$

Na brzegu półpłaszczyzny kompozytowej rozpatrzmy następujące warunki brzegowe:

$$\frac{\partial V(x, 0)}{\partial x} = -\frac{x}{R}, \quad |x| < a, \quad (25)$$

$$\left\langle \sigma_{yy}^{(j)}(x, 0) \right\rangle = B \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial V}{\partial y} - K_2 \vartheta = 0, \quad |x| > a, \quad (26)$$

$$\sigma_{xy}^{(j)}(x, 0) = 0, \quad x \in R, \quad (27)$$

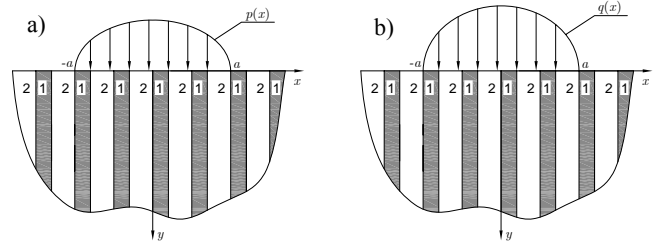
$$\left\langle q_y^{(j)}(x, 0) \right\rangle = -\tilde{k} \frac{\partial \vartheta(x, 0)}{\partial y} = f_{vs} p(x), \quad |x| < a, \quad (28)$$

$$\vartheta(x, 0) = 0, \quad |x| > a. \quad (29)$$

Przyjęliśmy tu paraboliczny kształt stępła (równanie (25)). Warunek brzegowy (29) może być zastąpiony bardziej ogólnym, uśrednionym warunkiem konwektywnej wymiany ciepła z otoczeniem. Ponadto w dalszych obliczeniach uwzględnione zostaną warunki wypromieniowania w nieskończoności

$$\sigma_{xx}^{(j)}, \sigma_{xy}^{(j)}, \sigma_{yy}^{(j)}, \vartheta \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Głównym celem w sformułowanym wyżej zagadnieniu kontaktowym jest wyznaczenie nieznanego ciśnienia kontaktowego, gdyż jego znajomość pozwoli na wyznaczenie rozkładów przemieszczeń, temperatury, naprężeń i strumieni ciepła w periodycznie uwarstwionej półpłaszczyźnie. Ze względu na mieszane warunki brzegowe (25) – (26) na ciśnienie kontaktowe $p(x)$ wyprowadzone zostanie równanie całkowe. W tym celu zagadnienie kontaktowe zastąpimy zagadnieniem termosprężystości związanym z obciążeniem półprzestrzeni nieznanym ciśnieniem $p(x)$ i nagrzewaniem jej strumieniem ciepła $q(x)$. Ponieważ zagadnienie to jest liniowe, jego rozwiązanie podamy w postaci superpozycji (patrz Rys. 2).



Rys. 2. Schemat zastępczych zagadnień brzegowych

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

3.1. Zagadnienie pomocnicze „a”

Jest to izotermiczne zagadnienie półpłaszczyzny periodycznie warstwowej o brzegu prostopadłym do uwarstwienia obciążonej prostopadle do brzegu obciążeniem o intensywności $p(x)$ na odcinku $(-a, a)$, patrz Rys. 2a. Rozpatrujemy więc następujące warunki brzegowe

$$\left\langle \sigma_{yy}^{(j,a)}(x, 0) \right\rangle = B \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x} + A_2 \frac{\partial V^{(a)}}{\partial y} = -p(x) H(a - |x|), \quad (31)$$

$$\sigma_{xy}^{(j,a)}(x, 0) = 0, \quad x \in R, \quad (32)$$

i warunki wypromieniowania w nieskończoności $\left\langle \sigma_{ij} \right\rangle \rightarrow 0$ dla $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$. To zagadnienie zostało rozwiązane stosując metodę transformacji całkowej Fouriera a równanie na makroprzemieszczenia zostały rozseparowane wprowadzając potencjały sprężyste przemieszczenia zaproponowane w pracy Kulczyckiego i Matysiaka (2001). Składowe tensora naprężenia w przestrzeni transformatał mają postać:

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_{xx}^{(j,a)}(x, y) \\ \sigma_{yy}^{(j,a)}(x, y) \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left\{ \begin{matrix} \tilde{\sigma}_{xx}^{p(j)}(s, y) \\ \tilde{\sigma}_{yy}^{p(j)}(s, y) \end{matrix} \right\} \tilde{p}(s) \cos(xs) ds, \quad (33)$$

$$\sigma_{xy}^{(j,a)}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{\sigma}_{xy}^{p(j)}(s, y) \tilde{p}(s) \sin(xs) ds, \quad j = 1, 2, \quad (34)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx}^{p(j)}(s, y) &= \\ &= \frac{B + C}{(\gamma_1 - \gamma_2) C} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \frac{\gamma_{3-k} (\gamma_k^2 B - \kappa_k A_1)}{(A_2 \gamma_k^2 + B)} \exp(-|s| \gamma_k y), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{yy}^{p(j)}(s, y) &= \frac{B + C}{(\gamma_1 - \gamma_2) C} \times \\ &\times \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \frac{\gamma_{3-k} (\gamma_k^2 E_j - \kappa_k D_j)}{(A_2 \gamma_k^2 + B)} \exp(-|s| \gamma_k y), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xy}^{p(j)}(s, y) &= \\ &= \frac{B + C}{\gamma_1 - \gamma_2} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \frac{\gamma_k \gamma_{3-k} (1 + \kappa_k)}{(A_2 \gamma_k^2 + B)} \exp(-|s| \gamma_k y), \end{aligned} \quad (37)$$

gdzie funkcja $\tilde{p}(s)$ jest transformacją kosinusową funkcji $p(x)$:

$$\tilde{p}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a p(x) \cos(xs) dx. \quad (38)$$

3.2. Zagadnienie pomocnicze „b”

Jest to problem nieobciążonej półpłaszczyzny termosprężystej periodycznie uwarstwionej, na brzegu której działa strumień ciepła w kierunku osi Oy , (Rys. 2b). Warunki brzegowe przyjmujemy w postaci:

$$\langle \sigma_{yy}^{(j,b)}(x, 0) \rangle = 0, \quad x \in R, \quad (39)$$

$$\sigma_{xy}^{(j,b)}(x, 0) = 0, \quad x \in R, \quad (40)$$

$$\langle q_y^{(j,b)}(x, 0) \rangle = -\tilde{k} \frac{\partial \vartheta(x, 0)}{\partial y} = f v_{st} p(x), \quad |x| < a, \quad (41)$$

$$\vartheta(x, 0) = 0, \quad |x| > a. \quad (42)$$

Ponadto zakładamy, że zarówno naprężenia jak i temperatura zanikają w nieskończoności. Równania, które rozwiązujemy, stanowią układ równań modelu homogenizowanego z parametrami mikrolokalnymi (8) – (9). Szczegółne rozwiązanie tego układu poszukujemy za pomocą potencjału termosprężystego Φ :

$$U^{(1)} = \chi \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V^{(1)} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (43)$$

co prowadzi do układu równań

$$\hat{K} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Lambda \vartheta, \quad (45)$$

gdzie

$$\chi = \frac{K_1(C - \hat{K}A_2) + K_2\hat{K}(B + C)}{K_2(A_1 - \hat{K}C) - K_1(B + C)}, \quad (46)$$

$$\Lambda = \frac{K_2(A_1 - \hat{K}C) - K_1(B + C)}{A_2C\hat{K}^2 + (B^2 + 2BC - A_1A_2)\hat{K} + A_1C}. \quad (47)$$

Z równań (8), (9) i (10) wynika, że makrotemperatura ϑ i potencjał termosprężysty Φ spełniają identyczne równanie. Zastosujemy teraz metodę transformacji całkowej Fouriera do rozwiązania zagadnienia pomocniczego „b”. Z równania (16) wynika

$$-\hat{K}s^2 \tilde{\vartheta} + \frac{\partial^2 \tilde{\vartheta}}{\partial y^2} = 0, \quad (48)$$

zatem transformata makrotemperatury ma postać:

$$\tilde{\vartheta} = \tilde{\vartheta}_0(s) \exp(-\sqrt{\hat{K}}|s|y). \quad (49)$$

Spełniając warunki brzegowe (39) – (42) oraz warunki wypromieniowania w nieskończoności otrzymujemy rozwiązanie problemu „b” (patrz Rys. 2b)

$$\begin{aligned} U^{(b)}(x, y) &= \\ &= -\chi \Lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{\vartheta}_0(s)}{s} \exp(-\sqrt{\hat{K}}|s|y) \sin(xs) ds + \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^2 \kappa_i \Lambda_i \int_0^\infty \frac{\tilde{\vartheta}_0(s)}{s} \exp(-|s|\gamma_i y) \sin(xs) ds, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} V^{(b)}(x, y) &= \\ &= \Lambda \sqrt{\hat{K}} \int_0^\infty \frac{\tilde{\vartheta}_0(s)}{|s|} \exp(-\sqrt{\hat{K}}|s|y) \cos(xs) ds + \\ &- \sum_{i=1}^2 \gamma_i \Lambda_i \int_0^\infty \frac{\tilde{\vartheta}_0(s)}{|s|} \exp(-|s|\gamma_i y) \cos(xs) ds, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(j,b)} &= \left((A_1\chi - B\hat{K})\Lambda - K_1 \right) J_0^{(1)}(x, y) + \\ &+ \sum_{i=1}^2 (B\gamma_i^2 - A_1\kappa_i) \Lambda_i J_i^{(1)}(x, y), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(j,b)}/C &= -\Lambda \sqrt{\hat{K}} (1 + \chi) J_0^{(2)}(x, y) + \\ &+ \sum_{i=1}^2 (1 + \kappa_i) \gamma_i \Lambda_i J_i^{(2)}(x, y), \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{(j,b)} &= \left((D_j\chi - E_j\hat{K})\Lambda - F_j \right) J_0^{(1)}(x, y) + \\ &+ \sum_{i=1}^2 (E_j\gamma_i^2 - D_j\kappa_i) \Lambda_i J_i^{(1)}(x, y), \end{aligned} \quad (54)$$

gdzie

$$J_i^{(1)}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{\vartheta}_0(s) \exp(-\gamma_i sy) \cos(sx) ds, \quad \gamma_0 = \sqrt{\hat{K}}, \quad (55)$$

$$J_i^{(2)}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{\vartheta}_0(s) \exp(-\gamma_i sy) \sin(sx) ds, \quad i = 0, 1, 2, \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= (-1)^{i+1} \frac{B + C}{A_2\gamma_i^2 + B} \times \\ &\times \frac{(1 + \chi)\Lambda C \sqrt{\hat{K}} + \Lambda(B\chi - A_2\hat{K})\gamma_{3-i} - K_2\gamma_{3-i}}{C(\gamma_1 - \gamma_2)}. \end{aligned} \quad (57)$$

Ponadto na podstawie wzorów (52) – (54) wynika, że naprężenia normalne na brzegu $y=0$ są proporcjonalne

do temperatury na brzegu, zaś naprężenia styczne są równe zeru dla $y=0$.

Przejdziemy do wyznaczenia funkcji $\tilde{g}_0(s)$. Ze względu na warunek (5) wyprowadzimy najpierw związek między transformatą temperatury na brzegu a transformatą uśrednionego brzegowego strumienia ciepła $q(x)$. Ponieważ

$$-\tilde{k} \frac{\partial \mathcal{G}(x, 0)}{\partial y} = q(x), \tag{58}$$

oraz na podstawie równania (49) wynika, że

$$\tilde{g}_0(s) = \frac{\tilde{q}_0(s)}{\tilde{k}\sqrt{\hat{K}}|s|}. \tag{59}$$

Korzystając z odwrotnego przekształcenia Fouriera dostajemy:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(s, y) \exp(isx) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_0(s) \exp\left(-\sqrt{\hat{K}}|s|y\right) \exp(isx) ds, \end{aligned} \tag{60}$$

czyli

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\sqrt{\hat{K}}|s|y\right) \exp(isx)}{\tilde{k}\sqrt{\hat{K}}|s|} ds \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi) \exp(-is\xi) d\xi, \end{aligned} \tag{61}$$

Funkcja podcałkowa całki (61) ma osobliwość przy $s=0$. Na podstawie teorii całek niewłaściwych wnioskujemy, że całka jest zbieżna, gdy całka wewnętrzna przy $s=0$ jest zerem, czyli:

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(\xi) \exp(-i0\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi) d\xi = 0. \tag{62}$$

W przypadku, gdy warunek (62) nie jest spełniony, zarówno temperatura jak i naprężenia normalne (na powierzchni półprzestrzeni są proporcjonalne do temperatury) są nieokreślone.

Z powyższego wynika, że przynajmniej na części powierzchni musimy przyjąć wymianę ciepła, np. że temperatura nieobciążonej powierzchni jest zerowa lub wymiana ciepła jest opisana za pomocą prawa Newtona – konwektywnej wymiany ciepła z ośrodkiem zewnętrznym.

Wróćmy do wyrażenia na przemieszczenie pionowe punktów powierzchni półprzestrzeni (51), które odpowiada rozwiązaniu problemu „b” (Rys. 2b):

$$\begin{aligned} \tilde{v}^{(b)}(s, 0) &= \left(\Lambda\sqrt{\hat{K}} - \gamma_1\Lambda_1 - \gamma_2\Lambda_2\right) |s|^{-1} \tilde{g}_0(s) = \\ &= -W_T |s|^{-1} \tilde{g}_0(s), \end{aligned} \tag{63}$$

gdzie

$$W_T = -\Lambda\sqrt{\hat{K}} + \gamma_1\Lambda_1 + \gamma_2\Lambda_2. \tag{64}$$

Do (63) podstawimy zależność (59):

$$\tilde{v}^{(b)}(s, 0) = -W_T \frac{\tilde{g}_0(s)}{|s|} = -\frac{W_T}{\tilde{k}\sqrt{\hat{K}}} \frac{\tilde{q}(s)}{s^2} = -W_q \frac{\tilde{q}(s)}{s^2}, \tag{65}$$

gdzie

$$W_q = W_T / \tilde{k}\sqrt{\hat{K}} = \left(-\Lambda\sqrt{\hat{K}} + \gamma_1\Lambda_1 + \gamma_2\Lambda_2\right) / \tilde{k}\sqrt{\hat{K}}. \tag{66}$$

Otrzymaliśmy zależność, której struktura jest dokładnie taka sama jak w odpowiednim zagadnieniu dotyczącym ośrodka jednorodnego.

Z (65) wynika, że

$$\frac{\partial^2 V^{(b)}}{\partial x^2} = W_q q(x) \Rightarrow \frac{\partial V^{(b)}}{\partial x} = \frac{W_q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi) \operatorname{sgn}(x - \xi) d\xi. \tag{67}$$

W zagadnieniu symetrycznym $q(x) = q(-x)$:

$$\frac{\partial V^{(b)}}{\partial x} = W_q \int_0^x q(\xi) d\xi. \tag{68}$$

Ze wzoru (68) wynika, że w przypadku zagadnienia symetrycznego odkształcenie termiczne w obszarze obciążenia zależy jedynie od strumienia ciepła w tym obszarze. Powyższy wniosek ma duże znaczenie w wybranych zagadnieniach kontaktowych z uwzględnieniem wytwarzania ciepła, a mianowicie w tych zagadnieniach, w których przyjmujemy, że strumień ciepła jest znany. Ma to na przykład miejsce w przypadku, gdy zakładamy, że wytworzone ciepło nagrzewa jedynie jedno z ciał:

Wtedy:

$$q(x) = f_{v_{st}} p(x), |x| < a. \tag{69}$$

Przy powyższych założeniach sumaryczne przemieszczenie pionowe (wywołane zarówno obciążeniem powierzchni półprzestrzeni naciskami kontaktowymi jak i ogrzaniem tej półprzestrzeni strumieniem ciepła powstałym na skutek wytwarzania ciepła) w obszarze kontaktu spełnia:

$$\frac{\partial V(x, 0)}{\partial x} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} C_V \int_0^{\infty} \sin(sx) \tilde{p}(s) ds + W_q f_{v_{st}} \int_0^x p(\xi) d\xi, \tag{70}$$

gdzie C_V zdefiniowane jest według wzoru:

$$C_V = \frac{\sqrt{A_1 A_2} (\gamma_1 + \gamma_2)}{A_1 A_2 - B^2}. \tag{71}$$

Podstawiając wzór (70) do warunku powstania wspólnej powierzchni kontaktu (kontaktowego warunku brzegowego):

$$\frac{\partial V(x, 0)}{\partial x} = -\frac{x}{R}, \quad x < a, \tag{72}$$

oraz uwzględniając wyrażenie do obliczenia transformaty Fouriera ciśnienia, otrzymamy równanie całkowe:

$$\frac{2}{\pi} C_V \int_0^{\infty} \sin(sx) ds \int_0^a p(\xi) \cos(s\xi) d\xi -$$

$$+ W_q f v_{st} \int_0^x p(\xi) d\xi = \frac{x}{R}, \quad x \in [0, a],$$
(73)

Dalej przejdziemy do współrzędnych bezwymiarowych przyjmując, że $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{y} = y/a$. Równanie (73) zapisujemy w postaci:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(s\tilde{x}) ds \int_0^1 p^*(\xi) \cos(s\xi) d\xi -$$

$$+ \beta \int_0^{\tilde{x}} p^*(\xi) d\xi = \frac{4}{\pi} a_0^2 \tilde{x}, \quad \tilde{x} \in [0, 1],$$
(74)

gdzie $p^*(\tilde{x}) = p(\tilde{x})/p_0$, $a_0 = a/a_H$. Średnie ciśnienie kontaktowe $p_0 = P/2a$, a półszerokość pasa kontaktu a_H obliczamy zgodnie ze wzorem $a_H^2 = 2C_V RP/\pi$ tak jak dla zagadnienia izotermicznego,

$$\beta = \frac{W_q f v_{st} a}{W_p} = \frac{W_T f v_{st} a}{\tilde{k} \sqrt{\hat{K} C_V}} = \frac{W_T f v_{st} a_H}{\tilde{k} \sqrt{\hat{K} C_V}} a_0 = \beta_0 a_0,$$
(75)

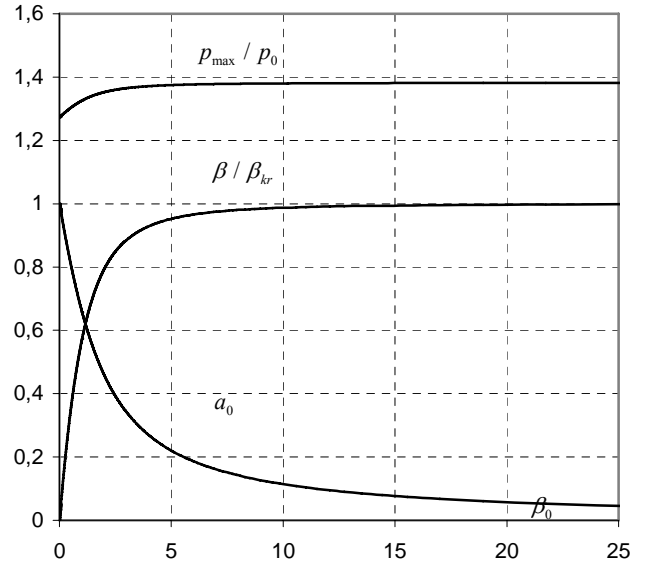
gdzie $\beta_0 = W_T f v_{st} a_H / (\tilde{k} \sqrt{\hat{K} C_V})$. Należy podkreślić, że przy przyjętych założeniach równanie całkowe (73) ma miejsce niezależnie od rodzaju warunku termicznego na nieobciążonej powierzchni półprzestrzeni. Do rozwiązania równania całkowego (74) zastosowano metodę kolokacji. Należy podkreślić, że rozwiązanie tego równania jest możliwe, gdy założymy, że parametr β jest znany a priori.

4. ANALIZA WYNIKÓW

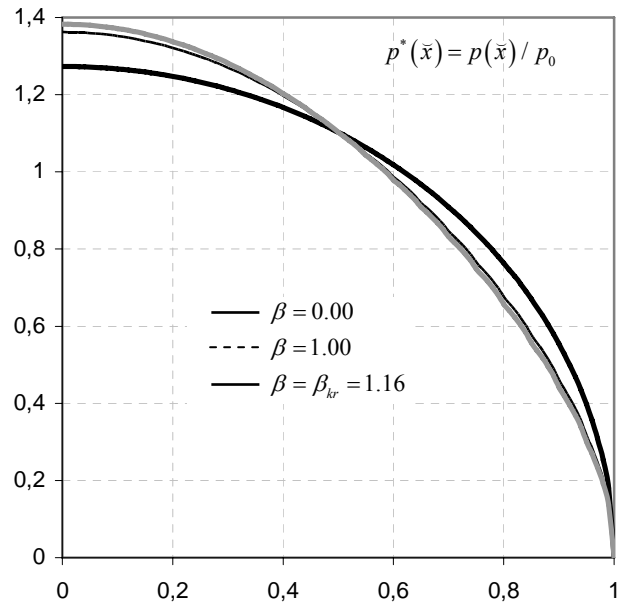
Przejdziemy teraz do przeanalizowania charakterystyk kontaktowych p_{max}/p_0 , β/β_{kr} , a_0 od wejściowego parametru β_0 zdefiniowanego we wzorze (75), (patrz Rys. 3).

Analizując wykres na Rys. 3 widzimy, że parametr β/β_{kr} zmierza asymptotycznie do jedynki, czyli $\beta \rightarrow \beta_{kr}$, gdy $\beta_0 \rightarrow \infty$. Jednocześnie zauważamy, że parametr a_0 maleje do zera i jednocześnie z nim obszar kontaktu zmniejsza się do zera, zaś p_{max}/p_0 rośnie, oraz $\lim_{\beta_0 \rightarrow \infty} p_{max}/p_0 = 1.38$.

Ponadto należy zwrócić uwagę, że wartość p_{max}/p_0 różni się od 1.36 nie więcej niż 2%, gdy $\beta_0 > 2.7$. Na Rys. 4 pokazano rozkłady bezwymiarowego ciśnienia kontaktowego $p^*(\tilde{x})/p_0$ dla trzech wybranych przypadków parametru $\beta=0; 1.0; \beta_{kr}$. Parametr β_{kr} wyznaczono przy założeniu, że $a_0 \rightarrow 0$ i otrzymano analogicznie jak dla ośrodka jednorodnego $\beta_{kr} \approx 1.16$, patrz Rys. 3. Ponadto dla $\beta=0$ otrzymujemy rozkład ciśnienia kontaktowego jak dla zagadnienia izotermicznego Herta a $p_{max}/p_0=4/\pi$, patrz Rys. 3 oraz Rys. 4, gdy $\tilde{x} = 0$, (zaznaczając, że przedstawione ciśnienie jest uśrednionym ciśnieniem kontaktowym).



Rys. 3. Schemat Zależność parametrów p_{max}/p_0 , β/β_{kr} , a_0 od parametru β_0 , gdzie $\beta_{kr} = 1.16$



Rys. 4. Rozkład bezwymiarowego średniego ciśnienia kontaktowego $p^*(\tilde{x}) = p(\tilde{x})/p_0$ w zależności od parametru β

LITERATURA

1. **Fabrikant V. I.** (1991), *Mixed Boundary Value Problem of Potential Theory and their Applications in Engineering*, Kluwer Acad. Pub., Dordrecht-Boston-London.
2. **Galin L. A.** (1980), *Contact Problems in the Theory of Elasticity and Viscoelasticity*, (in Russian), Izd. Science, Moscow.
3. **Gladwell G. M. L.** (1980), *Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity*, Sijthoff and Noordhoff, Alphen An den Rijn.
4. **Goryacheva I. G., Dobykhin M. N.** (1988), *Contact Problems in Tribology*, (in Russian), Machine-Construction, Moscow.

5. **Hwu C., Fan C. W.** (1998), Contact Problems of Two Dissimilar Anisotropic Elastic Bodies, *ASME J. of Appl. Mech.*, 65, 580-587.
6. **Johanson K. L.** (1985), *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge.
7. **Kaczyński A., Matysiak S. J.** (1988), Plane contact problems for a periodic two-layered elastic composite, *Ingenieur-Archiv*, 58, 137-147.
8. **Kaczyński A., Matysiak S. J.** (1993), Rigid Sliding Punch on a Periodic Two-Layered Elastic Half-Space, *J. Theor. Appl. Mech.*, 31, 2, 295-306.
9. **Kaczyński A., Matysiak S. J.** (2001), On 3D Punch Problems for a periodic Two-Layered Elastic Half-Space, *J. Theor. Appl. Mech.*, 39, 3, 523-538.
10. **Kołodziejczyk W.** (2008), *Zagadnienie kontaktowe teorii sprężystości ośrodków warstwowych o strukturze periodycznej*, Rozprawa doktorska, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok.
11. **Kulchytsky-Zyhailo R., Kołodziejczyk V.** (2004), A bidimensional contact problem of the theory of elasticity relating to indentation of the die into an elastic laminated semi-space, *Friction and Wear*, Vol. 25, 125-134.
12. **Kulczycki-Zyhailo R., Matysiak S. J., Perkowski D.**, (2005), Modelowanie termicznych warunków brzegowych na powierzchni prostopadłej do uwarstwienia w ośrodku warstwowym o strukturze periodycznej, *Materiały III Sympozjum Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji*, Augustów.
13. **Kulchytsky-Zyhailo R., Matysiak S. J.** (1995), On three-dimensional problems in a semi-infinite periodically layered body, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 33, 771-781.
14. **Liao W. C., 2001**, Smooth indentation at a multilayer laminate by a cylindrical indenter, *Composite Science and Technology* 61, 1801-1809.
15. **Matysiak S. J., Pauk W.** (1995), Plane contact problem for periodic laminated composite involving frictional heating, *Arch. Appl. Mech.*, 66, 82-89.
16. **Matysiak S. J., Perkowski D. M.** (2007), Singularity of stresses in a periodic laminated semi-space with a boundary normal to the layering, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 45, 2, 325-335.
17. **Matysiak S. J., Perkowski D. M.** (2008), Crack normal to layered elastic periodically stratified space, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 50, 220-225.
18. **Matysiak S. J., Woźniak Cz.** (1988), On microlocal modeling of thermoelastic periodic composites, *J. of Tech. Physics*, 29, 85-97.
19. **Perkowski D. M.** (2007), On plane contact problem of an elastic periodically layered composite with boundary normal to layering, *Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science*, Czestochowa University of Technology, 1(6), 205-218.
20. **Perkowski D. M., Matysiak S. J., Kulchytsky-Zyhailo R.** (2007), On contact problem of an elastic laminated half-plane with a boundary normal to layering, *Compos. Sci. Technol.*, 67, 2683-2690.
21. **Rogowski B.** (1982), Annular punch on a transversely isotropic layer bonded to a half-space, *Arch. Mech.*, 34, 2, 119-126.
22. **Willis J. R.** (1966), Hertzian Contact of Anisotropic Bodies, *J. Mech. Phys. Solids*, 14, 163-176.
23. **Woźniak Cz.** (1987), A nonstandard method of modelling of thermoelastic periodic composites, *Int. J. Engng. Sci.*, 25, 483-499.

**CONTACT PROBLEM WITH HEAT GENERATION
FOR A PERIODIC STRATIFIED COMPOSITE
HALF-SPACE WITH BOUNDARY NORMAL
TO THE LAYERING**

Abstract: In the paper, the contact problem with heat generation for a non-homogeneous half-space is considered. The body is assumed to be a periodically layered two-constituted, linear-thermoelastic, periodically repeated layers and the boundary is normal to the layering. A rigid punch with parabolic cross-section moving with a constant velocity in the direction of layering generates frictional heat described by Coulumb law. It is assumed that the punch is thermal insulator and the generated heat is transferred to the composite half-space. The boundary beyond the contact zone is assumed to be free of loading and with zero temperature. The problem were solved within the framework of the homogenized model with microlocal parameters, cf. Woźniak (1987), Matysiak and Woźniak (1988).

Publikacja powstała przy wsparciu finansowym Fundacji na rzecz Nauki Polskiej