

WYBRANE ZAGADNIENIA KONTAKTOWE TEORII SPRĘŻYSTOŚCI OŚRODKÓW WARSTWOWYCH

Roman KULCZYCKI-ŻYHAJŁO*, Waldemar KOŁODZIEJCZYK*, Gabriel ROGOWSKI*

*Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

ksh@pb.edu.pl, waldekk@pb.edu.pl, gabrielkis@doktoranci.pb.edu.pl

Streszczenie: Rozpatrzono wybrane zagadnienia kontaktowe teorii sprężystości dotyczące wciskania nieodkształcalnego stempla w półprzestrzeni niejednorodną. Rozpatrywana półprzestrzeń składa się z półprzestrzeni jednorodnej oraz pakietu n izotropowych jednorodnych warstw. Algorytm rozwiązywania, oparty na wykorzystaniu przekształceń całkowych, zweryfikowano, modelując ośrodki warstwowe o strukturze periodycznej oraz warstwy, których moduł Younga zmienia się wzdłuż grubości według zależności wykładniczej.

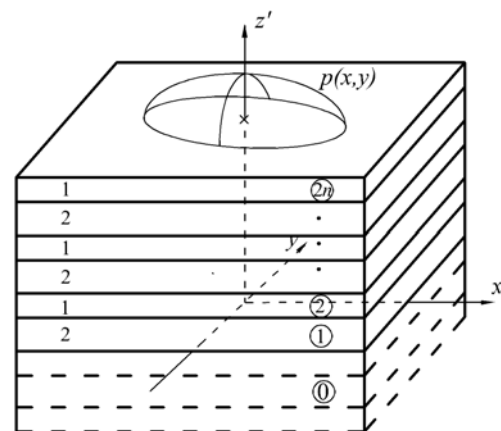
1. WPROWADZENIE

Postępy w technologii powłokowej powodują coraz szersze wykorzystywanie warstw wierzchnich dla poprawienia właściwości trybologicznych powierzchni ślizgowych. Pozwalają one zmniejszyć współczynniki tarcia i wielkość zużycia, a jednocześnie nie powodują zmiany masy materiału. Punktem słabości w użyciu warstw wierzchnich jest ich pęknięcie (rozdzielenie, rozerwanie) bądź też rozwarstwienie i odłupywanie się na złączu warstwa/podłoże. W większości opracowań (Abdul-Bagi i Van der Giessen, 2002; Bragallini i inni, 2003; Chen i Engel, 1972; Diao i inni, 1994; Diao, 1999; Houmid Bennani i Takadoun, 1999; Kouitaj Njiwa i inni, 1998, 1999); Kulchytsky-Zyhailo i Rogowski (2007); Torskaya i Goryacheva, 2003; Schwarzer, 2000; Schwarzem i inni, 1999; Shi i Ramalingman, 2001) zakłada się, że warstwa jest jednorodna lub rozpatruje się kilka warstw (przeważnie 2-4 warstwy) o stałych właściwościach mechanicznych. Równolegle są rozwiązywane zagadnienia, w których moduł Younga lub moduł Kirchhoffa zmieniają się wzdłuż grubości warstwy według zależności wykładniczej (Guler i Erdogan, 2004, 2006, 2007; Kashtalyan i Menshykova, 2007) (metody analityczno-numeryczne) lub potęgowej (Fischer-Cripps, 2003; Giannakopoulos i Pallot, 2000; Giannakopoulos i Suresh, 1997; Suresh i inni, 1997) (metody analityczno-numeryczne oraz metoda elementów skończonych). Dwuwymiarowe zagadnienia kontaktowe, w których warstwę o zmieniającym się wzdłuż jej grubości współczynnikiem Kirchhoffa zastąpiono pakietem warstw, rozpatrzono w Liao-Liang i Yue-Sheng (2006, 2007). Weryfikację stosowania modelu homogenizowanego do opisu ośrodka warstwowego o strukturze periodycznej poprzez rozwiązywanie zagadnień przewodnictwa ciepła i teorii sprężystości dla pakietu $2n$ warstw przeprowadzono w pracach: Kołodziejczyk i Kulchytsky-Zyhailo (2005, 2007a, b), Kulchytsky-Zyhailo i Matysiak (2005a, b), Kulchytsky-Zyhailo i inni (2007).

W niniejszej pracy zweryfikujemy metodę rozwiązywania zagadnień kontaktowych teorii sprężystości dla ośrodka jednorodnego pokrytego pakietem n jednorodnych izotropowych warstw. Pokażemy, że proponowane podejście może być wykorzystane do modelowania warstwy o zmieniających wzdłuż jej grubości właściwościach mechanicznych. Zaletą proponowanego podejścia jest możliwość rozwiązywania wybranych zagadnień przestrzennych.

2. ODEL MATEMATYCZNY ZAGADNIENIA

Rozpatrzmy jednorodną izotropową półprzestrzeń sprężystą pokrytą pakietem n jednorodnych izotropowych warstw, w którą wciskany jest nieodkształcalny gładki stempel (Rys. 1). Pomędzy ośrodkami sprężystymi, z których składa się rozważany ośrodek niejednorodny, zachodzą warunki idealnego kontaktu mechanicznego.



Rys. 1. Schemat zagadnienia

Przyjmujemy, że główne promienie krzywizny powierzchni podstawy stempla są dużo większe od charakte-

rystycznego wymiaru obszaru kontaktu. Ponadto zakładamy, że siły styczne działające w obszarze kontaktu na skutek tarcia wywierają znikomy wpływ na kształt i rozmiary obszaru kontaktu oraz rozkład ciśnienia kontaktowego (Johnson, 1985). Rozkład przemieszczeń i naprężeń w rozpatrywanym ośrodku niejednorodnym otrzymuje się z rozwiązania następującego brzegowego zagadnienia teorii sprężystości:

– równania (Nowacki, 1970):

$$(1 - 2\nu_i)\Delta \mathbf{u}_i + \text{grad} \theta_i = 0 \quad (1)$$

– warunki brzegowe (Chen i Engel, 1972):

$$\sigma_{z'z'}^{(n)}(x, y, h) = -p(x, y), (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

$$\sigma_{z'z'}^{(n)}(x, y, h) = 0, (x, y) \notin \Omega,$$

$$\sigma_{xz'}^{(n)}(x, y, h) = \sigma_{yz'}^{(n)}(x, y, h) = 0,$$

$$\mathbf{u}_{i-1}(x, y, h_i) = \mathbf{u}_i(x, y, h_i), \mathbf{p}_{i-1}(x, y, h_i) = \mathbf{p}_i(x, y, h_i) \quad (3)$$

$$\mathbf{p}_i = \left\{ \sigma_{xz'}^{(i)}, \sigma_{yz'}^{(i)}, \sigma_{z'z'}^{(i)} \right\}, i = 1, \dots, n,$$

$$\sigma^{(i)} \rightarrow 0, x^2 + y^2 + z'^2 \rightarrow \infty, i = 0, 1, \dots, n, \quad (4)$$

gdzie: \mathbf{u} – wektor przemieszczenia, σ – tensor naprężenia, $\theta = \text{div} \mathbf{u}$ – odkształcenie objętościowe, ν – współczynnik Poissona, x, y, z' – bezwymiarowe współrzędne kartezjańskie odniesione do charakterystycznego liniowego wymiaru a obszaru kontaktu Ω , x, y, z – pomocnicze współrzędne kartezjańskie ($z = h - z'$), $p(x, y)$ – ciśnienie kontaktowe, $z' = h_i$ – dolna powierzchnia i -tej warstwy, $z' = h$ – powierzchnia ośrodka niejednorodnego, $h = H/a$, H – grubość pakietu n warstw, i – indeks odpowiadający numerowi ośrodka sprężystego.

W zagadnieniach, w których ciśnienie kontaktowe jest nieznanne, obliczamy je spełniając: warunek powstania wspólnej powierzchni kontaktu (rzeczywistą powierzchnię podstawy stempla aproksymujemy paraboloidą):

$$u_{z'}^{(n)}(x, y, h) = ax^2/2R_x + ay^2/2R_y - u_{z0}, (x, y) \in \Omega \quad (5)$$

oraz warunek równowagi:

$$\iint_{\Omega} p(x, y) dx dy = \frac{S}{a^2} p_0 \quad (6)$$

gdzie: u_{z0} – przemieszczenie pionowe stempla, R_x i R_y – główne promienie krzywizny powierzchni podstawy stempla w punkcie początkowego zetknięcia, $p_0 = P/S$ – średnie ciśnienie kontaktowe, S – pole obszaru kontaktu, P – siła docisku.

3. METODA ROZWIĄZYWANIA

Proponowana metoda rozwiązywania opiera się na stosowaniu dwuwymiarowego przekształcenia całkowego Fouriera (Sneddon, 1972):

$$f_F(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-ix\xi - iy\eta) dx dy \quad (7)$$

za pomocą którego otrzymano zależności w postaci całkowitej pomiędzy składowymi wektora przemieszczenia i tensora naprężenia a ciśnieniem kontaktowym. Uzyskane równania zawierają $6n+3$ nieznanymi funkcji argumentów przekształcenia całkowego. Do ich wyznaczenia służy układ $6n+3$ równań liniowych powstały ze spełnienia warunków brzegowych (2) i (3). Wykazano, że otrzymany układ równań można sprowadzić do dwóch niezależnych układów równań. Pierwszy układ zawiera $2n+1$ równań i jest jednorodny, czyli posiada trywialne rozwiązanie. Drugi układ składa się z $4n+1$ równań jednorodnych i jednego równania niejednorodnego. Elementy macierzy są funkcjami jednej zmiennej s ($s^2 = \xi^2 + \eta^2$). Umożliwia to zapisanie otrzymanych zależności w postaci:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(i)} \\ \sigma^{(i)} \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{u}_{F0}^{(i)}(C_m(s)) \\ \sigma_{F0}^{(i)}(C_m(s)) \end{matrix} \right\} s ds \int_0^{2\pi} p_F(s, \phi) \exp(isr \cos(\phi - \phi)) d\phi \quad (8)$$

$$i = 0, 1, \dots, n,$$

gdzie $p_F(\xi, \eta)$ – transformata Fouriera ciśnienia kontaktowego, r, ϕ – współrzędne biegunowe w przestrzeni oryginalów, s, ϕ – współrzędne biegunowe w przestrzeni transformacji, funkcje $C_m(s)$ – rozwiązanie układu równań: $A_{ij}(s)C_j(s) = \delta_{i,4n+2}$, $i, j = 1, 2, \dots, 4n+2$, $\delta_{i,4n+2}$ – symbol Kroneckera.

4. WERYFIKACJA ALGORYTMU OBLICZEŃ

4.1. Rozwiązanie trójwymiarowego zagadnienia kontaktowego wciskania paraboloidy w półprzestrzeń homogenizowaną

Rozpatrzmy wciskanie nieodkształcalnej paraboloidy w półprzestrzeń warstwową o strukturze periodycznej. Komórkę periodyczności tworzą dwie warstwy o grubościach l_1 i l_2 , modułach Younga E_1 i E_2 oraz współczynnikach Poissona ν_1 i ν_2 . Mechaniczne właściwości półprzestrzeni opisujemy za pomocą modelu homogenizowanego z parametrami mikrolokalnymi (Matysiak i Woźniak, 1987; Woźniak, 1987). Korzystając z dwuwymiarowego przekształcenia całkowego Fouriera (7), otrzymujemy zależności całkowite pomiędzy składowymi wektora makroprzemieszczenia i składowymi tensora naprężenia a ciśnieniem kontaktowym:

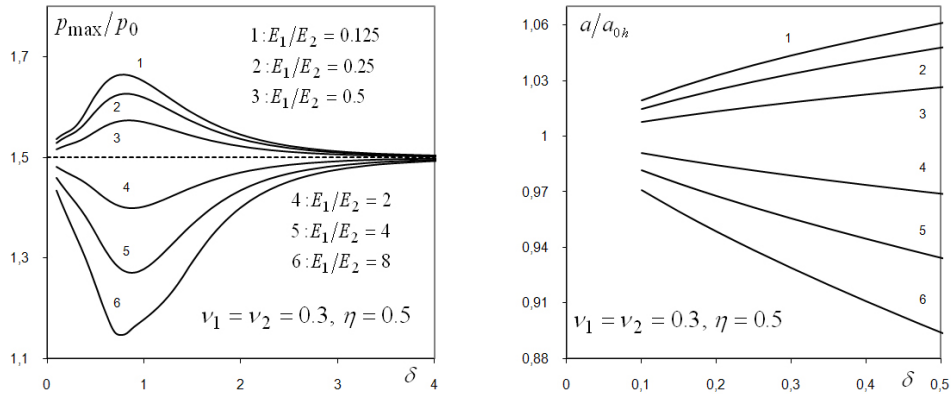
$$\begin{cases} \mathbf{U} \\ \sigma^{(i)} \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{U}_{F0}(\xi, \eta, x, y, z') \\ \sigma_{F0}^{(i)}(\xi, \eta, x, y, z') \end{matrix} \right\} p_F(\xi, \eta) \cdot \exp(ix\xi + iy\eta) d\xi d\eta, \quad (9)$$

$$i = 1, 2,$$

gdzie: \mathbf{U} – wektor makroprzemieszczenia, $\sigma^{(i)}$ – tensor naprężenia w i -tej warstwie komórki periodyczności. Spełniając warunek kontaktowy (5), otrzymujemy dwuwymiarowe równanie całkowite, które posiada rozwiązanie analityczne. Obszarem kontaktu jest elipsa a ciśnienie kontaktowe opisuje rozkład Hertza.

4.2. Osiowo-symetryczne zagadnienie kontaktowe dotyczące wciskania nieodkształcalnej kuli w półprzestrzeń warstwową o strukturze periodycznej

Półprzestrzeń warstwową, której struktura jest opisana w podrozdziale 4.1. modelujemy pakietem $2n$ warstw połączonych z ośrodkiem homogenizowanym. W pracy Kołodziejczyka i Kulchytyskiego-Zyhailo (2007a, b) wykazano,



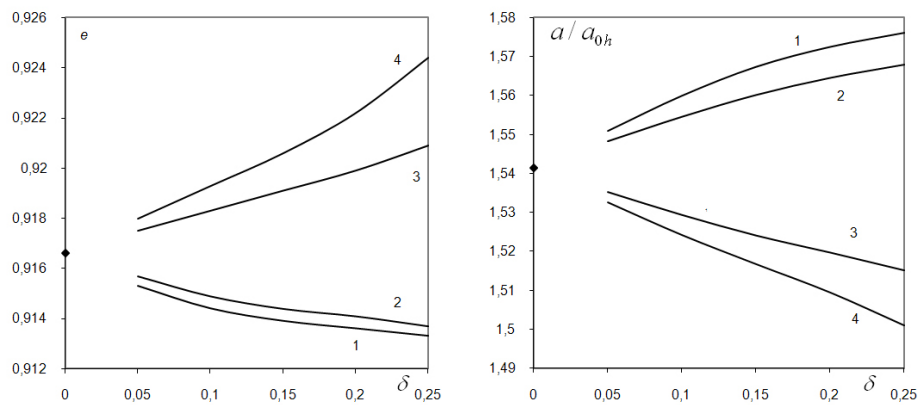
Rys. 2. Zależność parametrów kontaktowych: a/a_{0h} (a – promień koła kontaktu, a_{0h} – promień koła kontaktu w zagadnieniu, w którym półprzestrzeń warstwową modelujemy ośrodkiem homogenizowanym) i $p(0)/p_0$ od stosunku grubości komórki periodyczności do promienia koła kontaktu δ ($\eta=l_1/(l_1+l_2)$)

4.3. Trójwymiarowe zagadnienie kontaktowe dotyczące wciskania paraboloidy w półprzestrzeń warstwową o strukturze periodycznej

Trójwymiarowe zagadnienie kontaktowe ($R_x \neq R_y$) analizowane w ramach modelu opisanego w rozdziale 3.2.

że półprzestrzeń znajdującą się w pewnej odległości od obszaru kontaktu należy opisywać za pomocą modelu homogenizowanego z parametrami mikrolokalnymi. W rozpatrzonych tu i poniżej osiowosymetrycznych zagadnieniach kontaktowych ($R_x=R_y$ w warunku kontaktowym (5)) promień koła kontaktu i rozkład ciśnienia kontaktowego są nieznane. Obliczamy je, sprowadzając zagadnienie kontaktowe do równania całkowego, które rozwiązujemy numerycznie.

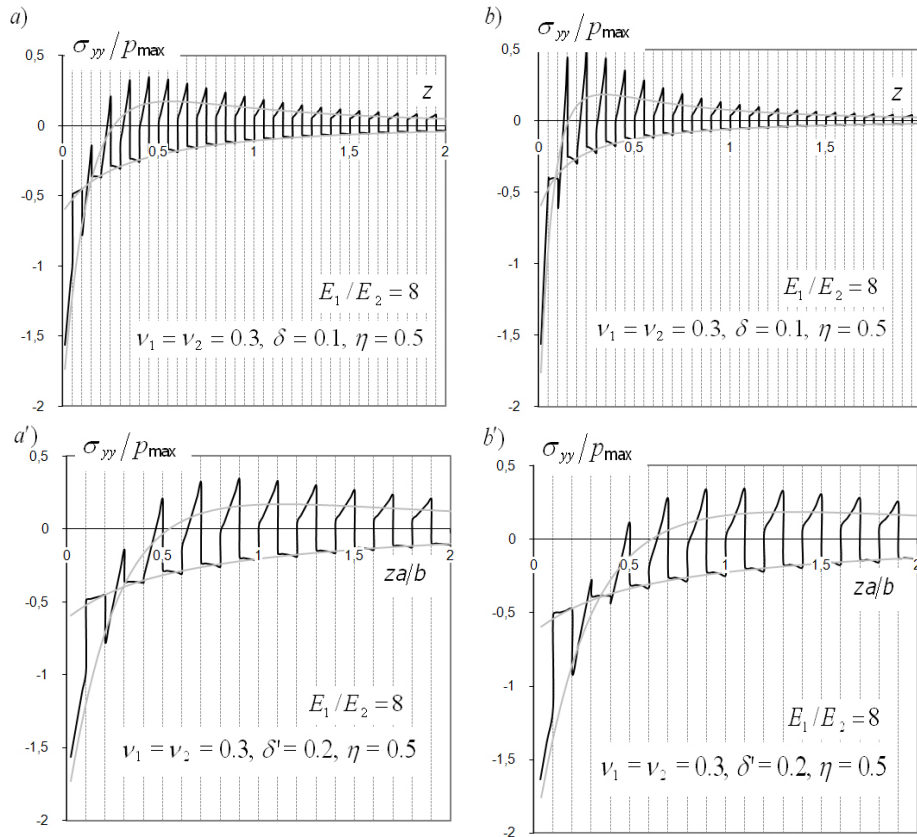
rozpatrujemy przy założeniu, że obszar kontaktu jest elipsą o nieznanym kształcie i rozmiarach, a ciśnienie kontaktowe jest opisane rozkładem Hertza. Założenia te można przyjąć, gdy parametr δ (stosunek grubości komórki periodyczności do większej półosi elipsy kontaktu a) jest mały.



Rys. 3. Zależność mimośrodu elipsy kontaktu e i parametru a/a_{0h} od parametru δ (1: $E_1/E_2=0.125$; 2: $E_1/E_2=0.25$; 3: $E_1/E_2=4$; 4: $E_1/E_2=8$, $\nu_1=\nu_2=0.3$, $R_y/R_x=0.25$; ♦ - rozwiązanie dla ośrodka homogenizowanego, a_{0h} - promień koła kontaktu, który powstaje w osiowosymetrycznym zagadnieniu wciskania kuli z promieniem ekwiwalentnym $R_e=(R_x R_y)^{1/2}$ w półprzestrzeń homogenizowaną)

Naprężenie σ_{yy} na każdej granicy rozdziału warstw doświadczają skoku (Rys. 4). Otrzymany obraz ma dwie obwiednie, których przybliżenie daje model homogenizowany. Obliczenia wykazały, że przy ustalonej wartości parametru $\delta=\delta a/b$ różnica pomiędzy rozkładami naprężeń uzyskanymi w ramach klasycznej teorii sprężystości a odpowiednimi rozkładami uzyskanymi na podstawie modelu homogeni-

zowanego dla różnych wartości stosunku a/b jest porównywalna. Pozwala to wnioskować, że przy ocenie możliwości zastąpienia ośrodka warstwowego o strukturze periodycznej ośrodkiem homogenizowanym należy uwzględnić wielkość stosunku pomiędzy grubością komórki periodyczności a mniejszym liniowym wymiarem obszaru kontaktu.

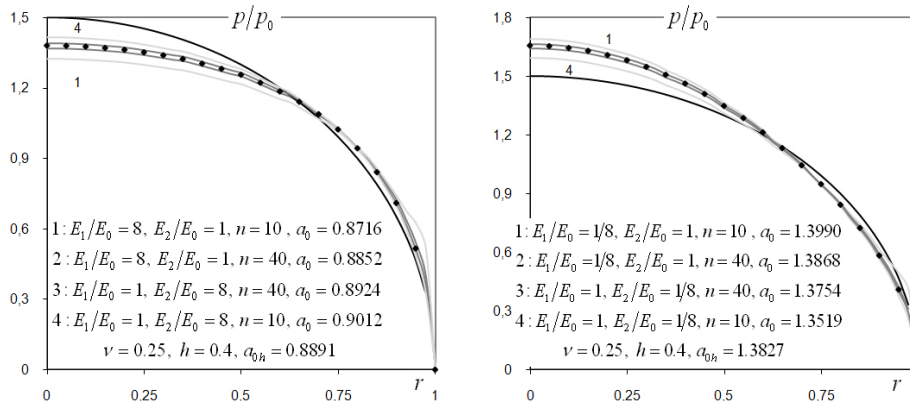


Rys. 4. Rozkład naprężeń σ_{yy}/p_{max} ($p_{max}=1.5p_0$) wzdłuż osi z : a), b) przy stałym współczynniku $\delta=0.1$, a'), b') przy stałym współczynniku $\delta'=\delta a/b=0.2$; a), a') $a/b=2$, b), b') $a/b=4$, jasnoszare linie – model homogenizowany, czarne linie – ośrodek niejednorodny, linie przerywane – granice warstw; δ' – stosunek grubości komórki periodyczności do mniejszej półosi elipsy kontaktu b .

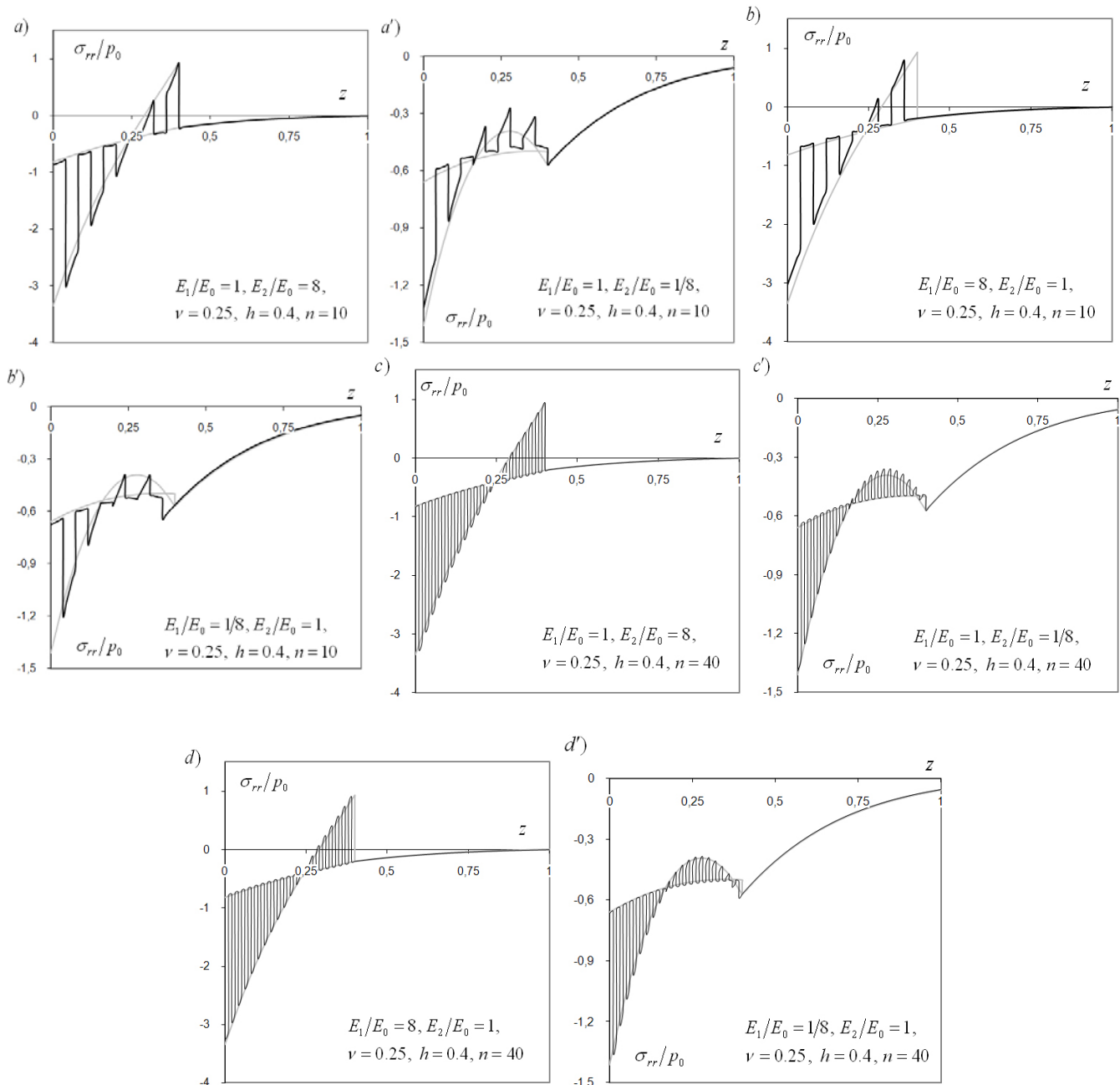
4.4. Osiowo-symetryczne zagadnienie kontaktowe wciśnięcia kuli w półprzestrzeń warstwową pokrytą pakietem warstw o zmieniających się w sposób periodyczny właściwościach mechanicznych

Rozpatrzono zagadnienie wciśnięcia nieodkształcalnej kuli w jednorodną izotropową półprzestrzeń (moduł Younga E_0 i współczynnik Poissona ν_0) pokrytą warstwą niejednorodną o strukturze rozważanej w rozdziałach 4.1.-4.3. Oblicze-

nia przeprowadzono dla warstwek o jednakowej grubości oraz różnej kolejności ułożenia. W celu ograniczenia liczby parametrów założono, że $\nu_0=\nu_1=\nu_2$ oraz $E_1=E_0$ (lub $E_2=E_0$). Otrzymane rozwiązanie porównano z rozwiązaniem zagadnienia, w którym niejednorodną warstwę kompozytową opisano za pomocą modelu homogenizowanego z parametrami mikrolokalnymi.



Rys. 5. Rozkład bezwymiarowego ciśnienia kontaktowego ($n=10$ – linie jasnoszare, $n=40$ – linie ciemnoszare, ośrodek homogenizowany – czarne romby, rozkład Hertza – czarna linia, $a_0 = a/a'$, $a_{0h}=a_h/a'$, a – promień koła kontaktu, a_{0h} – promień koła kontaktu w zagadnieniu, w którym warstwę kompozytową modelujemy ośrodkiem homogenizowanym, a' – promień koła kontaktu w zagadnieniu dotyczącym jednorodnej izotropowej półprzestrzeni z właściwościami mechanicznymi E_0 i ν_0).

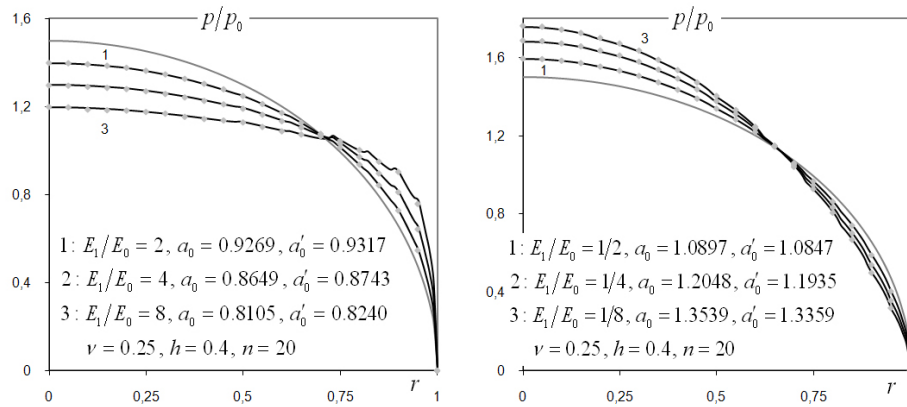


Rys. 6. Rozkład bezwymiarowego naprężenia σ_{rr} wzdłuż osi z ($a-d$ ($a'-d'$) – moduł Younga jednej z warstwek komórki periodyczności jest większy (mniejszy) od modułu Younga jednorodnej izotropowej półprzestrzeni, a, b (a', b') – $n=10$, c, d (c', d') – $n=40$, a, c (a', c') – $E_1/E_0=1$, b, d (b', d') – $E_2/E_0=1$, szare linie – rozwiązanie zagadnienia, w którym niejednorodną warstwę kompozytową zastępujemy jednorodną warstwą homogenizowaną)

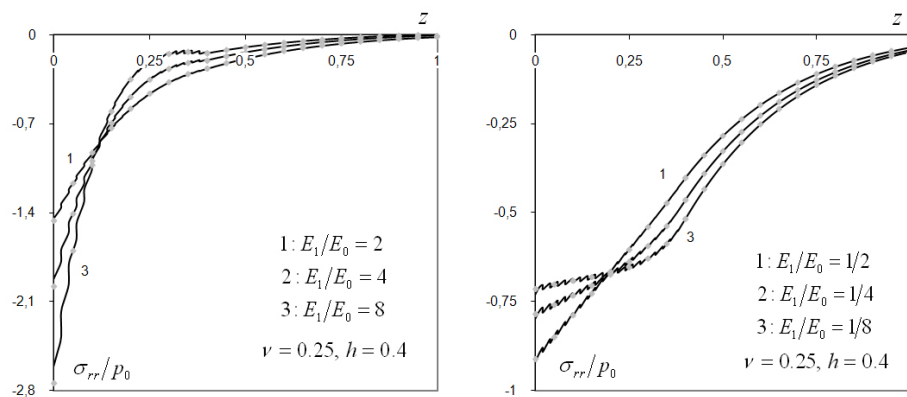
4.5. Osiowo-symetryczne zagadnienie kontaktowe wciśnięcia kuli w półprzestrzeń warstwową pokrytą warstwą, której moduł Younga zmienia się wzdłuż grubości według zależności wykładniczej

Rozpatrzono zagadnienie wciśnięcia nieodkształcalnej kuli w jednorodną izotropową półprzestrzeń (moduł Younga E_0 i współczynnik Poissona ν) pokrytą warstwą materiału, której współczynnik Poissona jest stały i równy ν , a moduł Younga zmienia się wzdłuż jej grubości według

zależności wykładniczej: $E(z')=E_0 \exp(\beta z')$, $\beta=\ln(E_1/E_0)/h$, $z' \leq h$, gdzie E_1 – moduł Younga na powierzchni warstwy wierzchniej. Powyższa zależność została tak dobrana, że moduł Younga w całym ośrodku zmienia się w sposób ciągły. Analityczne rozwiązanie zagadnienia otrzymane według algorytmu (Guler i Erdogan, 2004, 2006, 2007; Kulczycki, 2002; Kulczycki i Rogowski, 2005) porównamy z rozwiązaniem, które uzyskamy, zastępując warstwę o zmiennych właściwościach mechanicznych pakietem n warstwek o stałych właściwościach.



Rys. 7. Rozkład bezwymiarowego ciśnienia kontaktowego (czarne linie – rozwiązanie zagadnienia dotyczącego pakietu warstwek, szare romby – metoda analityczna, szara linia – rozkład Hertza, $a_0 = a/a'$, $a_0' = a_{an}/a'$, a – promień koła kontaktu w zagadnieniu dotyczącym pakietu warstwek, a_{an} – promień koła kontaktu w zagadnieniu rozwiązywanym metodą analityczną, a' – promień koła kontaktu w zagadnieniu dotyczącym jednorodnej izotropowej półprzestrzeni z właściwościami mechanicznymi E_0 i ν_0)



Rys. 8. Rozkład bezwymiarowego naprężenia σ_{rr} wzdłuż osi z (czarne linie – rozwiązanie zagadnienia dotyczącego pakietu warstwek, szare romby – metoda analityczna)

5. PODSUMOWANIE

Zaproponowano i zweryfikowano metodę rozwiązywania przestrzennych zagadnień kontaktowych dotyczących jednorodnego ośrodka izotropowego połączonego z pakietem n izotropowych jednorodnych warstw. Powyższą metodę można wykorzystać:

- do weryfikacji stosowalności modeli homogenizowanych do opisu ośrodków warstwowych o strukturze periodycznej;
- do analizy powyższych zagadnień, gdy model homogenizowany nieadekwatnie opisuje ośrodek niejednorodny;
- do analizy zagadnień dotyczących warstwy wierzchniej o zmieniających się wzdłuż grubości wartościach mechanicznych (w tym także w przypadku ciągłej zmiany właściwości mechanicznych).

LITERATURA

1. **Abdul-Baqi A., Van der Giessen E.** (2002), Numerical analysis of indentation-induced cracking of brittle coatings on ductile substrates, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 39, 1427-1442.
2. **Bragallini G.M., Cavatorta M.P., Sainsot P.** (2003), Coated

- contact: a strain approach, *Tribology International*, Vol. 36, 935-941.
3. **Chen W.T., Engel P.** (1972), Impact and contact stress analysis in multilayered media, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 8, 1257-1281.
4. **Diao D. F., Kato K., Hayashi K.** (1994), The maximum tensile stress on a hard coating under sliding friction, *Tribology International*, Vol. 27, 267-272.
5. **Diao D.F.** (1999), Finite element analysis on local yield map and critical maximum contact pressure for yielding in hard coating with an interlayer under sliding contact, *Tribology International*, Vol. 32, 25-32.
6. **Fischer-Cripps A.C.** (2003), Analysis of instrumented indentation test data for functionally graded materials, *Surface and Coating Technology*, Vol. 168, 136-141.
7. **Giannakopoulos A.E., Pallot P.** (2000), Two-dimensional contact analysis of elastic graded materials, *J. Mech. Physics Solids*, Vol. 48, 1597-1631.
8. **Giannakopoulos A.E., Suresh S.** (1997), Indentation of solids with gradients in elastic properties: Part II. Axisymmetric indenters, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 34, 2393-2428.
9. **Guler M.A., Erdogan F.** (2004), Contact mechanics of graded coatings, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 41, 3865-3889.
10. **Guler M.A., Erdogan F.** (2006), Contact mechanics of two deformable elastic solids with graded coatings, *Mechanics of Materials*, Vol. 38, 633-647.

11. **Guler M.A., Erdogan F.** (2007), The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 49, 161-182.
12. **Houmid Bennani N., Takadoum J.** (1999), Finite element model of elastic stresses in thin coatings submitted to applied forces, *Surface & Coatings Technology*, Vol. 111, 80-85.
13. **Johnson K.L.** (1985): *Contact Mechanics*, Cambridge University Press. Cambridge.
14. **Kashalyan M., Menshykova M.** (2007), Three-dimensional elastic deformation of a functionally graded coating/substrate system, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 44, 5272-5288.
15. **Kołodziejczyk V., Kulchytsky-Zyhailo R.** (2007), Pressure of the lateral surface of a cylinder on a periodically layered half space, *Materials Science*, Vol. 43, 51-57.
16. **Kouitat Njiwa R., Consiglio R., J. von Stebut** (1998), Boundary element modeling of coated materials in static and sliding ball-flat elastic contact, *Surface & Coatings Technology*, Vol. 102, 148-153.
17. **Kouitat Njiwa R., J. von Stebut** (1999), Boundary element numerical modelling as a surface engineering tool: application to very thin coatings, *Surface & Coatings Technology*, 116-119 (1999), 573-579.
18. **Kulchytsky-Zyhailo R., Kołodziejczyk V.** (2005), Stress field caused by Hertz's pressure in non-uniform half-plane with periodic structure, *Friction and Wear*, Vol.26, No. 4, 358-366.
19. **Kulchytsky-Zyhailo R., Kołodziejczyk V.** (2007), On axisymmetrical contact problem of pressure of a rigid sphere into a periodically two-layered semi-space. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 49, 704-711.
20. **Kulchytsky-Zyhailo R., Matysiak S.J.** (2005), On heat conduction problem in a semi-infinite periodically laminated layer, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, 123-132.
21. **Kulchytsky-Zyhailo R., Matysiak S.J.** (2005), On some heat conduction problem in a periodically two-layered body: Comparative results, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, 332-340.
22. **Kulchytsky-Zyhailo R., Matysiak S.J., Perkowski D.** (2007), On displacements and stresses in a semi-infinite laminated layer: comparative results, *Meccanica*, Vol. 42, 117-126.
23. **Kulchytsky-Zyhailo R., Rogowski G.** (2007), Stresses of hard coating under sliding contact, *J. Theoretical Applied Mechanics*, Vol. 45, No. 4, 753-772.
24. **Kulczycki R.** (2002), *Przestrzenne zagadnienia kontaktowe termosprężystości*, Wyd. PB, Białystok.
25. **Kulczycki R., Rogowski G.** (2005), Pole naprężeń w półpłaszczyźnie niejednorodnej wywołane ciśnieniem Hertza, *Materiały III Sympozjum Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji*, Augustów.
26. **Liao-Liang Ke, Yue-Sheng Wang** (2007), Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials, *European Journal of Mechanics and Solids*, Vol. 26, 171-188.
27. **Liao-Liang Ke, Yue-Sheng Wang** (2006), Two-dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 43, 5779-5798.
28. **Matysiak S.J., Woźniak Cz.** (1987), Micromorphic effects in a modeling of periodic multilayered elastic composites, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 25, 549-559.
29. **Nowacki W.** (1970): *Teoria sprężystości*, Warszawa, PWN.
30. **Schwarzer N.** (2000), Coating due to analytical modelling of mechanical contact problems on multilayer systems, *Surface & Coatings Technology*, Vol. 133-134, 397-402.
31. **Schwarzer N., Richter F., Hecht G.** (1999), The elastic field in a coated half-space under Hertzian pressure distribution, *Surface & Coatings Technology*, Vol. 114, 292-304.
32. **Shi Z., Ramalingam S.** (2001), Stresses in coated solids due to normal and shear tractions on an elliptical region, *Surface & Coatings Technology*, Vol. 138, 192-204.
33. **Sneddon I.N.** (1972): *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York.
34. **Suresh S., Giannakopoulos A.E., Alcalá J.** (1997), Spherical indentation of compositionally graded metal-ceramic composites: theory and experiments, *Acta mater.*, Vol. 45, 1307-1321.
35. **Torskaya E.V., Goryacheva I.G.** (2003), The effect of interface imperfection and external loading on the axi-symmetric contact with a coated solid, *Wear*, Vol. 254, 538-545.
36. **Woźniak Cz.** (1987), A nonstandard method of modelling of thermoelastic periodic composites, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 25, 483-499.

SELECTED ISSUES OF THEORY OF ELASTICITY FOR LAYERED BODIES

Abstract: Selected issues of contact theory of elasticity for pressing the rigid punch in non-homogeneous half-space are considered. Half-space consists of homogeneous half-space and a package of n isotropic homogeneous layers. Algorithm of calculation was based on integral transformation and was verified by modeling the layered bodies by periodic layers or layers, which the Young's module is changed along the thickness of the layer with the exponential dependence.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego nr S/WM/2/08 realizowanego w Politechnice Białostockiej, finansowanego ze środków Komitetu Badań Naukowych.