

WYZNACZANIE PARAMETRÓW ODPORNOŚCI NA PĘKANIE MATERIAŁÓW QUASI-KRUCHYCH NA PRÓBKACH CYLINDRYCZNYCH Z KARBAMI

Andrzej KAZBERUK*

*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

a.kazberuk@pb.edu.pl

Streszczenie: Zaproponowano metodę wyznaczania krytycznego współczynnika intensywności naprężeń materiału na ścisanych próbkach o przekroju kołowym z centralnie umieszczonym otworem w postaci rombu. Proces zniszczenia próbki postępuje od wierzchołka karbu typu V. Znając wartość obciążenia niszczonego oraz standardowe stałe materiałowe oblicza się krytyczny współczynnik intensywności naprężeń wykorzystując odkształceniowe kryterium pękania oparte na modelu Dugdale'a. Zagadnienie koncentracji naprężeń w otoczeniu wierzchołków otworu rozwiązano metodą osobliwych równań całkowych.

1. WPROWADZENIE

Zastosowanie metod liniowej mechaniki pękania do analizy procesów zniszczenia elementów konstrukcji betonowych i żelbetowych ma ponad półwieczną historię. Obszerny i aktualny przegląd dokonań w tej dziedzinie zawierają prace Brandta (1979) i kompendium *Comprehensive Structural Integrity* (2003).

Podstawowym parametrem materiałowym w mechanice pękania jest krytyczny współczynnik intensywności naprężeń wyznaczany doświadczalnie na próbkach ze szczelinami. W przypadku metali procedura określania tego parametru jest znormalizowana i powszechnie stosowana. Proces pękania zaczyna się w tym przypadku, od szczeliny inicjowanej zmęczeniowo. Dla materiałów kruchych takich jak beton, ceramika czy skały uzyskanie szczeliny początkowej o ściśle określonych parametrach jest trudne. Zazwyczaj, wytwarza się je na etapie formowania próbki (Golewski, Sadowski 2006). Uzyskuje się w ten sposób szczeliny o dość znacznej (2-3 mm) szerokości i promieniu zaokrąglenia wierzchołka. Tym samym, wymiary całej próbki belkowej muszą być duże, co podnosi koszty badań. Ostatnie zalecenia RILEM (*Comprehensive* 2003) dopuszczają wyznaczanie krytycznego współczynnika intensywności naprężeń na rozłupywanych próbkach prostopadłościennych i cylindrycznych ze szczeliną wycinaną za pomocą pił diamentowych.

W pracy zaproponowano metodę wyznaczania krytycznego współczynnika intensywności naprężeń materiału na ścisanych próbkach o przekroju kołowym z centralnie umieszczonym otworem w postaci rombu. Proces zniszczenia próbki postępuje w tym przypadku od wierzchołka karbu typu V, a nie jak ma to miejsce w podejściu klasycznym, od wierzchołka szczeliny. Znając wartość obciążenia niszczonego oraz standardowe stałe materiałowe oblicza się krytyczny współczynnik intensywności naprężeń wykorzy-

stując odkształceniowe kryterium pękania (Savruk i inni, 2003) oparte na modelu Dugdale'a (1960).

Wybór kształtu koncentratora naprężeń w postaci otworu wynika ze studialnego charakteru pracy i chęci porównań obliczanych wartości współczynników intensywności naprężeń, dla niektórych wartości kąta rozwarcia ramion rombu, z opublikowanymi (Noda i in. 1996, Savruk 1988). Prezentowane podejście może być z powodzeniem zastosowane do analizy procesu pękania w otoczeniu dowolnych symetrycznych koncentratorów naprężeń, w tym korbów ostrych i zaokrąglonych osłabiających przekrój próbki.

2. ZALEŻNOŚĆ POMIĘDZY WSPÓŁCZYNNIKAMI INTENSYwnOŚCI I KONCENTRACJI NAPRĘŻEŃ DLA KARBÓW OSTRYCH I ZAOKRĄGLONYCH

Wielkość naprężeń w wierzchołku karbu o kącie rozwarcia 2β zaokrąglonego krzywą o małym promieniu ρ określa wzór

$$\sigma_{\max} = R_I K_I^V \rho^{-\lambda} / \sqrt{2\pi} \quad (1)$$

gdzie K_I^V to uogólniony współczynnik intensywności naprężeń dla odpowiedniego karbu ostrego, a R_I nazywany jest współczynnikiem wygładzenia naprężeń (Benthem 1987). Wykładnik osobliwości λ przyjmuje się jako najmniejszy dodatni pierwiastek równania charakterystycznego

$$(1 - \lambda) \sin 2\alpha + \sin(2\alpha(1 - \lambda)) = 0, \quad \alpha = \pi - \beta. \quad (2)$$

Zależność parametru λ od kąta β również można aproksymować funkcją (Savruk, Kazberuk 2009):

$$\lambda \approx 1,247 \cos \beta - 1,312 \cos^2 \beta + 0,8532 \cos^3 \beta - 0,2882 \cos^4 \beta, \quad (3)$$

W pracy (Savruk i Kazberuk 2006) zaproponowano formułę aproksymacyjną do wyznaczania wartości współczynnika wygładzenia naprężeń R_I . Wzór dotyczy karbów zaokrąglonych łukiem kołowym i umożliwia oszacowanie R_I z błędem nie przekraczającym 0.4% dla dowolnego β . Uwzględniając niewielkie zmiany wprowadzone w pracy (Savruk i Kazberuk 2009) zależność ta ma postać następującą:

$$R_I = \frac{1 + 28,75\gamma + 98,04\gamma^2 - 102,1\gamma^3 + 47,4\gamma^4 - 8,465\gamma^5}{1 + 20,71\gamma} \quad (4)$$

gdzie $\gamma = \pi/2 - \beta$.

Wzory postaci (1) publikowało wielu autorów, m. in. Creager i Paris (1967), Neuber (1977), Benthem (1987), Lazzarin i Tovo (1996), obliczając wartości współczynnika wygładzenia naprężeń bądź jego analogów. W celu rozwiązania zagadnienia własnego na drodze analitycznej bądź numerycznej, odwzorowywano kształt nieskończonego klina wykorzystując różne krzywe gładkie mające w otoczeniu wierzchołka zmienny promień krzywizny (karby paraboliczne, hiperboliczne). W pracach Savruka i Kazberuka (2006, 2007) wykazano, że wielkość koncentracji naprężeń w wierzchołku rozrywanego symetrycznego karbu zależy od kształtu karbu w otoczeniu wierzchołka. Zatem określenie jednoznacznej zależności $R_I(\beta)$ możliwe jest jedynie dla ściśle określonej geometrii karbu. Słuszność takiego podejścia została udokumentowana w pracach Savruka i Kazberuka (2007, 2008).

3. KONCENTRACJA NAPRĘŻEŃ W WIERZCHOŁKU OTWORU ROMBOWEGO W ŚCISKANEJ PRÓBKCE WALCOWEJ

Rozważa się próbkę o przekroju kołowym osłabioną centralnie umieszczonym otworem o kształcie rombu (Rys. 1). Wierzchołki otworu są zaokrąglone łukami kołowymi o promieniu ρ . Stosunek wielkości promienia zaokrąglenia karbu do połowy rzutu długości rombu na oś x określa parametr $\varepsilon = \rho/l$. Stosunek wielkości otworu do promienia próbki R oznaczono jako $\gamma = l/R$. Zakłada się, że brzeg otworu (gładki kontur L) jest wolny od obciążeń zewnętrznych. Próbkę poddana jest działaniu równoważących się sił P przyłożonych wzdłuż średnicy walca. Siły te wywołują w wierzchołku A otworu koncentrację naprężeń rozciągających. Ze względu na wymaganą dokładność wyznaczenia wielkości naprężeń na brzegu analizowanego obszaru, obliczenia przeprowadzono metodą osobliwych równań całkowych (Savruk 1981).

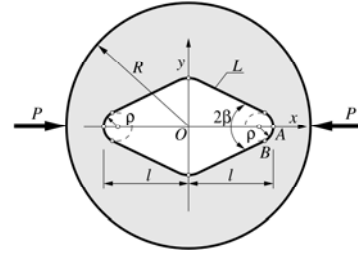
Zespolone potencjały naprężeń (Muskhelishvili 2003) zagadnienia brzegowego zapisano w postaci

$$\Phi_*(z) = \Phi_0(z) + \Phi(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_0(z) + \Psi(z), \quad (4)$$

gdzie potencjały

$$\Phi_0(z) = -\frac{\gamma}{2\pi} \frac{P}{l} \frac{R^2 + z^2}{R^2 - z^2}, \quad \Psi_0(z) = \frac{2\gamma}{\pi} \frac{P}{l} \frac{R^4}{(R^2 - z^2)^2}$$

opisują jednorodne pole naprężeń w ściskanym obszarze kołowym, a funkcje $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ określają poszukiwane zaburzenie naprężeń wywołane obecnością otworu L . Warunek graniczny na konturze karbu przyjmuje postać



Rys. 1 Otwór rombowy w obszarze kołowym

$$\sigma_n + i\tau_{ns} = p(t) = -\left\{ \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{dt}{dt} \left[t \overline{\Phi'_0(t)} + \overline{\Psi_0(t)} \right] \right\}, \quad t \in L \quad (5)$$

Przedstawienie całkowe rozwiązania zadania granicznego zapisano w postaci (Savruk 1981)

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \left[f_1(t, z) g'(t) dt + f_2(t, z) \overline{g'(t) dt} \right]$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \left[h_1(t, z) g'(t) dt + h_2(t, z) \overline{g'(t) dt} \right]$$

gdzie

$$f_1(t, z) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t-z} + \frac{\bar{t}}{z\bar{t}-R^2} \right], \quad f_2(t, z) = \frac{z(\bar{t}-R^2)(z\bar{t}-2R^2)}{2R^2(z\bar{t}-R^2)^2},$$

$$h_1(t, z) = \frac{1}{2} \left[-\frac{\bar{t}}{(t-z)^2} + \frac{\bar{t}^3}{(z\bar{t}-R^2)^2} \right],$$

$$h_2(t, z) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t-z} + \frac{\bar{t} \left[4R^4 - 3R^2 \bar{t}(z+t) + z\bar{t}^2(z+t) \right]}{(z\bar{t}-R^2)^3} \right].$$

Spełniając warunek graniczny (5), uzyskuje się osobliwe równanie całkowe

$$\frac{1}{\pi} \int_L \left[K(t, t') g'(t) dt + L(t, t') \overline{g'(t) dt} \right] = p(t'), \quad t' \in L, \quad (6)$$

którego jądra mają postać

$$K(t, t') = f_1(t, t') + \overline{f_2(t, t')} + \frac{dt'}{dt} \left[t' \overline{g_2(t, t')} + \overline{h_2(t, t')} \right]$$

$$L(t, t') = f_2(t, t') + \overline{f_1(t, t')} + \frac{dt'}{dt} \left[t' \overline{g_1(t, t')} + \overline{h_1(t, t')} \right]$$

gdzie $g_\alpha(t, t') = f_\alpha'(t, t')$, $\alpha = 1, 2$.

Równanie konturu otworu L zapisano w postaci parametrycznej $t = l\omega(\xi)$, ($0 \leq \xi \leq 2\pi$). Dokonując zamiany zmiennych, równanie całkowe (6) zapisuje się w postaci kanonicznej

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [M(\xi, \eta)u(\xi) + N(\xi, \eta)\overline{u(\xi)}] d\xi = p(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad (7)$$

$$M(\xi, \eta) = IK(\omega(\xi), \omega(\eta)), \quad N(\xi, \eta) = IL(\omega(\xi), \omega(\eta)), \\ u(\xi) = g'(\omega(\xi))\omega'(\xi), \quad p(\eta) = p(\omega(\eta)).$$

Poszukiwana 2π -okresowa ciągła funkcja $u(\xi)$ ma quasi-osobliwości w otoczeniu wierzchołków rombu. W celu zagęszczenia węzłów kwadratur całkowania i węzłów kolokacji w otoczeniu wierzchołków otworu zastosowano następującą zamianę zmiennych (Savruk, Kazberuk 2007)

$$\xi = G(\tau) = \tau - (1/4)\sin 4\tau, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi; \\ \eta = G(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (8)$$

W rezultacie uzyskuje się równanie całkowe postaci

$$\frac{1}{\pi} \int [M(\xi, \eta)u_*(\tau) + N(\xi, \eta)\overline{u_*(\tau)}] G'(\tau) d\tau = p(\theta), \quad (9)$$

przy $0 \leq \theta \leq 2\pi$ oraz $u_*(\tau) = u(G(\tau))$, $p_*(\theta) = p(G(\theta))$.

Dyskretnym analogiem równania całkowego jest algebraiczny układ równań liniowych (Savruk 1981)

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{4n} [M(\xi_k, \eta_m)u_*(\tau_k) + N(\xi_k, \eta_m)\overline{u_*(\tau_k)}] G'(\tau_k) = p_*(\theta_m), \quad (10)$$

gdzie

$$\xi_k = G(\tau_k), \quad \tau_k = \frac{\pi(2k-1)}{4n}, \\ \eta_m = G(\theta_m), \quad \theta_m = \frac{2\pi(m-1)}{4n}, \quad k, m = \overline{1, 4n}.$$

Uwzględniając symetrię zadania względem osi Ox i Oy , rząd układu równań (10) zostaje zmniejszony czterokrotnie. Nakładając warunki wynikające z symetrii na poszukiwaną postać funkcji rozwiązania $u_*(2\pi - \tau) = \overline{u_*(\tau)}$ i $u_*(\pi - \tau) = -\overline{u_*(\tau)}$, a także warunki zerowania się naprężeń stycznych w punktach leżących na osiach symetrii, otrzymuje się układ \bar{n} zespolonych równań algebraicznych z \bar{n} niewiadomych wartości funkcji $u_*(\tau_k)$, $k = \overline{1, \dots, n}$. Po jego rozwiązaniu wyznacza się zespolone potencjały naprężeń (4), określające stan naprężeń i odkształceń w całej płaszczyźnie sprężystej. Obliczenie wartości naprężenia normalnego σ_s w punktach leżących na brzegu otworu przeprowadza się korzystając bezpośrednio ze znalezionej funkcji $u_*(\tau)$ (Savruk i in. 1989). Współczynnik koncentracji naprężeń w wierzchołku A (Rys.1) otworu oblicza się korzystając ze wzoru

$$k_A = -4\text{Im}[u_*(0)/\omega'(0)], \quad (11)$$

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch niezależnych parametrów – γ zmieniającego się od 0,05 do 0,9875 i kąta rozwarcia ramion rombu 2β od 0 do $\pi/4$. Uogólnione

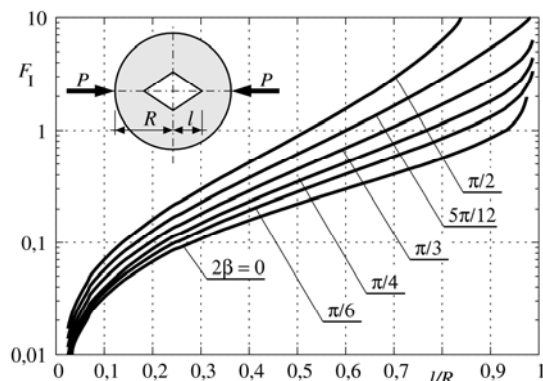
współczynniki intensywności naprężeń K_I^V w ostrym narożu otworu obliczono ze wzoru (Savruk, Kazberuk 2006)

$$K_I^V = (\sqrt{2\pi}/R_1) l^\lambda \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon^\lambda (\sigma_s)_{\max}. \quad (12)$$

Zadawalającą dokładność przejścia granicznego (12) osiągnięto przy wartościach ε równych od 0,00001 do 0,0001 w zależności od wielkości kąta β . Przebieg wartości bezwymiarowego współczynnika intensywności naprężeń

$$F_I^V = K_I^V / (Pl^{\lambda-1} \sqrt{\pi}) \quad (13)$$

w funkcji parametru γ przedstawiono na Rys. 2.



Rys. 2 Uogólniony bezwymiarowy współczynnik intensywności naprężeń F_I^V w funkcji parametru $\gamma=l/R$.

Obliczone wartości bezwymiarowego współczynnika intensywności naprężeń dla $2\beta = 0$ zgadzają się z wartościami podawanymi w literaturze dla tarczy kołowej osłabionej szczeliną (patrz np. Savruk 1988), różnice w wynikach nie przekraczają 0,1%.

Dla kilku wybranych wartości parametru $\gamma = \{0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5\}$ przeprowadzono aproksymację funkcji bezwymiarowego, uogólnionego współczynnika intensywności naprężeń w zależności od kąta rozwarcia ramion wierzchołka rombu. W przedziale $0 \leq \beta \leq \pi/4$ funkcję przybliżyła z błędem nie przekraczającym 0,5%, wielomian 3-go stopnia postaci

$$F_I^V \approx a + bx + cx^2 + dx^3, \quad x = \text{tg } \beta, \quad (14)$$

Wartości współczynników we wzorze (14) podano w Tab. 1.

Tab. 1. Współczynniki wielomianu (14) aproksymującego wartość uogólnionego współczynnika intensywności naprężeń

$\gamma = l/R$	a	b	C	D
0,2	0,06748	0,00226	0,1233	-0,0321
0,3	0,19843	0,01522	0,2074	-0,0335
0,4	0,15828	0,04529	0,3135	0,0000
0,5	0,22079	0,09856	0,4471	0,1195

4. KRYTYCZNY WSPÓŁCZYNNIK INTENSYWNOŚCI NAPRĘŻEŃ

Przeprowadzając badania na opisywanych próbkach i wykorzystując wzór (13) można w sposób doświadczalny wyznaczyć funkcję krytycznego współczynnika intensywności naprężeń $K_{Ic}^V(\beta)$, będącą podstawą naprężeniowych kryteriów zniszczenia elementów konstrukcji (Seweryn 2003). Dla kąta rozwarcia ramion karbu $\beta=0$, czyli dla przypadku szczeliny fizycznej, możliwe jest (*Comprehensive Structural Integrity 2003*) wyznaczenie stałej materiałowej K_{Ic} . Wartość tej stałej można również ustalić wykorzystując kryterium odkształceniowe przedstawione w pracy Savruka i inych (2003), wiążące funkcję krytycznego uogólnionego współczynnika intensywności naprężeń z funkcją rozwarcia rysy $\delta_I(\beta)$ w wierzchołku karbu V. Dla materiałów kruchych, dla których zasięg strefy plastycznej jest mały w porównaniu z wymiarami karbu, wartości funkcji $\delta_I(\beta)$ zależą jedynie od stałych materiałowych. Na podstawie (Savruk i inni 2003) krytyczny, uogólniony współczynnik intensywności naprężeń wyraża się zależnością

$$K_{Ic}^V(\beta) = (\sigma_Y)^{1-2\lambda} \left[K_{Ic}^2 / \bar{\delta}_I(\beta) \right]^\lambda, \quad (15)$$

gdzie naprężenie σ_Y odpowiada granicy plastyczności materiału. Bezwymiarową wartość względnego rozwarcia rysy $\delta_I(\beta)$ można obliczyć ze wzoru (Savruk i inni 2003)

$$\bar{\delta}_I(\beta) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\lambda}{1-\lambda} \left[\frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(3/2-\lambda)} \right]^{1/\lambda}. \quad (16)$$

Wykorzystując (13) i (15) krytyczny współczynnik intensywności naprężeń jest obliczany z zależności

$$K_{Ic} = \left[\sqrt{\pi} F_I^V \bar{\delta}_I(\beta) P_c I^{\lambda-1} (\sigma_Y)^{2\lambda-1} \right]^{1/(2\lambda)}, \quad (17)$$

w której P_c jest siłą niszczącą próbkę.

5. WNIOSKI

Przedstawioną w pracy metodę można zastosować do dostatecznie dokładnego wyznaczania krytycznego współczynnika intensywności naprężeń materiałów kruchych i quasi-kruchych na próbkach o różnych kształtach z wykształconymi koncentratorami naprężeń w postaci szczelin oraz karbów ostrych i zaokrąglonych.

Zastosowanie odkształceniowego kryterium zniszczenia, zawierającego jedynie standardowe stałe materiałowe pozwala na określenie krytycznego współczynnika intensywności naprężeń materiału na podstawie badań przeprowadzonych na próbkach z karbami co istotnie ułatwia wykonanie próbek – formowanych lub wycinanych z konstrukcji.

Zaprezentowane podejście może być również z powodzeniem zastosowane do analizy procesu pęknięcia w otoczeniu koncentratorów naprężeń umieszczonych w dowolnym elemencie konstrukcyjnym.

LITERATURA

1. **Benthem J.P.** (1987), Stresses in the region of rounded corners, *Int. J. Solids Struct.*, 23, 239-252.
2. **Brandt A.M.**, (1979) Badania doświadczalne w mechanice zniszczenia kompozytów o matrycach cementowych, Prace IPPT PAN, 29, Warszawa.
3. **Comprehensive Structural Integrity**, (2003), I. Milne, R. O. Ritchie, B. Karihaloo eds., v. 2, Fundamental Theories and Mechanisms of Failure, Elsevier.
4. **Creager M., Paris P.C.** (1967), Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking, *Int. J. Fract. Mech.*, 3, 247-252.
5. **Dugdale D.S.** (1960), Yielding of steel sheets containing slits, *J. Mech. Phys. Solids*, 8, 2, 100-104.
6. **Golewski G., Sadowski T.** (2006), Model kruchych uszkodzeń betonu, *Materiały budowlane*, 2, 11-14.
7. **Lazzarin P., Tovo R.** (1996), A unified approach to the evaluation of linear elastic stress field in the neighbourhood of crack and notches, *Int. J. Fract.*, 78, 3-19.
8. **Muskhelishvili N.I.** (2003) *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Springer.
9. **Neuber H.** (1977), Die halb elliptische Kerbe mit Riss als Beispiel zur Korrelation von Mikro- und Makrospannungskonzentrationen, *Ing.-Arch.*, 46, 389-399.
10. **Noda N.-A., Oda K., Inoue T.** (1996), Analysis of newly-defined stress intensity factors for angular corners using singular integral equations of the body force method, *Int. J. Fract.*, 76, 243-261.
11. **Savruk M. P., Kazberuk A.** (2008) Plane periodic boundary-value problem of elasticity theory for a half-plane with curvilinear edge. *Material Science*, 44(4), 461-470.
12. **Savruk M.P.** (1981), *Dvumernye zadachi uprugosti dla tel s trešinami*, Nauk. Dumka.
13. **Savruk M.P.** (1988) *Koëfficienty intensywnosti naprężenij v telah s trešinami, Meh. razrušeniâ i pročnosť materialov*. Sprav. posobie pod red. V.V.Panasüka, t.2, Nauk. Dumka.
14. **Savruk M.P., Kazberuk A.** (2006), Relationship between the stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded notches, *Materials Science*, 42, 725-738.
15. **Savruk M.P., Kazberuk A.** (2007), A unified approach to problems of stress concentration near V-shaped notches with sharp and rounded tip, *Int. Appl. Mech.*, 43, 2, 182-196.
16. **Savruk M.P., Kazberuk A.** (2009) Fracture mechanics problems for solids with V-shaped notches, *Materials Science*, 45, 2, (w druku).
17. **Savruk M.P., Osiv P.N., Prokopčuk I.V.** (1989), *Čislennyj analiz v ploskih zadacah teorii trešin*, Nauk. Dumka.
18. **Savruk M.P., Zavodovs'kyi A.M., Panasyuk V.E., Bida N.M.** (2003), Deformation fracture criterion for bodies with V-notches under symmetric loading, *Materials Science*, 39, 2, 185-196.
19. **Seweryn A.** (2003) *Metody numeryczne w mechanice pęknięcia*. Warszawa, IPPT PAN.

DETERMINATION OF THE FRACTURE TOUGHNESS PARAMETERS OF THE QUASI-BRITTLE MATERIAL USING CYLINDRICAL SPECIMENS

Abstract: The method of determination of critical SIF of brittle and quasi-brittle material is presented. For the splitting cylindrical specimen with central diamond-shaped hole the stress intensity factors were calculated for arbitral vertex angle. The values of critical SIF was obtained considering the deformation fracture criterion based on Dugdale model of failure with assumption that fracture process zone starts from notch tip.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego W/WM/2/09.