

# EFEKTY NAPRĘŻENIOWE, DEFORMACYJNE I ENERGETYCZNE W OKOLICY WIERZCHOŁKOWEJ SZCZELINY Z POJEDYNCZYM ODGAŁĘZIENIEM

Tomasz BOGUSZEWSKI\*, Krzysztof MOLSKI\*

\*Katedra Budowy i Eksploatacji Maszyn, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

[tboguszewski@doktoranci.pb.edu.pl](mailto:tboguszewski@doktoranci.pb.edu.pl), [kmolski@pb.edu.pl](mailto:kmolski@pb.edu.pl)

**Streszczenie:** W pracy analizowano pola naprężeń i względne przemieszczenia brzegów niewielkiego pęknięcia powstałego w wierzchołku płaskiej szczeliny pod pewnym kątem do jej płaszczyzny. Wykorzystując metodę elementów skończonych *MES* zbadano charakter, zasięg oraz wzajemne oddziaływanie sąsiadujących osobliwych pól naprężeń – w okolicy wierzchołkowej odgałęzienia i w ostrym narożu. Dla płaskiego i antypłaskiego stanu odkształcenia określono ilościowe i jakościowe różnice tych oddziaływań w zależności od kierunku nachylenia odgałęzionego pęknięcia i rodzaju obciążenia zewnętrznego. Względne rozwarście brzegów odgałęzionej szczeliny opisano odpowiednimi funkcjami uwzględniającymi charakter obu osobliwości oraz porównano kształty rozwarścia z przybliżonym rozwiązaniem wynikającym z lokalnych wartości współczynników intensywności naprężeń. Zaproponowano analityczno-numeryczną metodę wyznaczania uogólnionej wartości współczynnika uwalniania energii  $G$  w takich przypadkach.

## 1. WPROWADZENIE

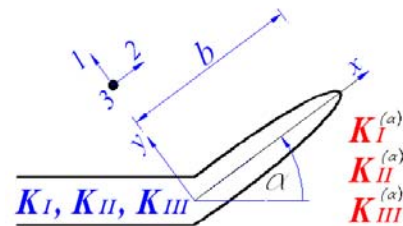
Obliczanie komponentów  $\sigma_{ij}$  pól naprężeń w okolicy wierzchołkowej pęknięcia jest ważnym elementem oceny wytrzymałości elementów konstrukcyjnych i nie stanowi problemu w sytuacji, gdy pęknięcie wzrasta stycznie do kierunku szczeliny głównej lub wtedy, gdy trajektoria szczeliny zmęczeniowej łagodnie się zakrzywia. Można wówczas zastosować znane rozwiązania analityczne opracowane przez Sneddon (1946) i Irwina (1957). Wyznaczone w ten sposób wartości naprężeń i względnych przemieszczeń stanowią podstawę do wyznaczania wielkości charakterystycznych decydujących o prędkości pęknięcia, w tym energii uwalnianej w czasie propagacji pęknięcia. Ma ona istotne znaczenie przy formułowaniu kryteriów pęknięcia, zwłaszcza w złożonych stanach obciążeń.

W przypadku, gdy pojedyncze odgałęzione pęknięcie powstaje pod pewnym kątem  $\alpha$  do kierunku szczeliny głównej (Rys. 1), składniki względnych przemieszczeń jego brzegów nie są znane, a wartości współczynników intensywności naprężenia  $K_I^{(\alpha)}$ ,  $K_{II}^{(\alpha)}$  i  $K_{III}^{(\alpha)}$  w otoczeniu wierzchołka nadpęknięcia mogą diametralnie odbiegać od ich odpowiedników  $K_I$ ,  $K_{II}$  i  $K_{III}$  prawdziwych dla szczeliny głównej bez odgałęzienia. Zagadnieniom tym poświęcono wiele prac, jak np.: Palaniswamy i Knauss (1972), Husain i inni (1974), Chatterjee (1975), Wang (1978), Seweryn (2004), w których zaproponowano różne metody oszacowania pól przemieszczeń oraz zmian energii w zależności od kąta nadpęknięcia i obciążeń zewnętrznych.

Nawet niewielkie odgałęzione pęknięcie tworzy ostre wewnętrzne naroże, które, oprócz wierzchołka szczeliny, staje się kolejnym miejscem występowania osobliwego pola naprężeń. Ponieważ oba punkty osobliwe położone są blisko siebie, konieczne staje się zbadanie ich wzajemnego oddziaływania.

## 2. CEL I ZAKRES PRACY

Celem pracy było zbadanie oddziaływania sąsiadujących osobliwych pól naprężeń – wierzchołka i naroża – dla odgałęzionej szczeliny oraz wyznaczenie względnych przemieszczeń brzegów odgałęzienia, umożliwiających określenie wartości uwalnianej energii. Analizowano niewielkie odgałęzienie o długości  $b$  powstałe w wierzchołku szczeliny głównej pod kątem  $\alpha$ . Rozpatrzono trzy niezależne przypadki obciążenia odniesione do płaszczyzny szczeliny głównej: dwuosiowe wszechstronne rozciąganie, ścinanie wzdłużne i ścinanie antypłaskie (poprzeczne). Wartości pól względnych przemieszczeń brzegów odgałęzienia wyznaczono metodą elementów skończonych – *MES*.



**Rys. 1.** Niewielkie pęknięcie o długości  $b$  powstałe pod kątem  $\alpha$  do płaszczyzny szczeliny głównej oraz odpowiednie współczynniki intensywności naprężenia.

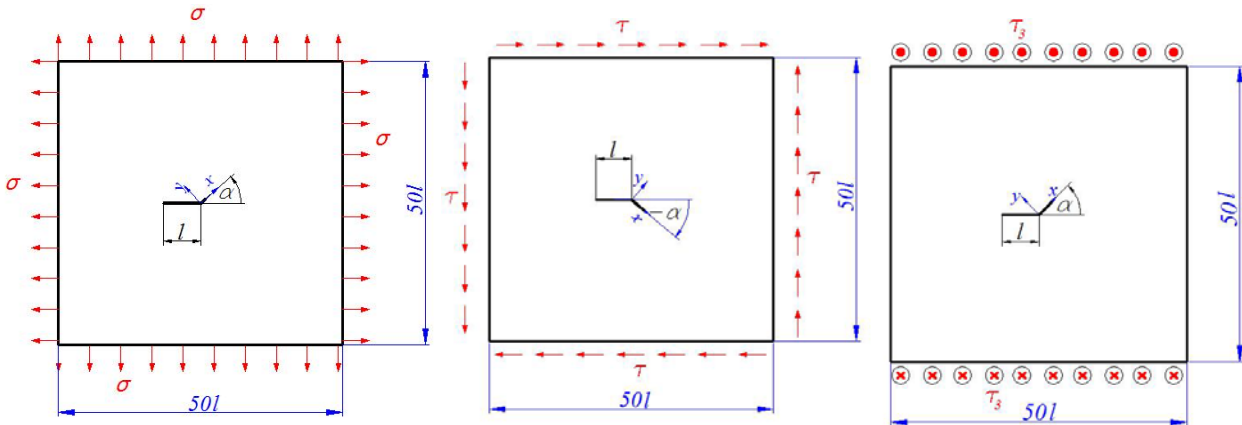
Zakres pracy obejmował:

- wybór geometrii pęknięcia i sposobu jego modelowania;
- dobranie odpowiedniej siatki elementów skończonych;
- obliczenie względnych przemieszczeń brzegów;
- aproksymację względnych przemieszczeń brzegów odgałęzionego pęknięcia odpowiednimi funkcjami uwzględniającymi charakter sąsiadujących osobliwości;
- obliczenie współczynnika  $G$  uwalniania energii;

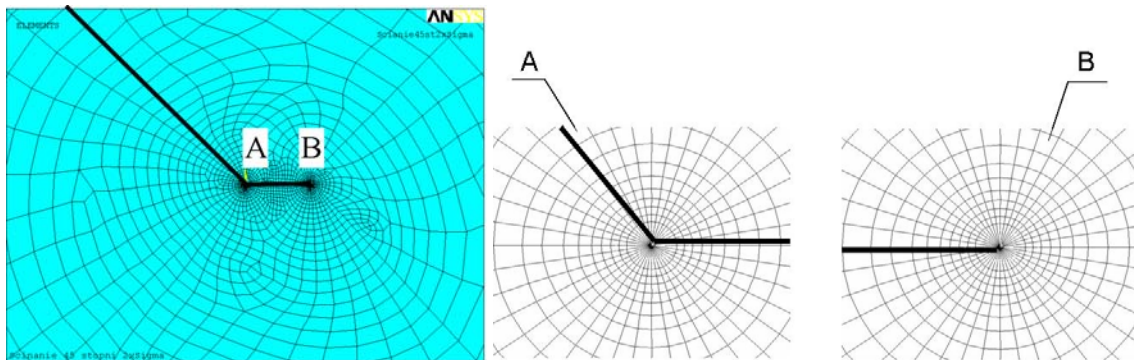
- wyznaczenie zasięgu oddziaływania osobliwych pól naprężeń w okolicy wierzchołka szczeliny i ostrego naroża przy założeniu, że wartości odpowiedniej funkcji opisującej osobliwość odbiegają o  $\pm 1\%$  od wartości przemieszczeń otrzymanych metodą elementów skończonych *MES*.

### 3. MODEL NUMERYCZNY *MES*

Trzy płaskie prostokątne tarcze, przedstawione schematycznie na Rys. 2, opisano odpowiednio zagęszczoną siatką elementów skończonych (Rys. 3).



**Rys. 2.** Szczelina o długości  $l$  z niewielkim odgałęzieniem pod kątem  $\alpha$  w tarczy: a) rozciąganej, b) ścinanej wzdłużnie c) oraz ścinanej poprzecznie. Obciążenia zewnętrzne odniesione są do płaszczyzny szczeliny głównej.



**Rys. 3.** Siatka elementów skończonych w okolicy naroża i wierzchołka odgałęzienia.

Przyjęto następujące obciążenia:

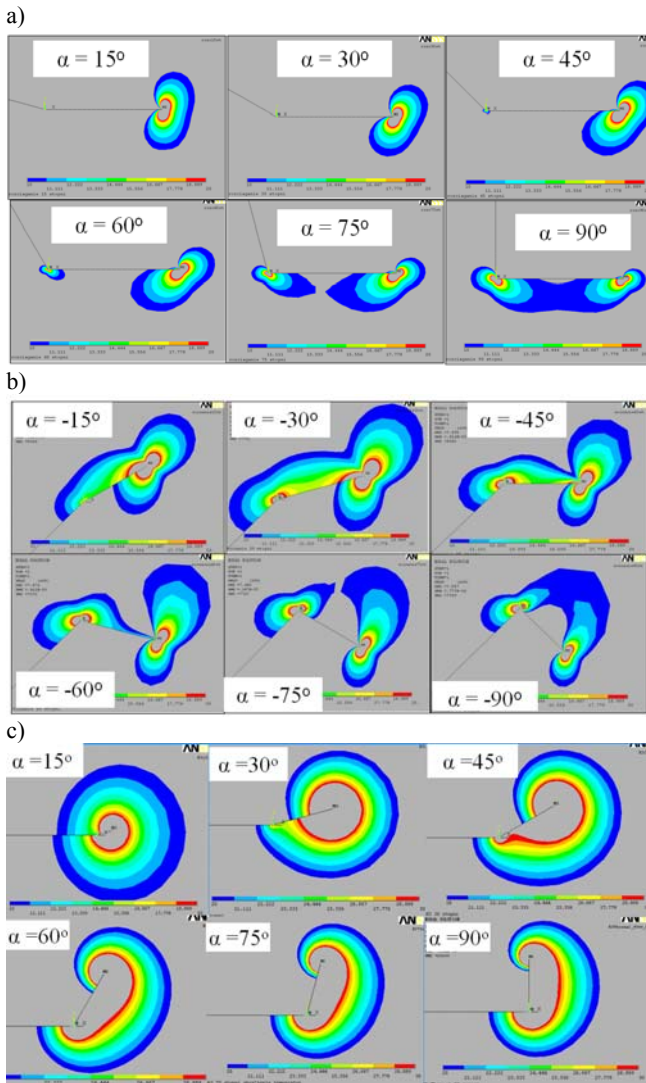
- dla rozciągania i ścinania wzdłużnego – jednorodne jednostkowe obciążenie nominalne,  $\sigma$  i  $\tau$ , odniesione do płaszczyzny szczeliny głównej;
- dla ścinania poprzecznego, jednorodne jednostkowe naprężenie styczne  $\tau_3$  skierowane prostopadłe do płaszczyzny tarczy i również odniesione do płaszczyzny szczeliny głównej.

W rozpatrywanych przypadkach przyjęto jednostkową długość szczeliny głównej  $l$  oraz stosunek długości  $b/l$  równy 0,01 i 0,005, w celu sprawdzenia stabilności uzyskanego rozwiązania. Zmieniało kąt  $\alpha$  nachylenia odgałęzienia w stosunku do szczeliny głównej w zakresie od  $0^\circ$  do  $90^\circ$  lub do  $-90^\circ$ , co  $15^\circ$ . Kierunek odgałęzienia, wyrażony kątem  $\alpha$ , dobrano w sposób odzwierciedlający rzeczywiste rozwarcie szczeliny pod obciążeniem, unikając w rozwiązaniu *MES* fikcyjnego przenikania się zaciskanych brzegów. Do obliczeń wykorzystano program ANSYS. Dla przypadku rozciągania i ścinania wzdłużnego użyto ośmiowęzłowych elementów skończonych typu PLANE82 w płaskim stanie odkształcenia, natomiast dla przypadku ścinania poprzecznego – ośmiowęzłowego elementu PLANE77.

### 4. POLA NAPRĘŻEŃ W STREFIE ODGAŁĘZIENIA

Na Rys. 4a) – 4c) przedstawiono mapy naprężeń zredukowanych zgodnie z hipotezą H-M-H, dla okolicy odgałęzionego pęknięcia w trzech przypadkach obciążenia.

Wyniki obliczeń numerycznych wskazują, że wielkość osobliwego pola naprężeń tworzącego się w strefie ostrego naroża silnie zależy od kąta  $\alpha$ . Jeżeli kąt ten jest niewielki, np. poniżej  $45^\circ$ , zasięg tego pola jest w zasadzie pomijalny w stosunku do naprężeń w okolicy wierzchołkowej szczeliny. Powyżej kąta  $45^\circ$ , a zwłaszcza dla kąta  $\alpha$  bliskiego  $90^\circ$ , zarówno zasięg jak i wielkość pola naprężeń jest porównywalny z naprężeniami w strefie wierzchołkowej szczeliny i może być miejscem inicjacji dodatkowego pęknięcia zmęczeniowego powstającego za wierzchołkiem odgałęzienia. Widoczny jest również efekt łączenia się i wzajemnego wzmocnienia obu stref naprężeń, co powoduje zwiększenie zasięgu oddziaływania szczeliny z odgałęzionym pęknięciem.



**Rys. 4.** Pola naprężeń zredukowanych według hipotezy H-M-H w okolicy odgałężenia dla: a) wszechstronnego rozciągania, b) ścinania wzdłużnego, c) ścinania antypłaskiego. Obciążenia odniesione do płaszczyzny szczeliny głównej.

### 5. OPIS ANALITYCZNY ROZWARCIA SZCZELINY

Względne przemieszczenia brzegów odgałężenia uzyskane dla obciążeń wzdłużnych i poprzecznych, aproksymowano w każdym przypadku następującą funkcją:

$$\Delta u_j(x) = (A_j \cdot x^3 + B_j \cdot x^2 + C_j \cdot x + D_j) \cdot \sqrt{b-x} + x^{\lambda_j} \cdot E_j \cdot (1 - (x/b)^2) \quad (1)$$

której współczynniki  $A_j, B_j, C_j, D_j, E_j$  dopasowano za każdym razem metodą najmniejszych kwadratów do rozwiązania numerycznego *MES*. Wartości wykładników  $\lambda_j$  obliczono z równań charakterystycznych, zamieszczonych w pracy Seweryna (2004) dla zagadnień ostrych korbów. Przyjęta funkcja (1) uwzględnia charakter obu osobliwości związanych z ostrym narożem i wierzchołkiem szczeliny, dopasowując odpowiednie wielomiany do obliczonych wartości przemieszczeń. Początek układu współrzędnych przyjęto w ostrym narożu, a położenie wierzchołka odgałężenia odpowiada wartości  $b$ .

W celu wyznaczenia zasięgu oddziaływania członów osobliwych pól naprężeń w okolicy wierzchołkowej i w otoczeniu ostrego naroża, dokonano w każdym przypadku aproksymacji względnych przemieszczeń obydwu brzegów odgałężenia dla okolicy naroża wzorami (2) lub (3) oraz wierzchołka wzorem (4). Dla odróżnienia opisu przemieszczeń w okolicy ostrego naroża od przemieszczeń powierzchni odgałężenia za wierzchołkiem, oznaczono te pierwsze symbolem  $\Delta n_j$ , natomiast drugie  $\Delta w_j$ . Dla obciążeń wzdłużnych i poprzecznych opisano rozwarcie brzegów odgałężonej szczeliny przy narożu funkcjami:

$$\Delta n_j(x) = R_j + S_j \cdot x^{\lambda_j} \quad (2)$$

dla wszechstronnego rozciągania i ścinania antypłaskiego ( $j=1$  i  $j=3$ ), oraz

$$\Delta n_j(x) = R_j + S_j \cdot x^{\lambda_j} + T_j \cdot x \quad (3)$$

dla ścinania wzdłużnego ( $j=2$ ). Współczynniki  $R_j, S_j, T_j$  obliczano dla każdego przypadku metodą najmniejszych kwadratów, dopasowując opis analityczny, dany wzorami (2) i (3), do wyników *MES*. We wzorze (3) dodano również pierwszy człon regularny o wykładniku  $\lambda_j=1$  występujący w równaniu charakterystycznym, mający istotny wpływ na rozwiązanie.

Natomiast w okolicy wierzchołkowej wykorzystano klasyczne wzory na przemieszczenia względne w zależności od współczynnika  $K_j^{(\alpha)}$ :

$$\Delta w_j(x) = \frac{4\sqrt{2} \cdot (1-\nu^2)}{\sqrt{\pi} \cdot E} \cdot K_j^{(\alpha)} \cdot \sqrt{b-x}, \text{ dla } j = 1, 2 \quad (4)$$

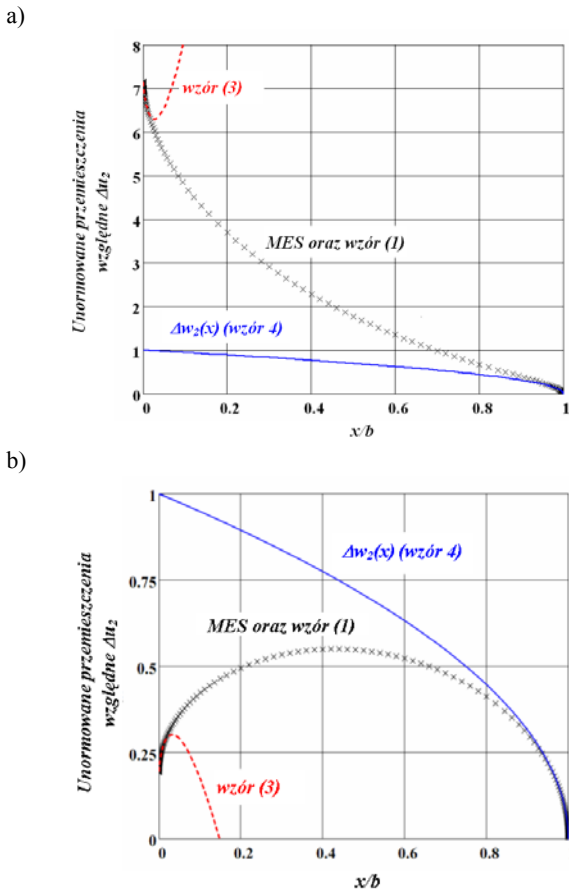
$$\Delta w_j(x) = \frac{4\sqrt{2} \cdot (1+\nu)}{\sqrt{\pi} \cdot E} \cdot K_j^{(\alpha)} \cdot \sqrt{b-x}, \text{ dla } j = 3$$

Dla zachowania przejrzystości wyników, wszystkie wyznaczone względne przemieszczenia brzegów małego odgałężenia unormowano względem wartości  $N_j$  opisanych wzorami (5), które odpowiadają przemieszczeniom brzegów w odległości  $b$  za wierzchołkiem hipotetycznej szczeliny prostoliniowej o współczynniku intensywności naprężenia  $K_j^{(\alpha)}$ .

$$N_j = \frac{4\sqrt{2} \cdot (1-\nu^2)}{\sqrt{\pi} \cdot E} \cdot K_j^{(\alpha)} \cdot \sqrt{b}, \text{ dla } j = 1, 2 \quad (5)$$

$$N_j = \frac{4\sqrt{2} \cdot (1+\nu)}{\sqrt{\pi} \cdot E} \cdot K_j^{(\alpha)} \cdot \sqrt{b}, \text{ dla } j = 3$$

Na rysunku 5a) przedstawiono unormowane przemieszczenia względne brzegów odgałężenia w kierunku osi  $x$  dla kąta  $\alpha = -75^\circ$ , przy obciążeniu ścinającym w płaszczyźnie szczeliny głównej. Dla porównania zamieszczono hipotetyczne przemieszczenia obliczone według wzorów (3) i (4). Widoczne są znaczące różnice ilościowe i jakościowe między rozwiązaniem *MES* a rozwiązaniami wykorzystującymi lokalne człony osobliwe przemieszczeń. W wyniku zastosowanie wzoru (1) do opisu rozwarcia brzegów na całej długości nadpęknięcia otrzymano krzywe praktycznie pokrywające się z rozwiązaniem *MES*, których nie pokazano na rysunkach 5 – 7 dla zachowania przejrzystości.



**Rys. 5.** Unormowane przemieszczenia względne brzegów odgałęzienia przy ścinaniu w płaszczyźnie szczeliny głównej:  $\alpha = -75^\circ$  (Rys. 4a),  $\alpha = -90^\circ$  (Rys. 4b),  $x$  – rozwiązanie MES, linia ciągła – obliczenia według  $K_{II}^{(\alpha)}$  w wierzchołku odgałęzienia, linia przerywana – obliczenia na podstawie wzoru (3).

**Tab. 1.** Wpływ kąta  $\alpha$  na rozwarcie brzegów odgałęzienia dla przypadku rozciągania wszechstronnego. Przemieszczenia wzdłużne i poprzeczne.

Rozciąganie wszechstronne				
Kąt $\alpha$ [ $^\circ$ ]	Przemieszczenie wzdłużne		Przemieszczenie poprzeczne	
	Zasięg naroża [% b]	Zasięg wg. $K_{II}^{(\alpha)}$ [% b]	Zasięg naroża [% b]	Zasięg wg. $K_I^{(\alpha)}$ [% b]
45	9%	79%	1%	98%
60	3%	65%	1%	89%
75	13%	52%	1%	75%
90	3%	32%	1%	73%

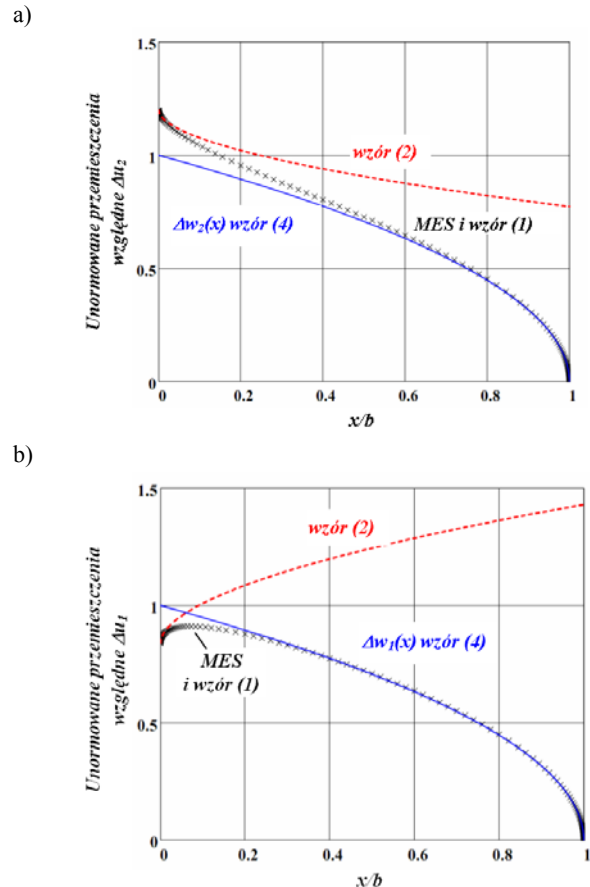
Podobne porównanie przedstawiono na rysunku 5b) dla odgałęzienia pod kątem  $\alpha = -90^\circ$  i przy obciążeniu ścinającym  $\tau$  w płaszczyźnie szczeliny głównej. Wybrane krzywe względnych przemieszczeń brzegów odgałęzionego pęknięcia przedstawiono również na rysunkach 6 i 7.

Wartości liczbowe analizy procentowego zasięgu poszczególnych członów osobliwych przedstawiono w tabelach 1 – 3.

Z przeprowadzonej analizy względnych przemieszczeń brzegów pęknięcia wynika, że zarówno kształt jak i wielkość rozwarcia zależą od kąta  $\alpha$  oraz typu obciążenia, ponadto jest jakościowo odmienny od znanego rozwiązania

opartego na teorii szczelin prostoliniowych. W analizowanych przypadkach zasięg oddziaływania pola przemieszczeń pochodzącego od ostrego naroża zmieniał się od ok. 1% do 17% długości odgałęzienia, natomiast zasięg osobliwości wierzchołkowej zmieniał się w zakresie od 5% do 98% długości odgałęzienia.

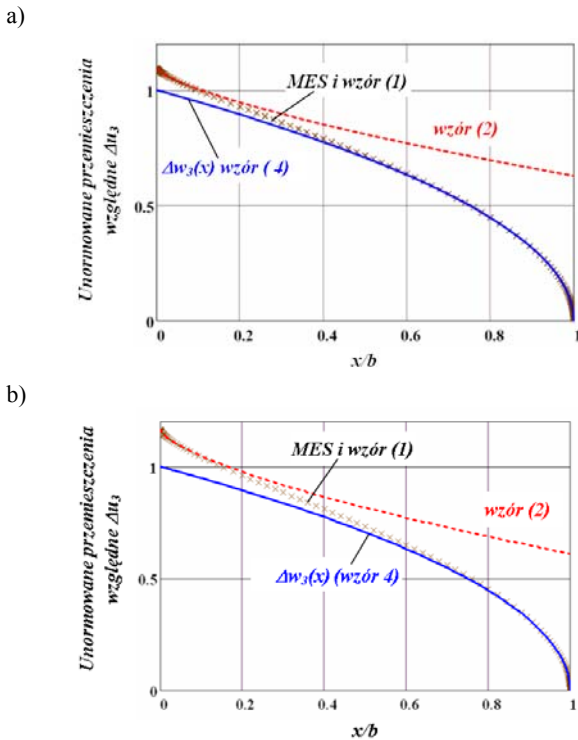
Wyznaczenie wartości przemieszczeń brzegów w strefie pośredniej (środkowej) odgałęzionego pęknięcia możliwe jest wyłącznie metodami numerycznymi, a wszelkie próby interpolacji, bez uwzględniania rozwiązania MES, obarczone były zbyt dużymi błędami.



**Rys. 6.** Przemieszczenia względne brzegów odgałęzienia przy rozciąganiu w płaszczyźnie szczeliny głównej,  $\alpha=90^\circ$ ,  $x$  – rozwiązanie MES, linia ciągła – obliczenia według  $K_{II}^{(\alpha)}$  (Rys. 6a) oraz według  $K_I^{(\alpha)}$  (Rys. 6b) w wierzchołku odgałęzienia, linia przerywana – obliczenia na podstawie wzoru (2).

**Tab. 2.** Wpływ kąta  $\alpha$  na rozwarcie brzegów odgałęzienia dla przypadku ścinania w płaszczyźnie szczeliny. Przemieszczenia wzdłużne i poprzeczne.

Ścinanie w płaszczyźnie szczeliny				
Kąt $\alpha$ [ $^\circ$ ]	Przemieszczenie wzdłużne		Przemieszczenie poprzeczne	
	Zasięg naroża [% b]	Zasięg wg. $K_{II}^{(\alpha)}$ [% b]	Zasięg naroża [% b]	Zasięg wg. $K_I^{(\alpha)}$ [% b]
-45	5%	25%	3%	72%
-60	4%	14%	3%	25%
-75	1%	5%	3%	26%
-90	2%	7%	3%	27%



**Rys. 7.** Przesunięcie względne brzegów odgałęzienia dla ścinania antypłaskiego: a)  $\alpha=75^\circ$ , b)  $\alpha=90^\circ$ , x – MES, linia ciągła – obliczenia według  $K_{III}^{(\alpha)}$  w wierzchołku odgałęzienia, linia przerywana – obliczenia na podstawie wzoru (2).

**Tab. 3.** Wpływ kąta  $\alpha$  na rozwarcie brzegów odgałęzienia dla przypadku ścinania antypłaskiego.

Ścinanie antypłaskie		
Kąt $\alpha$ [°]	Przesunięcie wzdłużne	
	Zasięg naroża [% b]	Zasięg wg. $K_{III}^{(\alpha)}$ [% b]
45	8%	88%
60	10%	67%
75	11%	53%
90	17%	22%

## 6. WSPÓLCZYNNIK UWALNIANIA ENERGII

Wielkość energii uwalnianej w wyniku powstania odgałęzienia o długości  $b$  i wyrażonej współczynnikiem  $G$ , wyznaczono z następującego wzoru:

$$G(\alpha) = \left| \begin{matrix} G_1(\alpha) + \\ G_2(\alpha) + \\ G_3(\alpha) \end{matrix} \right| = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cdot b} \left| \begin{matrix} \int_0^b \sigma_{\alpha\alpha}(x) \cdot \Delta u_1(x) \cdot dx + \\ \int_0^b \tau_{xy}(x) \cdot \Delta u_2(x) \cdot dx + \\ \int_0^b \tau_{yz}(x) \cdot \Delta u_3(x) \cdot dx \end{matrix} \right| \quad (6)$$

gdzie:  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  – naprężenie normalne i styczne w płaszczyźnie odgałęzienia wynikające z rozwiązania analitycznego dla szczeliny głównej,  $\Delta u_j$  – względne przemieszczenia (wzdłużne lub poprzeczne) brzegów odgałęzienia opisane wzorem (1),  $b$  – długość odgałęzienia.

**Tab. 4.** Unormowane wartości współczynników  $G_j^*(\alpha)$  dla rozciągania obliczone proponowaną metodą oraz według Palaniswamy i Knaussa (1972)

Dwuosiowe rozciąganie						
Kąt $\alpha$ [°]	Obecne rozwiązanie			Rozwiązanie według [7]		
	$G_I(\alpha)$	$G_{II}(\alpha)$	$G(\alpha)$	$G_{IPK}(\alpha)$	$G_{IIPK}(\alpha)$	$G_{PK}(\alpha)$
0	0,992	0,000	0,992	1,000	0,000	1,000
15	0,943	0,016	0,959	0,949	0,016	0,966
30	0,806	0,057	0,864	0,814	0,057	0,870
45	0,619	0,105	0,723	0,628	0,103	0,731
60	0,420	0,140	0,559	0,433	0,134	0,567
75	0,249	0,148	0,397	0,266	0,140	0,406
90	0,124	0,131	0,255	0,140	0,119	0,259

**Tab. 5.** Unormowane wartości współczynników  $G_j(\alpha)$  dla ścinania w płaszczyźnie szczeliny obliczone proponowaną metodą oraz według Palaniswamy i Knaussa (1972)

Ścinanie w płaszczyźnie szczeliny						
Kąt $\alpha$ [°]	Obecne rozwiązanie			Rozwiązanie według Palaniswamy i Knaussa (1972)		
	$G_I(\alpha)$	$G_{II}(\alpha)$	$G(\alpha)$	$G_{IPK}(\alpha)$	$G_{IIPK}(\alpha)$	$G_{PK}(\alpha)$
0	0,000	1,009	1,009	0,000	1,000	1,000
15	0,149	0,904	1,053	0,151	0,904	1,055
30	0,537	0,637	1,174	0,536	0,629	1,165
45	1,009	0,320	1,329	0,997	0,320	1,317
60	1,381	0,08	1,461	1,351	0,088	1,439
75	1,529	-0,011	1,518	1,479	0,001	1,480
90	1,422	0,039	1,461	1,385	0,042	1,427

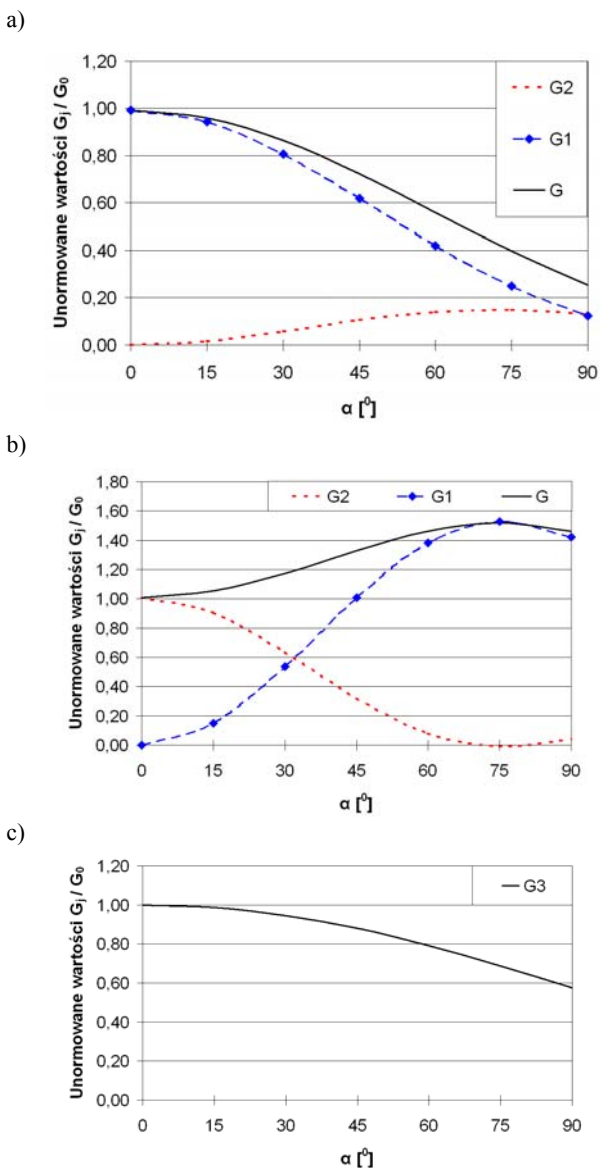
**Tab. 6.** Unormowane wartości współczynników  $G_{III}(\alpha)$  dla ścinania antypłaskiego obliczone proponowaną metodą oraz według Palaniswamy i Knaussa (1972)

Ścinanie antypłaskie		
Kąt $\alpha$ [°]	Obecne rozwiązanie	Rozwiązanie według Palaniswamy i Knaussa (1972)
	$G_{III}(\alpha)$	$G_{PK}(\alpha)$
0	1,000	1,000
15	0,986	0,989
30	0,945	0,945
45	0,879	0,869
60	0,792	0,778
75	0,688	0,680
90	0,574	0,558

Wzór ten wyraża klasyczną definicję współczynnika uwalniania energii prawdziwą dla szczeliny prostoliniowej z tą różnicą, że obecnie wartości względnych przemieszczeń brzegów pęknięcia na długości  $b$  nie są znane. Zmienna  $x$ , (wzdłuż odgałęzienia) związana jest z lokalnym układem współrzędnych (Rys. 1). Wartości naprężeń normalnych i stycznych, uwalnianych wzdłuż powierzchni odgałęzienia, są znane i zależą od wartości współczynników  $K_I$ ,  $K_{II}$  i  $K_{III}$  szczeliny głównej, natomiast funkcje względnych przemieszczeń brzegów odgałęzienia nie są znane (oprócz kąta  $\alpha=0$ ) i muszą być wyznaczone metodami numerycznymi. Zagadnienie to rozwiązano obecnie dla trzech niezależnych przypadków obciążenia zdefiniowanych wcześniej i przyłożonych dostatecznie daleko od szczeliny z nadpęk-

nięciem. Unormowane wartości  $G_j(\alpha)$  współczynnika  $G(\alpha)$  dla odpowiednich obciążeń przedstawiono w tabelach 4, 5 i 6. Zostały one odpowiednio unormowane względem wartości  $G_0(\alpha)$  dla kąta  $\alpha=0$ . Dla porównania zamieszczono hipotetyczne wartości unormowane  $G_{jPK}(\alpha)$  wyliczone według wzorów podanych w pracy Palaniswamy i Knaussa (1972) w oparciu o lokalne współczynniki intensywności naprężenia  $K_I^{(\alpha)}$ ,  $K_{II}^{(\alpha)}$  i  $K_{III}^{(\alpha)}$ .

Wyniki obliczeń unormowanych współczynników  $G_I(\alpha)$ ,  $G_{II}(\alpha)$  i  $G_{III}(\alpha)$  przedstawiono na Rys. 7a) – 7c).



Rys. 8. Unormowane wartości energii uwalnianej  $G_j(\alpha)$  dla a) rozciągania, b) ścinania wzdłużnego i c) ścinania poprzecznego.

## 7. WNIOSKI

W czasie powstawania odgałęzienia w wierzchołku szczeliny głównej tworzy się ostre naroże, które po stronie wklęsłej generuje dodatkowe osobliwe pole naprężeń. Wykładnik potęgowy opisujący osobliwość wynika z równania

charakterystycznego i zależy od kąta  $\alpha$  oraz rodzaju obciążenia.

Analiza numeryczna wykazała, że wpływ osobliwości związanej z wklęsłym narożem jest nieistotny dla małych kątów  $\alpha$ , od  $0^\circ$  do ok.  $45^\circ$ , natomiast powyżej tej wartości oddziaływanie naroża ma istotne znaczenie zarówno przy opisie kształtu rozwarcia brzegów odgałęzienia jak i rozkładzie naprężeń.

Zasięg oddziaływania poszczególnych pojedynczych członów osobliwych, również w istotny sposób zależy od rodzaju obciążenia i wartości kąta  $\alpha$ . Oba rodzaje osobliwości determinują lokalnie kształt względnego rozwarcia brzegów odgałęzienia. Oddziaływanie naroża nie przekracza ok. 17% długości odgałęzienia, natomiast oddziaływanie wierzchołka szczeliny jest zawsze większe i dochodzi do kilkudziesięciu procent długości odgałęzienia, zależnie od kąta  $\alpha$  i rodzaju obciążenia. Stwierdzono, że kształt względnego rozwarcia brzegów odgałęzienia znacząco odbiega pod względem jakościowym od kształtu rozwarcia okolicy wierzchołka szczeliny prostej. Zaproponowana metoda wyznaczania współczynnika  $G(\alpha)$  umożliwia uogólnienie koncepcji współczynnika uwalniania energii w sytuacji powstawania odgałęzienia w innym kierunku niż styczny do szczeliny głównej. Przeprowadzona analiza pozwoliła opisać ilościowo i jakościowo wartość energii uwalnianej w czasie powstawania odgałęzienia pod kątem  $\alpha$  w wierzchołku szczeliny głównej, przy czym możliwe było wyznaczenie nie tylko wartości całkowitej współczynnika uwalniania energii, ale również poszczególnych jego składników  $G_I(\alpha)$ ,  $G_{II}(\alpha)$  i  $G_{III}(\alpha)$ .

W przypadku rozciągania maksymalna wartość  $G_{max}$  odpowiadała kątowi  $\alpha=0$ . Współczynnik  $G_I(\alpha)$  malał monotonicznie ze wzrostem kąta pęknięcia, natomiast współczynnik  $G_{II}(\alpha)$  wzrastał od zera.

W przypadku ścinania wzdłużnego szczeliny głównej, maksimum uwalnianej energii odpowiadało kątowi około 75 stopni. Wartości współczynnika  $G_{II}(\alpha) < 0$  występujące w okolicy tego kąta, wynikają z całkowania iloczynu ujemnej funkcji naprężeń stycznych i dodatniej funkcji przemieszczeń.

Wartości  $G_j(\alpha)$  obliczane metodą bezpośrednią, przez całkowanie iloczynu przemieszczeń i uwalnianych naprężeń, są zbliżone do ich odpowiedników obliczanych z lokalnych wartości współczynników intensywności naprężeń  $K_j^{(\alpha)}$  dla wierzchołka odgałęzienia. W rozpatrywanym zakresie zmian kąta  $\alpha$  różnice te są w zasadzie pomijalne. Dla rosnących kątów  $\alpha$  wartości współczynników  $G_I(\alpha)$ ,  $G_{II}(\alpha)$ ,  $G_{III}(\alpha)$  coraz bardziej odbiegają od ich odpowiedników wyliczonych z lokalnych współczynników intensywności naprężenia.

## LITERATURA

1. **Boguszewski T., Molski K.** (2008), Energetyczne aspekty wzrostu szczelin rozgałęzionych, *XVI Francusko-Polskie Seminarium Mechaniki*, Instytut PBM PW, Warszawa, 13-20.
2. **Chatterjee S.N.** (1975) The stress field in the neighborhood of a branched crack in infinite elastic sheet, *Int. J. Solid Struct.*, 11.
3. **Husain M.A., Pu S.L., Underwood J.** (1974), *Strain energy release rate for a crack under combined Mode-I and II*, ASTM STP, 560, 2-28.

4. **Irwin G.R.** (1957), Analysis of stress and strains near the end of crack traversing a plate, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 24, 361-365.
5. **Ishida M., Nishino T.**, (1982) Formulae of Stress Intensity Factor of Bent Cracks in Plane Problems, *Trans. Japan Soc. Mech. Engr.*, Vol 48-430, 729-738.
6. **Murakami Y.**, ed. (1987), *Stress Intensity Factors Handbook*, Sec. 7, *Nonlinear Shaped Cracks in an Infinite Plate*, Pergamon Press, 349-372.
7. **Palaniswamy K., Knauss E.G.** (1972), Propagation of a crack under general in-plane tension, *Int. J. Fract. Mech.*, 8, 114-117.
8. **Seweryn A.** (2004), *Modelowanie zagadnień kumulacji uszkodzeń i pękania w złożonych stanach obciążeń*, Białystok, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, 2004.
9. **Sneddon I.N.** (1946), The distribution of stress in the neighborhood of crack in a elastic solid, *Proc. Roy Soc. London*, A 187, 229-260,
10. **Tada H., Paris P., Irwin G.R.** (1973), *The stress analysis of crack handbook*, Boston, Academic Press.

#### **ANALYSIS OF STRESSES, COD AND ENERGY RELEASED RATE G FOR BRANCHING CRACKS**

**Abstract:** Mutual interactions between two neighboring singular stress fields for branching cracks are analyzed. Using the finite element method and ANSYS program, relative crack opening and range of validity of the singular stress fields have been obtained. Some special functions were chosen for describing crack face opening, including two different singular stress field exponents. Numerical results make it possible to explain the influence and applicability of stress intensity factors for such cracks and show qualitatively additional effects and cracking conditions around the crack tip for plane and anti-plane crack problems.