

## MODELOWANIE RUCHU WYBRANEGO MANIPULATORA

Wiesław ŻYLSKI\*, Piotr GIERLAK\*

\*Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki, Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa,  
Politechnika Rzeszowska, Al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów

[wzylski@prz.edu.pl](mailto:wzylski@prz.edu.pl), [pgierlak@prz.edu.pl](mailto:pgierlak@prz.edu.pl)

**Streszczenie:** Artykuł poświęcony jest modelowaniu ruchu nieliniowego obiektu dynamicznego na przykładzie manipulatora SCORBOT-ER 4pc. W artykule zaprezentowano równania kinematyki obiektu, dynamiczne równania ruchu wyprowadzone z zastosowaniem formalizmu Lagrange'a, równania wrażliwości oraz procedurę identyfikacji parametrycznej. W oparciu o rozwiązania równań wrażliwości dokonano uproszczenia modelu dynamiki manipulatora otrzymanego z formalizmu Lagrange'a. W celu określenia parametrów modelu zastosowano procedurę identyfikacji bazującą na zasadzie równowartości energii kinetycznej i pracy. Zaprezentowano wyniki identyfikacji parametrycznej modelu dynamiki. Podano parametry modelu dla przypadku manipulatora nieobciążonego oraz z maksymalnym obciążeniem chwytaka.

### 1. WPROWADZENIE

Manipulatory robotów to nieliniowe obiekty dynamiczne, zwykle o wielu stopniach swobody, posiadające zazwyczaj nieznanne parametry jak np. masy, masowe momenty bezwładności, współczynniki tarcia. Znajomość opisu matematycznego takich obiektów jest potrzebna m.in. w projektowaniu układów sterowania. Modele matematyczne obiektów wykorzystuje się w celu symulacji ich ruchu oraz w algorytmach sterowania z kompensacją nieliniowości.

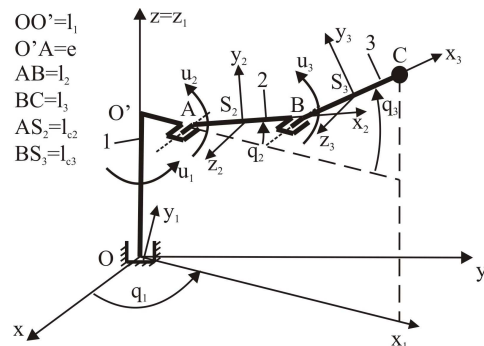
Modelowanie takich obiektów jest zagadnieniem złożonym. Obejmuje ono opis kinematyki i dynamiki układu, (Canudas de Wit i inni, 1996; Spong i Vidyasagar, 1997; Tchoń i inni, 2000; Żylski i Nawrocki, 2006), badanie wrażliwości modelu na zmianę parametrów (Cruz, 1977; Eykhoff, 1980; Żylski, 1996) i identyfikację parametryczną (Cruz, 1977; Eykhoff, Hendzel i Nawrocki, 2006, 2008; Slotine i Li, 1991; Söderström i Stoica, 1997; Żylski, 1996).

Badania symulacyjne procedury identyfikacji manipulatora SCORBOT-ER 4pc dla modelu z dyskretnym rozkładem masy i bez uwzględniania oporów ruchu zostały zaprezentowane przez Hendzla i Nawrockiego (2006). Symulację neuronowej identyfikacji manipulatora zaprezentowano w pracy Hendzel i Nawrocki (2008). Niniejsza praca poszerza tę tematykę o zastosowanie modelu z ciągłym rozkładem masy i z uwzględnieniem oporów ruchu manipulatora oraz prezentuje wyniki badań eksperymentalnych.

#### 1.1. Opis obiektu

Jako obiekt wybrany został manipulator przeznaczony do pracy naukowej i dydaktycznej SCORBOT-ER 4pc (Rys.1). Jest to manipulator stacjonarny posiadający pary kinematyczne obrotowe. Końcówkę roboczą manipulatora stanowi chwytak zamodelowany w postaci masy skupionej (punkt C). W pracy rozpatrywany będzie ruch trzech członów

manipulatora, ruch chwytaka nie będzie modelowany. Napędy manipulatora to silniki elektryczne prądu stałego (12 [V]) z wbudowanymi przekładniami zębatymi o dużym przełożeniu redukującym ( $i_1=1:65.5$ ,  $i_2=i_3=1:127.7$ ). Ponadto silniki są wyposażone w optyczne enkodery, dzięki którym istnieje możliwość pomiaru prędkości kątowej członów i wyznaczenia położenia kątowych członów.



**Rys. 1.** Schemat manipulatora SCORBOT-ER 4pc: 1, 2, 3 – człony manipulatora o długościach  $l_j$ ,  $q_j$  – współrzędne uogólnione,  $u_j$  – momenty napędowe,  $j=1,2,3$ ,  $xyz$  – globalny układ odniesienia,  $x_jy_jz_j$  – układ odniesienia związany z  $j$ -tym członem

Model matematyczny obiektu wykorzystywany będzie w algorytmach sterowania, zatem powinien być on możliwie najprostszy, tzn. musi uwzględniać tylko najistotniejsze zjawiska. Dlatego przyjęto kilka założeń uproszczających:

- człony manipulatora to bryły sztywne;
- człon 1 zamodelowano w postaci walca oraz przyjęto, że środki mas członów  $S_2$  i  $S_3$  leżą na odcinkach odpowiednio AB i BC;
- chwytak zamodelowano masą skupioną w punkcie C;
- dynamika napędów zostaje pominięta w opisie matematycznym ze względu na małe stałe czasowe silników;
- pomija się podatność i luzy w przekładniach.

## 2. KINETYKA OBIEKTU

### 2.1. Równania kinematyki

W praktyce równania kinematyki wykorzystywane będą do rozwiązywania zadania odwrotnego kinematyki tak, aby dla założonego toru i prędkości ruchu wybranego punktu manipulatora w układzie  $xyz$  określić zmiany współrzędnych uogólnionych w czasie. Niech wybranym punktem będzie punkt C. Jego współrzędne w układzie  $xyz$  to:

$$\begin{cases} x_C = (e + l_2 \cos q_2 + l_3 \cos q_3) \cos q_1 \\ y_C = (e + l_2 \cos q_2 + l_3 \cos q_3) \sin q_1, \\ z_C = l_1 + l_2 \sin q_2 + l_3 \sin q_3 \end{cases} \quad (1)$$

natomiast rzuty prędkości na osie układu  $xyz$  określone są równaniami:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \\ \dot{z}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(e + l_2 c_2 + l_3 c_3) s_1 & -l_2 s_2 c_1 & -l_3 s_3 c_1 \\ (e + l_2 c_2 + l_3 c_3) c_1 & -l_2 s_2 s_1 & -l_3 s_3 s_1 \\ 0 & l_2 c_2 & l_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

gdzie:  $s_j = \sin q_j$ ,  $c_j = \cos q_j$ ,  $j=1, 2, 3$ . Z analizy równania (2) wynika, że zbiór konfiguracji osobliwych (Spong i Vidyasagar, 1997; Tchoń i inni; 2000) to:

$$S = \begin{cases} e + l_2 c_2 + l_3 c_3 = 0, \\ q_2 = q_3 + k\pi, \end{cases} \quad (3)$$

przy czym w praktyce  $k=0$ . Aby rozwiązać zadanie odwrotne kinematyki, należy równanie (2) rozwiązać ze względu na wektor prędkości uogólnionych i po scałkowaniu można uzyskać współrzędne uogólnione.

### 2.2. Dynamiczne równania ruchu

Do opisu dynamiki manipulatora zastosowano równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad (4)$$

Otrzymano następujące różniczkowe równania ruchu układu przedstawione w zapisie wektorowo-macierzowym:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_d(t) = \mathbf{u}, \quad (5)$$

gdzie:  $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^3$  – wektor współrzędnych uogólnionych,  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  – macierz bezwładności,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^3$  – wektor momentów pochodzących od sił odśrodkowych i Coriolisa,  $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbf{R}^3$  – wektor oporów ruchu,  $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbf{R}^3$  – wektor momentów pochodzący od sił grawitacji,  $\boldsymbol{\tau}_d(t) \in \mathbf{R}^3$  – wektor zakłóceń,  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$  – wektor wymuszeń. Wektory i macierze mają następującą postać:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11} & -a_9 c_2 - a_{10} s_2 & -a_{12} c_3 - a_{13} s_3 \\ -a_9 c_2 - a_{10} s_2 & a_6 & l_2 a_2 \cos(q_3 - q_2) \\ -a_{12} c_3 - a_{13} s_3 & l_2 a_2 \cos(q_3 - q_2) & a_7 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

gdzie:

$$M_{11} = 2a_1 e c_2 + 2a_2 (e + l_2 c_2) c_3 + 0.5 a_3 \cos(2q_2) + 0.5 a_4 \cos(2q_3) + a_5 - a_8 \sin(2q_2) - a_{11} \sin(2q_3), \quad (8)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & 0 & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

gdzie:

$$C_{11} = -[a_1 e s_2 + a_2 l_2 s_2 c_3 + 0.5 a_3 \sin(2q_2) + a_8 \cos(2q_2)] \dot{q}_2 - [a_2 (e + l_2 c_2) s_3 + 0.5 a_4 \sin(2q_3) + a_{11} \cos(2q_3)] \dot{q}_3, \quad (10)$$

$$C_{12} = (a_9 s_2 - a_{10} c_2) \dot{q}_2 + -[a_1 e s_2 + a_2 l_2 s_2 c_3 + 0.5 a_3 \sin(2q_2) + a_8 \cos(2q_2)] \dot{q}_1, \quad (11)$$

$$C_{21} = [a_1 e s_2 + a_2 l_2 s_2 c_3 + 0.5 a_3 \sin(2q_2) + a_8 \cos(2q_2)] \dot{q}_1, \quad (12)$$

$$C_{13} = (a_{12} s_3 - a_{13} c_3) \dot{q}_3 + -[a_2 (e + l_2 c_2) s_3 + 0.5 a_4 \sin(2q_3) + a_{11} \cos(2q_3)] \dot{q}_1, \quad (13)$$

$$C_{31} = [a_2 (e + l_2 c_2) s_3 + 0.5 a_4 \sin(2q_3) + a_{11} \cos(2q_3)] \dot{q}_1, \quad (14)$$

$$C_{23} = -l_2 a_2 \sin(q_3 - q_2) \dot{q}_3, \quad (15)$$

$$C_{32} = l_2 a_2 \sin(q_3 - q_2) \dot{q}_2, \quad (16)$$

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} a_{14} \dot{q}_1 + a_{17} \operatorname{sgn}(\dot{q}_1) \\ a_{15} \dot{q}_2 + a_{18} \operatorname{sgn}(\dot{q}_2) \\ a_{16} \dot{q}_3 + a_{19} \operatorname{sgn}(\dot{q}_3) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 g c_2 \\ a_2 g c_3 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\tau}_d(t) = \begin{bmatrix} \tau_{d1}(t) \\ \tau_{d2}(t) \\ \tau_{d3}(t) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Sens fizyczny parametrów  $a_i$  ( $i=1,2,\dots,19$ ) jest następujący:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = l_{c2}m_2 + l_2m_3 + l_2m_C, \\ a_2 = l_{c3}m_3 + l_3m_C, \\ a_3 = l_{c2}^2m_2 + l_2^2m_3 + l_2^2m_C - I_{2xx} + I_{2yy}, \\ a_4 = l_{c3}^2m_3 + l_3^2m_C - I_{3xx} + I_{3yy}, \\ a_5 = 0.5(I_{2xx} + I_{2yy} + I_{3xx} + I_{3yy}) + I_{1zz} + \\ + (e^2 + 0.5l_{c2}^2)m_2 + (e^2 + 0.5l_2^2 + 0.5l_{c3}^2)m_3 + \\ + (e^2 + 0.5l_2^2 + 0.5l_3^2)m_C, \\ a_6 = l_{c2}^2m_2 + l_2^2m_2 + l_2^2m_C + I_{2zz}, \\ a_7 = l_{c3}^2m_3 + l_3^2m_C + I_{3zz}, \\ a_8 = I_{2xy}, \\ a_9 = I_{2yz}, \\ a_{10} = I_{2xz}, \\ a_{11} = I_{3xy}, \\ a_{12} = I_{3yz}, \\ a_{13} = I_{3xz}, \\ a_{14} = f_1, \\ a_{15} = f_2, \\ a_{16} = f_3, \\ a_{17} = \kappa_1, \\ a_{18} = \kappa_2, \\ a_{19} = \kappa_3, \end{array} \right. \quad (21)$$

gdzie:  $m_j$  – masa członu  $j$ ,  $m_C$  – masa chwytaka,  $l_j$  – długość członu  $j$ ,  $l_{c_j}$  – odległość środka masy członu  $j$  od końca członu  $j-1$ ,  $e$  – wielkość mimośrodkowego odsunięcia członu 2,  $I_{jxx}$ ,  $I_{jyy}$ ,  $I_{jzz}$  – masowe momenty bezwładności członu  $j$  względem osi odpowiednio  $x_j$ ,  $y_j$  i  $z_j$ ,  $I_{jxy}$ ,  $I_{jyz}$ ,  $I_{jxz}$  – masowe momenty dewiacji członu  $j$  określone w układzie  $x_jy_jz_j$ ,  $f_j$  – współczynniki tarcia wiskotycznego,  $\kappa_j$  – momenty tarcia suchego w parach kinematycznych.

Na podstawie wstępnych obliczeń oszacowano wartości parametrów  $a_i$  dla przypadku nieobciążonego chwytaka i dla przypadku maksymalnego obciążenia chwytaka. Wartości parametrów zestawiono w tabeli 1. Podane wartości są tylko wstępnym oszacowaniem dokonany na podstawie możliwych do wykonania pomiarów geometrii, przyjętego przybliżonego rozkładu masy, wiedzy o obiekcie.

**Tab. 1.** Przybliżone wartości parametrów manipulatora

parametr	jednostka	bez obc.	z obc.
$a_1$	kgm	0.0055	0.0077
$a_2$		0.0033	0.0055
$a_3$	kgm <sup>2</sup>	0.0113	0.0161
$a_4$		0.0064	0.0113
$a_5$		0.0114	0.0163
$a_6$		0.0113	0.0161
$a_7$			

$a_7$		0.0065	0.0113
$a_8$	kgm <sup>2</sup>	7.06 · 10 <sup>-5</sup>	
$a_9$		9.68 · 10 <sup>-5</sup>	
$a_{10}$		5.86 · 10 <sup>-5</sup>	
$a_{11}$		7.06 · 10 <sup>-5</sup>	
$a_{12}$		9.68 · 10 <sup>-5</sup>	
$a_{13}$		5.86 · 10 <sup>-5</sup>	
$a_{14}$	Nms	0.5	
$a_{15}$			
$a_{16}$			
$a_{17}$	Nm	0.01	
$a_{18}$			
$a_{19}$			

### 3. WRAŻLIWOŚĆ UKŁADU

W równaniach ruchu manipulatora występują parametry  $a_i$ , których wartości zwykle nie są znane. Można je określić w drodze identyfikacji na podstawie danych pomiarowych. Wcześniej należy zbadać, czy wszystkie parametry w równaniach ruchu są istotne z punktu widzenia dokładności modelu. Dlatego ważne jest określenie, jak zmiana parametrów modelu wpływa na rozwiązanie dynamicznych równań ruchu. Wynika stąd potrzeba zbadania wrażliwości układu. Można tego dokonać przez analizę równań wrażliwości (Cruz, 1977; Eykhoff, 1980). Zastosowana w pracy metoda jest stosowana w układach nieliniowych przy założeniu małych zmian parametrów. Wpływ małych zmian parametrów w nieliniowym układzie może być oszacowanym z dokładnością do pierwszego rzędu rozwiązaniem równania różniczkowego.

Aby wyprowadzić równania wrażliwości wprowadzono tzw. współczynniki oddziaływań parametrów nazywane również funkcjami wrażliwości parametrów pierwszego rzędu, czyli:

$$\frac{\partial q_j}{\partial a_i} = z_{ji}, \quad j = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (22)$$

gdzie:  $r=19$ . Funkcja wrażliwości  $z_{ji}$  niesie informację jaki jest wpływ parametru  $a_i$  na współrzędną uogólnioną  $q_j$ . Wariacja współrzędnej uogólnionej  $\delta q_j$  wynikająca z wariacji parametrów  $\delta a_i$  z dokładnością do pierwszej wariacji to:

$$\delta q_j = \sum_{i=1}^r \frac{\partial q_j}{\partial a_i} \delta a_i = \sum_{i=1}^r z_{ji} \delta a_i. \quad (23)$$

Rozpatrując wariację współrzędnej  $\delta q_j^{(i)}$  wynikającą z wariacji  $i$ -tego parametru przy stałych wartościach pozostałych parametrów, równanie (23) uprości się do postaci:

$$\delta q_j^{(i)} = z_{ji} a_i \frac{\delta a_i}{a_i}. \quad (24)$$

Przyjmując w dynamicznych równaniach ruchu  $\tau_a(t)=0$  i różniczkując je względem parametrów otrzymano równania wrażliwości. Ścisłe biorąc są to aproksymowane równania wrażliwości (Eykhoff, 1980), gdyż pochodne cząstkowe

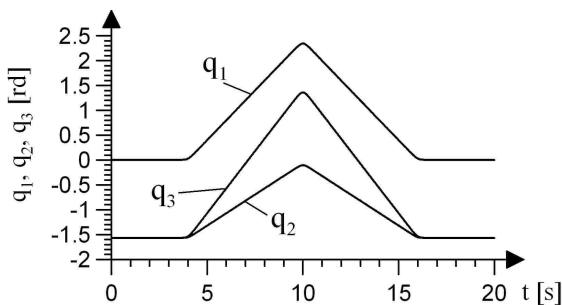
zastąpiono zwyczajnymi. Stąd aproksymacja równań wrażliwości jest dobra jeśli zmiany parametrów są małe.

W rozważanym przypadku liczba aproksymowanych równań wrażliwości to  $3 \times 19 = 57$ . Każde z równań to różniczkowe równanie drugiego rzędu, ponadto równania są ze sobą sprzężone po trzy. Struktura równań jest taka, że lewe strony równań opisujących wrażliwość  $j$ -tej współrzędnej są takie same bez względu na parametr, różne są natomiast ich prawe strony. Przykładowe aproksymowane równanie wrażliwości ma postać:

$$\begin{aligned}
 & -(c_3 a_{12} + s_3 a_{13}) \ddot{z}_{1i} + l_2 \cos(q_3 - q_2) a_2 \ddot{z}_{2i} + a_7 \ddot{z}_{3i} + \\
 & + [2(e + l_2 c_2) s_3 a_2 + \sin(2q_3) a_4 + 2 \cos(2q_3) a_{11}] \dot{q}_1 \dot{z}_{1i} \\
 & + 2l_2 \sin(q_3 - q_2) \dot{q}_2 a_2 \dot{z}_{2i} + a_{16} \dot{z}_{3i} + \\
 & + l_2 [\sin(q_3 - q_2) \ddot{q}_2 - \cos(q_3 - q_2) \dot{q}_2^2] a_2 z_{2i} + \\
 & + [l_2 \cos(q_3 - q_2) \dot{q}_2^2 + (e + l_2 c_2) c_3 \dot{q}_1^2] a_2 z_{3i} + \\
 & - [l_2 \sin(q_3 - q_2) \ddot{q}_2 + g s_3] a_2 z_{3i} + \\
 & + [\cos(2q_3) a_4 - 2 \sin(2q_3) a_{11}] \dot{q}_1^2 z_{3i} + \\
 & + (s_3 a_{12} - c_3 a_{13}) \dot{q}_1 z_{3i} = \pi_{3i}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

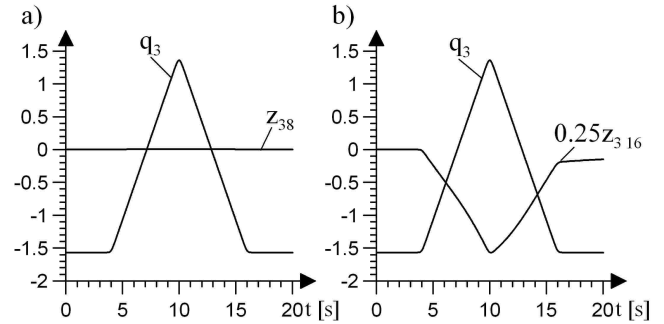
W zależności od parametru  $\pi_{3i}$  będzie przyjmować różne formy, np.  $\pi_{38} = 0$ ,  $\pi_{316} = -\dot{q}_3$ .

W celu rozwiązania aproksymowanych równań wrażliwości przyjęto trajektorię ruchu manipulatora we współrzędnych uogólnionych (Rys. 2) oraz wartości parametrów wg tabeli 1 dla manipulatora nieobciążonego.



Rys. 2. Trajektoria ruchu manipulatora

Następnie przyjęto warunki początkowe  $z_{ji}(0) = 0$ ,  $\dot{z}_{ji}(0) = 0$  gdyż warunki początkowe dla współrzędnych uogólnionych są stałe i niezależne od parametrów (Eykhoff, 1980). Na Rys. 3 zaprezentowano przykładowe rozwiązania aproksymowanych równań wrażliwości. Rys. 3a przedstawia wpływ zmiany parametru  $a_8$ , którego wartość zależy od momentu dewiacji  $I_{2xy}$ , na współrzędną uogólnioną  $q_3$ . Funkcja wrażliwości  $z_{38}$  jest stała i wynosi 0, czyli współrzędna  $q_3$  nie jest wrażliwa na zmiany parametru  $a_8$ . Rys. 3b przedstawia wpływ zmiany parametru  $a_{16}$ , którego wartość zależy od tarcia wiskotycznego w parze kinematycznej, na współrzędną uogólnioną  $q_3$ . Funkcja wrażliwości  $z_{316}$  przyjmuje największą wartość bezwzględną, gdy człon 3 wraca do położenia początkowego. Współrzędna  $q_3$  jest wrażliwa na zmianę parametru  $a_{16}$ .



Rys. 3. Funkcje wrażliwości: a)  $z_{38}$ , b)  $z_{316}$

Wygodnie jest analizować wrażliwość układu dla takich samych zmian procentowych parametrów. Przyjmijmy zmiany parametrów o 1 [%], wówczas na podstawie równania (24) wariacja współrzędnej będzie określona jako:

$$\delta q_j^{(i)} = z_{ji} a_i 0.01. \tag{26}$$

Maksymalne wartości bezwzględne wariacji współrzędnych uogólnionych pod wpływem wariacji  $i$ -tego parametru przedstawiono w tabeli 2.

Tab. 2. Wartości wariacji współrzędnych uogólnionych

i	$ \delta q_1^{(i)} $	$ \delta q_2^{(i)} $	$ \delta q_3^{(i)} $
1	$5.60 \cdot 10^{-5}$	$5.90 \cdot 10^{-3}$	$5.86 \cdot 10^{-6}$
2	$2.97 \cdot 10^{-5}$	$2.47 \cdot 10^{-5}$	$5.30 \cdot 10^{-3}$
3	$4.34 \cdot 10^{-5}$	$9.99 \cdot 10^{-5}$	$1.66 \cdot 10^{-7}$
4	$2.57 \cdot 10^{-5}$	$2.91 \cdot 10^{-7}$	$1.94 \cdot 10^{-5}$
5	$9.10 \cdot 10^{-5}$	$1.25 \cdot 10^{-7}$	$1.12 \cdot 10^{-7}$
6	$6.72 \cdot 10^{-7}$	$7.53 \cdot 10^{-5}$	$2.01 \cdot 10^{-7}$
7	$4.28 \cdot 10^{-7}$	$2.58 \cdot 10^{-7}$	$7.35 \cdot 10^{-5}$
8	$5.69 \cdot 10^{-7}$	$3.62 \cdot 10^{-7}$	$4.10 \cdot 10^{-9}$
9	$4.75 \cdot 10^{-7}$	$1.50 \cdot 10^{-6}$	$1.85 \cdot 10^{-9}$
10	$2.89 \cdot 10^{-7}$	$5.61 \cdot 10^{-7}$	$1.68 \cdot 10^{-9}$
11	$5.66 \cdot 10^{-7}$	$8.11 \cdot 10^{-9}$	$4.94 \cdot 10^{-7}$
12	$9.69 \cdot 10^{-7}$	$4.56 \cdot 10^{-9}$	$3.65 \cdot 10^{-7}$
13	$5.63 \cdot 10^{-7}$	$8.50 \cdot 10^{-9}$	$1.75 \cdot 10^{-6}$
14	$2.34 \cdot 10^{-2}$	$2.20 \cdot 10^{-4}$	$5.30 \cdot 10^{-5}$
15	$7.47 \cdot 10^{-5}$	$1.25 \cdot 10^{-2}$	$8.43 \cdot 10^{-6}$
16	$1.71 \cdot 10^{-4}$	$3.16 \cdot 10^{-5}$	$3.14 \cdot 10^{-2}$
17	$1.42 \cdot 10^{-3}$	$1.10 \cdot 10^{-5}$	$2.73 \cdot 10^{-6}$
18	$7.32 \cdot 10^{-6}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$	$4.11 \cdot 10^{-7}$
19	$8.22 \cdot 10^{-6}$	$1.58 \cdot 10^{-6}$	$1.50 \cdot 10^{-3}$

Przedstawione dane liczbowe informują o wrażliwości modelu dynamiki manipulatora na zmiany parametrów, czyli o istotności parametrów w równaniach ruchu. Wyniki przeprowadzonej analizy wrażliwości należy traktować tylko jako sugestię co do możliwości uproszczenia modelu, a to ze względu na fakt, iż zastosowana metoda jest wiarygodna tylko dla małych zmian parametrów. W związku z tym poniższe wnioski wynikające z analizy tabeli 2 należy na tym etapie traktować jako wskazówki do podjęcia decyzji a nie ostateczne decyzje. Wnioski są następujące:

- największe znaczenie mają parametry  $a_1$  i  $a_2$  występujące w macierzy bezwładności oraz parametry  $a_{14}$  -  $a_{19}$ ,

czyli współczynniki tarcia wiskotycznego i momenty sił tarcia suchego;

- parametry  $a_3 - a_7$  mają drugorzędne znaczenie;
- parametry  $a_8 - a_{13}$ , czyli masowe momenty dewiacji członów 2 i 3 mają marginalny wpływ na zmiany współrzędnych uogólnionych i można je pominąć w dynamicznych równaniach ruchu.

Ostateczną decyzję o ewentualnym uproszczeniu modelu będzie można podjąć po przeprowadzeniu identyfikacji parametrycznej.

#### 4. IDENTYFIKACJA PARAMETRYCZNA

Aby model dynamiki manipulatora był kompletny, należy określić występujące w nim parametry. W celu identyfikacji parametrów (Cruz, 1977; Eykhoff, 1980; Slotine i Li, 1991) buduje się model estymacji pozwalający wyznaczyć wartości parametrów na podstawie danych uzyskanych z eksperymentu pomiarowego. Bardzo ważnym zagadnieniem jest odpowiednie pobudzenie układu podczas eksperymentu, aby dane pomiarowe zawierały jak najwięcej informacji o własnościach dynamicznych obiektu rzeczywistego.

W pracy zastosowano metodę, która wywodzi się z zasady równowartości energii kinetycznej i pracy (Hendzel i Nawrocki, 2006; Slotine i Li, 1991). Przyjętym kryterium identyfikacji jest błąd mocy, czyli różnica mocy modelu i obiektu rzeczywistego. W celu przeprowadzenia identyfikacji przyjęto model dynamiki (5), w którym przyjęto  $\tau_a(t)=0$ . Model jest liniowy względem parametrów, tzn. można go zapisać w postaci:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\mathbf{a} = \mathbf{u}, \quad (27)$$

gdzie:  $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^{3 \times 19}$  – macierz znanych funkcji,  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{19}$  – wektor parametrów manipulatora.

Występujący w równaniu (27) wektor przyspieszenia powoduje, że ta postać modelu nie jest wygodna, ze względu na trudności w pomiarze przyspieszeń. Stosując odpowiednią filtrację można równanie (27) zapisać jako (Hendzel i Nawrocki, 2006):

$$\mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{a} = y, \quad (28)$$

gdzie:  $y$  – nowe wyjście modelu po filtracji wektora  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{1 \times 19}$  – przefiltrowany opis macierzy  $\mathbf{Y}$ .

Zapiszmy teraz energię mechaniczną manipulatora jako:

$$H = E + V, \quad (29)$$

gdzie:  $E$  – energia kinetyczna układu,  $V$  – potencjał układu.

W formie liniowej względem parametrów równanie (29) ma postać:

$$H = \mathbf{v}_H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{a}_H, \quad (30)$$

gdzie:  $\mathbf{v}_H \in \mathbf{R}^{13}$  – wektor znanych funkcji,  $\mathbf{a}_H \in \mathbf{R}^{13}$  – wektor parametrów manipulatora od których zależy energia mechaniczna układu (nie zawiera on parametrów związanych z oporami ruchu).

Moc układu wyrazić można jako:

$$\boldsymbol{\tau}^T \dot{\mathbf{q}} = \frac{dH}{dt}, \quad (31)$$

gdzie:  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{R}^3$  – wektor momentów pochodzących od sił wewnętrznych nie będących siłami pola potencjalnego:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{u} - \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}). \quad (32)$$

Uwzględniając równania (30) i (32), zależność (31) zapisano w postaci:

$$\mathbf{u}^T \dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{v}_H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T}{dt} \mathbf{a}_H + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}}. \quad (33)$$

Moc tracona na pokonanie oporów ruchu może być zapisana w formie liniowej względem parametrów jako:

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}_F(\dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{a}_F, \quad (34)$$

i ostatecznie moc układu można zapisać w formie:

$$\mathbf{u}^T \dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{v}_H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T}{dt} \mathbf{a}_H + \mathbf{v}_F(\dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{a}_F, \quad (35)$$

gdzie:  $\mathbf{v}_F \in \mathbf{R}^6$  – wektor znanych funkcji,  $\mathbf{a}_F \in \mathbf{R}^6$  – wektor parametrów manipulatora od których zależą opory ruchu.

Konieczność wyznaczenia  $\mathbf{v}_H$  i  $\mathbf{v}_F$  implikuje wymaganie dostępności pomiarowej wektora stanu. W celu uniknięcia pomiaru przyspieszenia przy wyznaczaniu pochodnej  $\mathbf{v}_H$  względem czasu, zależność (35) poddaje się filtracji przy pomocy filtru o transmitancji (Slotine i Li, 1991):

$$G(p) = \frac{1}{p + \lambda}, \quad (36)$$

gdzie:  $p$  – operator Laplace'a,  $\lambda$  – stała dodatnia wartość.

Zależność (35) po filtracji przyjmuje następującą postać:

$$\frac{1}{p + \lambda} \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{q}} = \left( \mathbf{v}_H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\lambda}{p + \lambda} \mathbf{v}_H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right)^T \mathbf{a}_H + \frac{1}{p + \lambda} \mathbf{v}_F(\dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{a}_F. \quad (37)$$

Przyjęcie oznaczeń:

$$y = \frac{1}{p + \lambda} \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{q}}, \quad (38)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left[ \left( \mathbf{v}_H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\lambda}{p + \lambda} \mathbf{v}_H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right)^T \quad \frac{1}{p + \lambda} \mathbf{v}_F(\dot{\mathbf{q}})^T \right], \quad (39)$$

$$\mathbf{a} = \left[ \mathbf{a}_H^T \quad \mathbf{a}_F^T \right]^T, \quad (40)$$

prowadzi do opisu (28), czyli do modelu skalarnego. W tym równaniu  $y$  to sygnał predykcji mocy układu rzeczywistego, natomiast sygnał predykcji mocy modelu to:

$$\hat{y} = \mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{a}}, \quad (41)$$

gdzie:  $\hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{R}^{19}$  – ocena parametrów.

Błąd predykcji mocy to:

$$e = \hat{y} - y = \mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{a} = \mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{a}}, \quad (42)$$

gdzie błąd oceny parametrów wyrażono jako:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}. \quad (43)$$

Na podstawie błędu predykcji mocy (41) zdefiniowano kryterium oceny parametrów:

$$I = 0.5e^2, \quad (44)$$

i zastosowano gradientową metodę estymacji parametrów, w wyniku czego uzyskano prawo estymacji parametrów:

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}} = -\mathbf{C}e\mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T, \quad (45)$$

gdzie:  $\mathbf{C}=\mathbf{C}^T>0$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{19 \times 19}$  – macierz wzmocnień estymacji.

Przypomnijmy, że w rozważanym przypadku energia mechaniczna ma formę (30), w której:

$$\mathbf{v}_H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} ec_2\dot{q}_1^2 + gs_2 \\ (e+l_2c_2)c_3\dot{q}_1^2 + l_2 \cos(q_3 - q_2)\dot{q}_2\dot{q}_3 + gs_3 \\ 0.25 \cos(2q_2)\dot{q}_1^2 \\ 0.25 \cos(2q_3)\dot{q}_1^2 \\ 0.5\dot{q}_1^2 \\ 0.5\dot{q}_2^2 \\ 0.5\dot{q}_3^2 \\ 0.5 \sin(2q_2)\dot{q}_1^2 \\ c_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ s_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ 0.5 \sin(2q_3)\dot{q}_1^2 \\ c_3\dot{q}_1\dot{q}_3 \\ s_3\dot{q}_1\dot{q}_3 \end{bmatrix}, \quad (46)$$

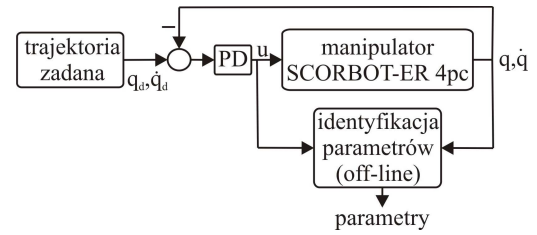
$$\mathbf{a}_H = [a_1 \quad \dots \quad a_{13}]^T. \quad (47)$$

Moc tracona ma formę (34), w której:

$$\mathbf{v}_F(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 & \dot{q}_2^2 & \dot{q}_3^2 & \dot{q}_1 \operatorname{sgn}(\dot{q}_1) & \dot{q}_2 \operatorname{sgn}(\dot{q}_2) & \dot{q}_3 \operatorname{sgn}(\dot{q}_3) \end{bmatrix}^T, \quad (48)$$

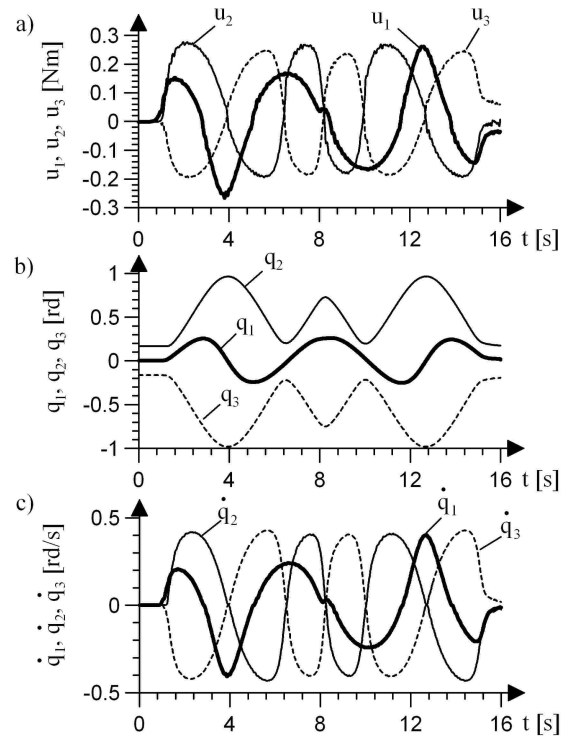
$$\mathbf{a}_F = [a_{14} \quad \dots \quad a_{19}]^T. \quad (49)$$

W celu sprawdzenia poprawności procedury identyfikacji parametrów przeprowadzono liczne badania symulacyjne. Przeprowadzono również badania, w których symulowano identyfikację z szumem pomiarowym. Z badań tych wynika, że procedura nie jest wrażliwa na szum pomiarowy. Następnie przeprowadzono badania weryfikacyjne z wykorzystaniem danych pomiarowych uzyskanych podczas eksperymentu z zastosowaniem manipulatora SCORBOT-ER 4pc. Schemat identyfikacji przedstawiono na Rys. 4.



Rys. 4. Schemat identyfikacji parametrów

Manipulator poruszał się bez obciążenia po zadanej trajektorii, która wynika z założenia, że punkt C manipulatora ma poruszać się po torze kołowym z zadaną prędkością w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny  $xy$ . Sterowanie manipulatorem zostało zrealizowane z zastosowaniem regulatora proporcjonalno-różniczkującego (PD). Podczas ruchu mierzony był wektor sterowań i wektor stanu manipulatora. Zmierzone wartości zaprezentowano na Rys. 5.



Rys. 5. Dane z eksperymentu pomiarowego: a) sterowania, b) współrzędne uogólnione, c) prędkości uogólnione

Identyfikację parametryczną wykonano w kilku wariantach a w celu porównania wyników przyjęto wskaźnik jakości zdefiniowany następująco:

$$J_e = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_k^2}, \quad (50)$$

gdzie:  $k$  – numer kroku iteracyjnego,  $n$  – całkowita liczba kroków.

Przebadane zostały następujące warianty identyfikacji:

- wariant 1: identyfikacja parametrów dla pełnego modelu w przypadku manipulatora nieobciążonego i z zerowymi warunkami początkowymi estymowanych parametrów – otrzymano  $J_e=0.01735$  [W];

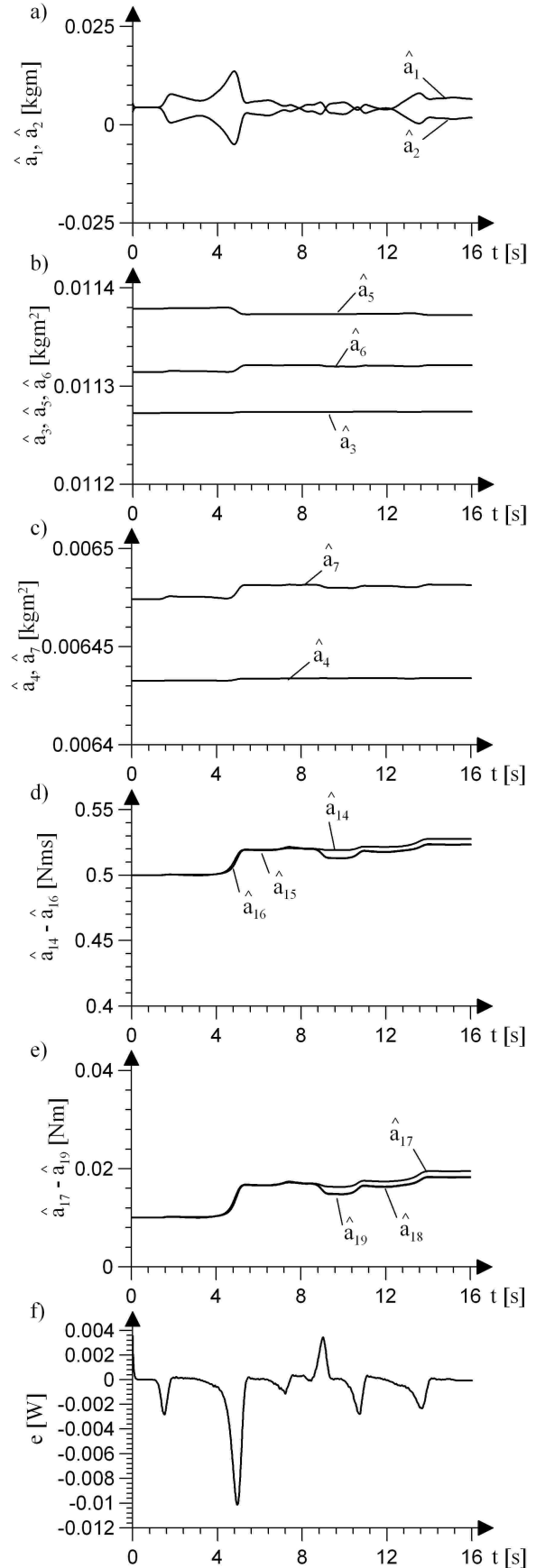
- wariant 2: identyfikacja parametrów dla modelu uproszczonego, tzn. bez uwzględniania parametrów  $a_8 - a_{13}$ , w przypadku manipulatora nieobciążonego i z zerowymi warunkami początkowymi estymowanych parametrów – otrzymano  $J_e=0.01735$  [W];
- wariant 3: identyfikacja parametrów dla modelu uproszczonego, tzn. bez uwzględniania parametrów  $a_8 - a_{13}$ , w przypadku manipulatora nieobciążonego i z niezerowymi warunkami początkowymi estymowanych parametrów (jako wartości początkowe przyjęto wartości parametrów z tabeli 1 dla przypadku manipulatora nieobciążonego) – otrzymano  $J_e=0.00178$  [W];
- wariant 4: identyfikacja parametrów dla modelu uproszczonego, tzn. bez uwzględniania parametrów  $a_8 - a_{13}$ , w przypadku manipulatora obciążonego (dane pomiarowe uzyskano podczas eksperymentu z wykorzystaniem manipulatora przenoszącego dodatkowy ciężar) i z niezerowymi warunkami początkowymi estymowanych parametrów (jako wartości początkowe przyjęto wartości parametrów z tabeli 1 dla przypadku manipulatora obciążonego) – otrzymano  $J_e=0.00227$  [W];

Porównanie wskaźników jakości z wariantów 1 i 2 identyfikacji nasuwa wniosek, że model uproszczony, tzn. bez parametrów  $a_8 - a_{13}$ , których wartości zależą od masowych momentów dewiacji członów 2 i 3, jest tak samo dokładny jak model pełny. Z tego względu zdecydowano się uprościć model matematyczny i w związku z tym w kolejnych wariantach identyfikacji stosowano model uproszczony. W wariantcie 3 identyfikacji wykorzystano pewną wstępną wiedzę o obiekcie rzeczywistym i dlatego przyjęto niezerowe wartości początkowe estymowanych parametrów. Przebieg estymowanych parametrów i błąd mocy dla tego przypadku przedstawiono na Rys. 6. Widać, że największe zmiany estymat parametrów występują w początkowej fazie, gdy błąd mocy jest największy, a następnie ustalają się. Wartości końcowe estymat parametrów przyjęto jako parametry manipulatora. Podobnie postąpiono w wariantcie 4 identyfikacji, z tym że wyznaczono w nim parametry dla manipulatora z maksymalnym obciążeniem chwytaka. Ostatecznie w modelu matematycznym manipulatora SCORBOT-ER 4pc przyjęto wartości parametrów z wariantu 3 i 4 identyfikacji odpowiednio dla manipulatora nieobciążonego i obciążonego. Nowy wektor parametrów ma następującą formę:

$$\mathbf{p} = [p_1 \dots p_{13}]^T = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_{14} \ a_{15} \ a_{16} \ a_{17} \ a_{18} \ a_{19}]^T. \quad (51)$$

Wartości parametrów przedstawiono w tabeli 3.

Uzyskane parametry nie muszą być parametrami rzeczywistymi manipulatora (tak jest najczęściej), gdyż w układach nieliniowych istnieje wiele punktów w przestrzeni parametrów, które zapewniają minimalizację przyjętego kryterium identyfikacji, czyli zapewniają zgodność wyjść z modelu i z obiektu rzeczywistego w świetle przyjętego kryterium.



**Rys. 6.** Wyniki estymacji parametrów dla modelu uproszczonego w przypadku manipulatora nieobciążonego i z niezerowymi warunkami początkowymi estymat parametrów (wariant 3): a) – e) estymaty parametrów, f) błąd mocy

**Tab. 3.** Wartości parametrów manipulatora SCORBOT-ER 4pc uzyskane w procesie identyfikacji parametrycznej

parametr	jednostka	bez obc.	z obc.
$p_1=a_1$	kgm	0.0065	0.0082
$p_2=a_2$		0.0018	0.0041
$p_3=a_3$	kgm <sup>2</sup>	0.0113	0.0161
$p_4=a_4$		0.0064	0.0113
$p_5=a_5$		0.0114	0.0163
$p_6=a_6$		0.0113	0.0162
$p_7=a_7$		0.0065	0.0113
$p_8=a_{14}$	Nms	0.5276	0.5345
$p_9=a_{15}$		0.5232	0.5340
$p_{10}=a_{16}$		0.5235	0.5342
$p_{11}=a_{17}$	Nm	0.0195	0.0221
$p_{12}=a_{18}$		0.0182	0.0216
$p_{13}=a_{19}$		0.0183	0.0217

W związku z przeprowadzonymi badaniami przyjęto ostatecznie model dynamiki manipulatora o strukturze danej równaniem (5), w którym wektory  $\mathbf{q}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_d(t)$ ,  $\mathbf{u}$  mają formę określoną równaniami odpowiednio (6), (19), (20), natomiast pozostałe macierze i wektory przyjmują formę:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_6 & l_2 p_2 \cos(q_3 - q_2) \\ 0 & l_2 p_2 \cos(q_3 - q_2) & p_7 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

gdzie:

$$M_{11} = 2p_1 e c_2 + 2p_2 (e + l_2 c_2) c_3 + 0.5 p_3 \cos(2q_2) + 0.5 p_4 \cos(2q_3) + p_5, \quad (53)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & 0 & -l_2 p_2 \sin(q_3 - q_2) \dot{q}_3 \\ C_{31} & l_2 p_2 \sin(q_3 - q_2) \dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (54)$$

gdzie:

$$C_{11} = -[p_1 e s_2 + p_2 l_2 s_2 c_3 + 0.5 p_3 \sin(2q_2)] \dot{q}_2 - [p_2 (e + l_2 c_2) s_3 + 0.5 p_4 \sin(2q_3)] \dot{q}_3, \quad (55)$$

$$C_{12} = -C_{21} = -[p_1 e s_2 + p_2 l_2 s_2 c_3 + 0.5 p_3 \sin(2q_2)] \dot{q}_1, \quad (56)$$

$$C_{13} = -C_{31} = -[p_2 (e + l_2 c_2) s_3 + 0.5 p_4 \sin(2q_3)] \dot{q}_1, \quad (57)$$

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} p_8 \dot{q}_1 + p_{11} \operatorname{sgn}(\dot{q}_1) \\ p_9 \dot{q}_2 + p_{12} \operatorname{sgn}(\dot{q}_2) \\ p_{10} \dot{q}_3 + p_{13} \operatorname{sgn}(\dot{q}_3) \end{bmatrix}, \quad (58)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = [0 \quad p_1 g c_2 \quad p_2 g c_3]^T. \quad (59)$$

Parametry występujące w modelu podane są w tabeli 3.

## 6. PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano sposób postępowania w przypadku modelowania nieliniowego obiektu dynamicznego na przykładzie manipulatora SCORBOT-ER 4pc. Podano sposób uproszczenia modelu dynamiki z wykorzystaniem równań wrażliwości. W wyniku przeprowadzonej identyfikacji uzyskano wartości parametrów modelu. Struktura modelu matematycznego posiada standardowe własności modelu manipulatora sztywnego z parami kinematycznymi obrotowymi (Canudas de Wit i inni, 1996).

## LITERATURA

1. **Canudas de Wit C., Siciliano B., Bastin G.** (1996), *Theory of robot control*, Springer-Verlag, Londyn.
2. **Cruz J.B.** (1977), *Układy ze sprzężeniem zwrotnym*, PWN, Warszawa.
3. **Eykhoff P.** (1980), *Identyfikacja w układach dynamicznych*, PWN, Warszawa.
4. **Hendzel Z., Nawrocki M.** (2006), Identyfikacja parametryczna manipulatora SCORBOT, *Postępy Robotyki*, T. 1, 77-86.
5. **Hendzel Z., Nawrocki M.** (2008), Neuronowa identyfikacja manipulatora SCORBOT, *Modelowanie Inżynierskie*, Z. 36, 135-142.
6. **Slotine J.J, Li W.** (1991), *Applied nonlinear control*, Prentice Hall, New Jersey.
7. **Söderström T., Stoica P.** (1997), *Identyfikacja systemów*, PWN, Warszawa.
8. **Spong M.W., Vidyasagar M.** (1997), *Dynamika i sterowanie robotów*, WNT, Warszawa.
9. **Tchoń K., Mazur A., Dułęba I., Hossa R., Muszyński R.** (2000), *Manipulatory i roboty mobilne. Modele, planowanie ruchu, sterowanie*, AOW PLJ, Warszawa.
10. **Żylski W.** (1996), *Kinematyka i dynamika mobilnych robotów kołowych*, OWPRz, Rzeszów.
11. **Żylski W., Nawrocki M.** (2006), Model dyskretny manipulatora Scorbota, W: *Teoria Maszyn I Mechanizmów* Zielona Góra, OWUZ, T. 1, 317-322.

## MODELLING OF MOVEMENT OF SELECTED MANIPULATOR

**Abstract:** In his paper modelling of movement of manipulator SCORBOT-ER 4pc is presented. Kinematics and dynamics equations, sensitivity equations and identification procedure are presented. Identification procedure based on principle of equivalence of kinetic energy and work. In identification signals from experiments are used. Results of verification of identification procedure and parameters of manipulator are presented.