

WPLYW KSZTAŁTU KARBU NA ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ NA JEGO KRAWĘDZI

Andrzej KAZBERUK*, Michał NIEDŹWIEDŹ*

*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny,
 Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

a.kazberuk@pb.edu.pl, niedzwiedzm@gmail.com

Streszczenie: W pracy porównano wpływ różnych geometrii konturu zaokrąglonego karbu typu V o identycznym kącie rozwarcia i krzywiznie wierzchołka na rozkłady naprężeń wzdłuż krawędzi karbów. Rozważono przypadki symetrycznego i antysymetrycznego stanu naprężeń w wierzchołku karbu.

1. WPROWADZENIE

Jak wykazano w pracy (Savruk i Kazberuk, 2006) wielkość maksymalnych naprężeń w wierzchołku zaokrąglonego karbu V poddanego rozciąganiu, zależy nie tylko od promienia krzywizny wierzchołka, ale także od kształtu karbu w pewnym otoczeniu wierzchołka. Stwierdzenie to stało się podstawą metody jednolitego podejścia do problemów koncentracji naprężeń w wierzchołkach karbów ostrych i zaokrąglonych (Savruk i Kazberuk, 2007). Podejście to, wykorzystujące zależność asymptotyczną – ważną dla małych promieni ρ zaokrąglenia wierzchołka karbu,

$$\sigma_{\max} = \frac{K_I^V}{\sqrt{2\pi}} R_I \rho^{-\lambda_1}, \quad (1)$$

umożliwiło obliczenie współczynników intensywności naprężeń w ostrych wierzchołkach karbów o kształcie V w wielu istotnych zagadnieniach teorii sprężystości (Kazberuk, 2007; Savruk i Kazberuk, 2007a, b, 2008). We wzorze (1) K_I^V - współczynnik intensywności naprężeń w wierzchołku odpowiedniego karbu ostrego, R_I - współczynnik wygładzenia naprężeń dla karbu poddanego symetrycznemu rozrywaniu. R_I zależy od kąta rozwarcia karbu β i kształtu karbu w okolicy wierzchołka. Postać funkcji $R_I(\beta)$ dla karbów o ramionach prostoliniowych i wierzchołku w postaci odcinka łuku kołowego została wyznaczona przez Savruka i Kazberuka (2006).

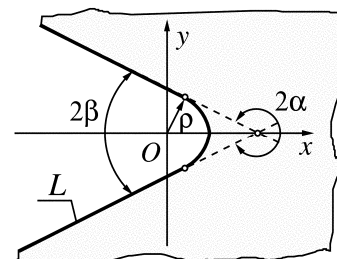
Celem pracy jest porównanie rozkładu naprężeń wzdłuż krawędzi zaokrąglonych karbów V dla dwóch różnych geometrii konturu karbu o identycznym promieniu krzywizny w wierzchołku. Rozważono przypadki symetrycznego i antysymetrycznego stanu naprężeń w wierzchołku karbu.

sprężystą z wyciętym nieskończonym karbem o zaokrąglonym wierzchołku (Rys.1). Ramiona karbu tworzą symetryczne względem osi Ox półproste. Wierzchołek jest zaokrąglony odcinkiem łuku kołowego o promieniu ρ . Kąt rozwarcia ramion karbu oznaczono 2β . Przyjmując, oznaczenie $\alpha = \pi - \beta$, parametryczne równanie konturu karbu zapisuje się w postaci $t = \rho\omega(\xi)$, gdzie:

$$\omega(\xi) = e^{i\xi\alpha} \begin{cases} -1/\sin(\xi\alpha - \beta), & 1 \leq \xi < -\xi_B, \\ 1, & -\xi_B \leq \xi \leq \xi_B, \\ -1/\sin(\xi\alpha + \beta), & \xi_B < \xi \leq 1, \end{cases} \quad (2)$$

Drugim rozważanym kształtem karbu jest hiperbola o równaniu (Benthem 1987):

$$\omega(\xi) = \frac{e^{i\xi\alpha} \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos \alpha\xi}, \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (3)$$



Rys.1. Nieskończony karb V o ramionach prostoliniowych i wierzchołku zaokrąglonym łukiem kołowym

Zespolone potencjały naprężeń (Muskhelishvili, 1953) zagadnienia brzegowego zapisano w postaci

$$\begin{aligned} \Phi_*(z) &= \Phi_0(z) + \Phi(z), \\ \Psi_*(z) &= \Psi_0(z) + \Psi(z), \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie funkcje $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ określają zaburzenie naprężeń wywołane obecnością karbu L . Poszukiwane potencjały mają następujące przedstawienia całkowite (Savruk, 1981):

2. KONCENTRACJA NAPRĘŻEŃ W WIERZCHOŁKU NIESKOŃCZONEGO KARBU TYPU V

Rozpatruje się jednorodną izotropową płaszczyznę

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{g'(t)}{t-z} dt, \quad (5)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{\overline{g'(t)}}{t-z} dt - \frac{t \overline{g'(t)}}{(t-z)^2} dt \right], \quad (6)$$

gdzie $g'(t)$ jest pochodną skoku przemieszczeń na krawędzi szczeliny.

Brzegi karbów są wolne od obciążeń a w nieskończoności pole naprężeń określa asymptotyka wyrażona poprzez zespolone potencjały naprężeń. Dla stanu symetrycznego mają one postać natępującą:

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \frac{K_I^V}{\sqrt{2\pi}} z^{-\lambda_I} \frac{1-\lambda_I}{A(\lambda_I)} \sin(2\alpha), \\ \Psi_0(z) &= -\frac{K_I^V}{\sqrt{2\pi}} z^{-\lambda_I} \frac{1-\lambda_I}{A(\lambda_I)} \sin(2\lambda_I \alpha), \\ A(\lambda_I) &= (\lambda_I^2 - 3\lambda_I + 2) \sin(2\alpha) - (1-\lambda_I) \sin(2\lambda_I \alpha) \end{aligned} \quad (7)$$

a dla przypadku antysymetrycznego

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= i \frac{K_{II}^V}{\sqrt{2\pi}} z^{-\lambda_{II}} \frac{1-\lambda_{II}}{B(\lambda_{II})} \sin(2\alpha), \\ \Psi_0(z) &= -i \frac{K_{II}^V}{\sqrt{2\pi}} z^{-\lambda_{II}} \frac{1-\lambda_{II}}{B(\lambda_{II})} \sin(2\lambda_{II} \alpha), \\ B(\lambda_{II}) &= (\lambda_{II}^2 - \lambda_{II}) \sin(2\alpha) - (1-\lambda_{II}) \sin(2\lambda_{II} \alpha) \end{aligned} \quad (8)$$

K_I^V, K_{II}^V to uogólnione współczynniki naprężeń w wierzchołku karbu ostrego, a λ_I i λ_{II} to wykładniki osobliwości naprężeń odpowiednio dla symetrycznego i antysymetrycznego rozkładu naprężeń, wyznaczane jako najmniejsze dodatnie pierwiastki równań charakterystycznych:

$$\begin{aligned} (1-\lambda_I) \sin 2\alpha + \sin 2(1-\lambda_I)\alpha &= 0; \\ (1-\lambda_{II}) \sin 2\alpha - \sin 2(1-\lambda_{II})\alpha &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

Zależności parametrów λ_I, λ_{II} od kąta β można aproksymować funkcjami (Savruk, Kazberuk 2009):

$$\begin{aligned} \lambda_I &\approx 1,247 \cos \beta - 1,312 \cos^2 \beta + \\ &+ 0,8532 \cos^3 \beta - 0,2882 \cos^4 \beta, \quad 0 \leq \beta \leq \pi/2, \\ \lambda_{II} &\approx 0,5 - 0,3134 \tan \beta - 0,2479 \tan^2 \beta + \\ &+ 0,1937 \tan^3 \beta - 0,0410 \tan^4 \beta, \quad 0 \leq \beta < 0,8945. \end{aligned} \quad (10)$$

Wzory (10) wykorzystywane są do określania wartości początkowych (z dokładnością $\pm 0,001$) wykładników osobliwości λ_I, λ_{II} przy rozwiązywaniu równań nieliniowych (9) metodą Newtona.

Rozwiązanie zadania uzyskano metodą osobliwych równań całkowych sformułowaną przez Savruka (1981). Warunek graniczny na brzegu obszaru ma postać:

$$\begin{aligned} \sigma_n + i\tau_{ns} &= p(t) = \\ &= -\left\{ \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{dt}{dt} \left[t \overline{\Phi_0'(t)} + \overline{\Psi_0(t)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

Spełniając warunek graniczny (11), uzyskuje się osobliwe równanie całkowe

$$\frac{1}{\pi} \int_L \left[K(t,t') g'(t) dt + L(t,t') \overline{g'(t)} dt \right] = p(t'), \quad t' \in L \quad (12)$$

którego jądra mają postać:

$$\begin{aligned} K(t,t') &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-t'} + \frac{1}{t-t'} \frac{d\overline{t'}}{dt'} \right), \\ L(t,t') &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-t'} + \frac{t-t'}{(t-t')^2} \frac{d\overline{t'}}{dt'} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Podobnie, jak w przypadku płaszczyzny ze szczeliną, jednoznaczność rozwiązania równania (12) zapewnia warunek

$$\int_L g'(t) dt = 0 \quad (14)$$

Podstawiając parametryczne równania konturu brzegu $t=l\omega(\xi), -1 \leq \xi \leq 1, t'=l\omega(\eta), -1 \leq \eta \leq 1$, oraz poszukując rozwiązania równania (?) w klasie funkcji nieoganiczonych na brzegach:

$$g'(l\omega(\xi)) \omega'(\xi) = \frac{u(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (15)$$

układ równań całkowych zapisano w formie

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[M(\xi, \eta) u(\xi) + N(\xi, \eta) \overline{u(\xi)} \right] \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = p(\eta), \\ \int_{-1}^1 u(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0, \end{cases} \quad (16)$$

gdzie

$$M(\xi, \eta) = lK(l\omega(\xi), l\omega(\eta)), \quad N(\xi, \eta) = lL(l\omega(\xi), l\omega(\eta)),$$

oraz $p(\eta) = p(l\omega(\eta))$.

Wykorzystując kwadraturę całkową Gauss'a-Chebysheva otrzymuje się dyskretny analog równania całkowego w postaci algebraicznego układu równań liniowych (Savruk, 1981)

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M(\xi_k, \eta_m) u(\xi_k) + N(\xi_k, \eta_m) \overline{u(\xi_k)} \right] = p(\eta_m), \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u(\xi_k) = 0, \end{cases} \quad m = \overline{1..(n-1)}, \quad (17)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \xi_k &= \cos \frac{\pi(2k-1)}{2n}, \quad k = \overline{1, \dots, n}; \\ \eta_m &= \cos \frac{\pi m}{n}, \quad m = \overline{1, \dots, n-1}. \end{aligned}$$

W celu obniżenia rzędu rozwiązywanego układu równań liniowych można wykorzystać symetrię karbu względem osi Ox , wówczas dla obciążeń symetrycznych (7) zachodzi

$$u(-\xi) = \overline{u(\xi)} \quad (18)$$

a dla antysymetrycznych (8)

$$u(-\xi) = -\overline{u(\xi)} \quad (19)$$

Przyjmując $n=2n$, wynikowy układ równań (17) zapisano w postaci następującej:

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n [M^*(\xi_k, \eta_m) u(\xi_k) + N^*(\xi_k, \eta_m) \overline{u(\xi_k)}] = p(\eta_m), \quad (20)$$

$$m = \overline{1..n},$$

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n [u(\xi_k) \pm \overline{u(\xi_k)}] = 0 \quad (21)$$

gdzie

$$M^*(\xi_k, \eta_m) = M(\xi_k, \eta_m) \pm N(-\xi_k, \eta_m),$$

$$N^*(\xi_k, \eta_m) = N(\xi_k, \eta_m) \pm M(-\xi_k, \eta_m). \quad (22)$$

Górny znak (+) odnosi się do symetrycznego stanu naprężeń, dolny (-) do antysymetrycznego. Współrzędne węzłów kwadratury i punktów kolokacji obliczane są ze wzorów:

$$\xi_k = \cos \frac{\pi(2k-1)}{4n}, \quad k = \overline{1..n};$$

$$\eta_m = \cos \frac{\pi m}{2n}, \quad m = \overline{1..n}.$$

Dla punktu $\eta_m=0$, przy symetrii konturu karbu względem osi Ox zespolone równanie (20) redukuje się do jednego równania rzeczywistego. Zatem dla $m=1..n$ uzyskuje się $(2n-1)$ równań rzeczywistych. Równanie jednoznaczności przemieszczeń w warunkach symetrii (21) również sprowadza się do jednego równania rzeczywistego. W ten sposób otrzymuje się konsystentny układ $2n$ równań liniowych o $2n$ rzeczywistych niewiadomych.

Rozciągające naprężenie na brzegu karbu, obliczono w punktach $\xi_m = \cos(\pi m / (2n))$, wykorzystując zależność (Savruk 1989)

$$\sigma_t = 4 \operatorname{Re}[\Phi_0(t) + \Phi^-(t)], \quad t \in L \quad (23)$$

gdzie $\Phi^-(t)$ jest wartością graniczną potencjału obliczaną zgodnie z regułą Suchockiego-Plemlja dla całek osobliwych typu Cauchy'ego (patrz np. Gakhov, 1977):

$$\Phi^-(t') = -\frac{i}{2} g'(t') + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{g'(t)}{t-t'} dt, \quad t' \in L,$$

zatem

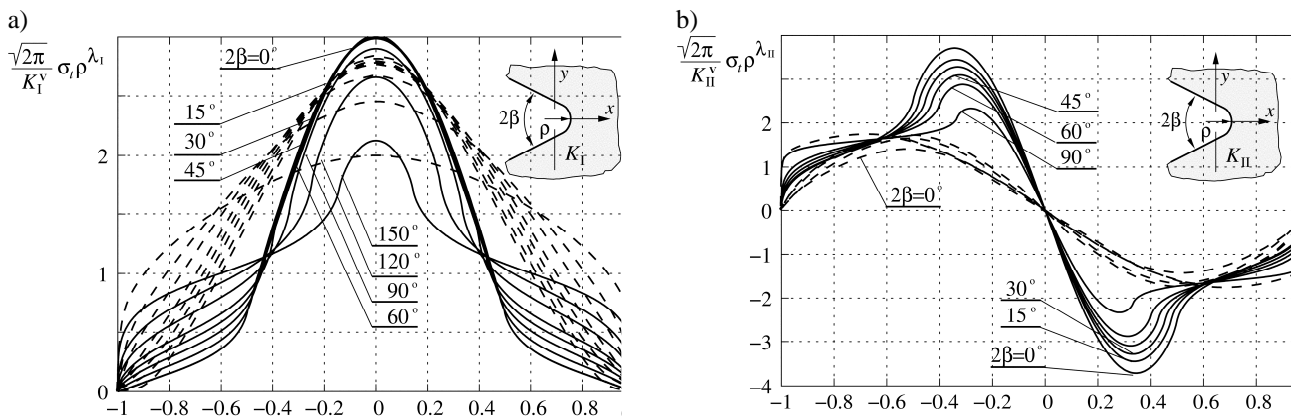
$$\sigma_t(\xi_m) = 4 \operatorname{Re}[\Phi_0(\omega(\xi_m)) + \left. -\frac{i}{2} \frac{u(\xi_m)}{\omega'(\xi_m) \sqrt{1-\xi_m^2}} + \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^n \frac{u(\xi_k) \pm \overline{u(\xi_k)}}{\omega(\xi_k) - \omega(\xi_m)} \right] \quad (24)$$

Ponieważ otrzymane w wyniku rozwiązania układu równań (20,21) wartości funkcji u dotyczą punktów ξ_k różnych od punktów ξ_m , w których oblicza się naprężenia, wartości $u(\xi_m)$ uzyskuje się stosując interpolację na węzłach Czebysheva (Natanson 1949). Uwzględniając symetrię układu i symetrię lub antysymetrię obciążenia otrzymano:

$$u(\xi_m) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+m} \sqrt{1-\xi_k^2} \left[\frac{u(\xi_k)}{\xi_m - \xi_k} \mp \frac{\overline{u(\xi_k)}}{\xi_m + \xi_k} \right]$$

Obliczenia przeprowadzono dla karbów o kątach rozwarcia $2\beta = \{0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ\}$. Przy wymaganej, szacunkowej dokładności obliczenia naprężeń poniżej 0,1%, niezbędna liczba węzłów kwadratury nie przekroczyła 4096. Do rozwiązania układu równań liniowych wykorzystano standardową procedurę DAGESV z pakietu LAPACK (Anderson i in. 1999).

Jak wynika z zależności (5) i (6) i (23) otrzymane naprężenia na konturze brzegu, są funkcjami uogólnionych współczynników intensywności naprężeń dla odpowiedniego karbu ostrego. Przebieg wartości naprężeń wzdłuż konturu karbu, w postaci bezwymiarowej, przedstawiono na Rys.1 dla symetrycznego (a) i antysymetrycznego (b) rozkładu naprężeń.



Rys. 2. Rozkład naprężeń na krawędzi zaokrąglonego karbu o kształcie V ; stan a) symetryczny b) antysymetryczny

3. WNIOSKI

Porównując rozkłady naprężeń dla zaokrąglonego karbu o ramionach prostoliniowych (Rys.1 – linie ciągłe) z rozwiązaniem dla karbu o kształcie hiperbolicznym (linie przerywane) można stwierdzić, że rozkłady naprężeń w otoczeniu wierzchołka karbu różnią się dosyć znacznie. Porównując naprężenia maksymalne w wierzchołku karbu w przypadku symetrycznym, różnice są nie większe niż 10% w zależności od kąta rozwarcia karbu. W takim samym stopniu rozbieżności te wpływają na obliczaną wartość współczynnika wygładzenia naprężeń R_I (Savruk i Kazberuk, 2006).

W przypadku antysymetrycznego rozkładu naprężeń, ekstremalne wartości naprężeń rozciągających występują w pewnej odległości od wierzchołka karbu. Jak wynika z przeprowadzonych obliczeń (Tab. 1), geometria karbu wpływa bardzo znacząco nie tylko na wielkość maksymalnych naprężeń – różnice są w tym przypadku ponad dwukrotne, ale również na lokalizację ekstremów. Dla karbów o ramionach prostych i wierzchołkach zaokrąglonych łukiem kołowym, lokalne maksima naprężeń zbliżają się do wierzchołka karbu wraz ze wzrostem kąta rozwarcia karbu 2β . Uwagę zwraca również charakter przebiegu maksymalnych wartości naprężeń w zależności od kąta rozwarcia karbu. W przypadku $2\beta=0$ hiperbola przechodzi w parabolę, dążąc do szczeliny matematycznej. Obliczony na podstawie zależności (Benthem, 1981):

$$|\sigma_{\text{extr}}| = \frac{K_{II}^V}{\sqrt{2\pi}} R_{II} \rho^{-\lambda_{II}}, \quad (25)$$

współczynnik wygładzenia naprężeń R_{II} osiąga wówczas wartość równą teoretycznej tj. $\sqrt{2}$ (Savruk, 1988). Dla kątów $2\beta > 0$, R_{II} rośnie osiągając maksimum dla $2\beta \approx \pi/3$. W przypadku karbu o ramionach prostoliniowych, największa wartość R_{II} występuje dla $2\beta=0$, czyli dla szczeliny fizycznej. Wraz ze wzrostem kąta rozwarcia karbu obliczona wartość R_{II} monotonicznie maleje. Tym samym, nieuwzględnianie kształtu karbu przy wyznaczaniu K_{II}^V na podstawie zależności typu (25) będzie prowadziło do bardzo dużych rozbieżności w zależności od kształtu karbu.

Tab. 1. Antysymetryczny stan naprężeń; bezwymiarowe

$$\text{naprężenia ekstremalne } \sigma_{\text{extr}} = |\sigma_{\text{max}}| \sqrt{2\pi} \rho^{\lambda_{II}} / K_{II}^V$$

2β	Kontur (3)		Kontur (4)	
	ξ_{max}	σ_{extr}	ξ_{max}	σ_{extr}
0°	0,520	1,414	0,343	3,731
15°	0,515	1,656	0,340	3,450
30°	0,540	1,757	0,332	3,287
45°	0,465	1,801	0,324	3,099
60°	0,592	1,803	0,313	2,880
90°	0,689	1,716	0,281	2,331

LITERATURA

1. **Andreson E., Bai Z., Bischof C., Blackford S., Demmel J., Dongarra J., DuCroz J., Greenbaum A., Hammerling S., McKenney A., Sorensen D.** (1999), *LAPACK User's Guide*, 3ed, Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics.
2. **Benthem J. P.** (1987), Stresses in the region of rounded corners, *International Journal of Solids and Structures*, 23(2):239 – 252.
3. **Gakhov F. D.** (1977), *Kraevye zadaci*. Nauka, Moskwa.
4. **Kazberuk A.** (2007) ,Koncentracja naprężeń wokół owalnego otworu, *Acta Mechanica et Automatica*, 1(2), 25–30.
5. **Muskhelišvili N. I.** (1966), *Nekotorye osnovnye zadaci matematičeskoj teorii uprugosti*, Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR, 5 edn.
6. **Natanson I. P.** (1949), *Konstruktivnâ teoriâ funkcji*, Moskva, Gostehizdat.
7. **Savruk M. P.** (1988), *Koëfficienty intensivnosti naprãženij v telah s trešinami, Meh. razrušeniâ i pročnosť materialov*, Sprav. posobie pod red. V.V.Panasûka, t.2, Kiev, Naukova Dumka.
8. **Savruk M. P., Kazberuk A.** (2006), Relationship between the stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded notches, *Materials Science*, 42(6), 725–738.
9. **Savruk M. P., Kazberuk A.** (2007b), A unified approach to problems of stress concentration near v-shaped notches with sharp and rounded tip, *International Applied Mechanics*, 43(2), 182–197.
10. **Savruk M. P., Osiv P.,N., Prokopčuk I.,V.** (1989), *Čislennyj analiz v ploskih zadačah teorii trešin*, Kiev, Naukova Dumka.
11. **Savruk M. P.** (1981), *Dvumernye zadaci uprugosti dlâ tel s trešinami*, Kiev, Naukova Dumka.
12. **Savruk M. P., Kazberuk A.** (2007a), Współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołku rombowego otworu w rozciąganej płaszczyźnie. *Acta Mechanica et Automatica*, 1(2), 45–48.
13. **Savruk M. P., Kazberuk A.** (2008), Plane periodic boundary value problem of elastostatics for half-plane with curvilinear edge, *Material Science*, 44(4), 461–470.

EFFECT OF NOTCH SHAPE ON THE STRESS DISTRIBUTION ALONGSIDE EDGES

Abstract: The stress field distribution alongside edges of two different infinite V-notch contours was presented. The comparison included hyperbolic notch and wedge with straight edges rounded at the top with the circular arc. The notch opening angles and curvature at notch apices were the same. Two basic stress states – symmetrical (mode I) and antisymmetrical (mode II) were analyzed.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego statutowego nr S/WM/2/08.