

SYNTEZA OPTYMALNA MECHANIZMÓW GENERUJĄCYCH KRZYWE OTWARTE

Jacek BUŚKIEWICZ*

*Instytut Mechaniki Stosowanej, Wydział Budowy Maszyn i Zarządzania,
Politechnika Poznańska, ul. Piotrowo 3, 60-965 Poznań

jacek.buskiewicz@put.poznan.pl

Streszczenie: W pracy zaprezentowano metodę syntezy generatorów krzywych otwartych. Przedstawiono ogólne założenia i na tej podstawie wyprowadzono matematyczne formuły umożliwiające rozwiązanie zadań syntezy czworoboku przegubowego oraz mechanizmu korbowo-wodzikowego. Metoda może być rozwinięta na pozostałe płaskie mechanizmy dźwigniowe z trzema ogniwami ruchowymi. Zaprezentowano wyniki testów numerycznych dla wybranych krzywych.

1. WPROWADZENIE

W technicznych zastosowaniach często wymaga się, aby człon roboczy maszyny przemieścić się po zadanym torze pomiędzy dwoma punktami. Wtedy właściwy ruch roboczy jest realizowany tylko w pewnym niepełnym zakresie kąta obrotu ogniwa czynnego, podczas gdy ruch poza tym zakresem jest mniej istotny.

Żądana krzywa zadana jest przez projektanta najczęściej w postaci zbioru punktów porównawczych. Jeżeli liczba zadanych punktów nie przekracza pewnej, charakterystycznej dla mechanizmu wartości, dokładne rozwiązanie jest możliwe, ale nie zawsze gwarantowane. Gdy wiadomo, że mechanizm nie zakreśli krzywej dokładnie przechodzącej przez zadane punkty, poszukuje się jego wymiarów, aby zakreślił on krzywą najbliższą zadanemu torowi w sensie wprowadzonej normy odległości. Wtedy zadanie nazywa się optymalną syntezą generatora krzywej. Gdy krzywa generowana przez punkt mechanizmu jest opisana niezależnie od położenia ogniwa czynnego, problem jest znany jako synteza krzywej bez funkcji czasu.

Synteza generatora krzywej otwartej (lub inaczej łuku krzywej) jest zadaniem bardzo złożonym, gdyż wymaga opracowania matematycznej metody rozpoznania fragmentu wygenerowanej otwartej lub zamkniętej trajektorii, który jest najlepiej dopasowany do łuku zadanego. Choć istnieją techniki niezależne od rodzaju zadanej krzywej, syntezę generatora krzywej zamkniętej oraz łuku otwartego najczęściej traktuje się oddzielnie. Technika geometrycznej adaptacji (*geometrical adaptation technique*) (Sanchez i Gonzalez, 2004) została opracowana na potrzeby syntezy generatora łuku i zaprezentowana na przykładzie czworoboku przegubowego. Opis własności geometrycznych łuku przy pomocy bezwymiarowych wielkości pozwolił zminimalizować liczbę optymalizowanych parametrów do pięciu. W pracy Lio i innych, (2000) zadanie syntezy zostało sprowadzone do układu zwyczajnych równań różniczkowych rzędu pierwszego z warunkami początkowymi. Metoda ta jest na tyle ogólna, że może być stosowana do poszukiwania generatorów krzywych zamkniętych oraz otwartych. Przykładami ilustrującymi metodę były czworoboki przegubowe aproksymujące

odcinek prostej oraz krzywą łamaną zbudowaną z dwóch odcinków tworzących kąt prosty. Metody zaprezentowane w pracach Akcali i Dittrich (1989) i Lio (1997) są również niezależne od rodzaju krzywych. Najwięcej prac poświęcono syntezie mechanizmów aproksymujących odcinki prostej (Gronowicz i Szrek, 2008). Metody analityczne (Vidosic i Tesar, 1967; Karelina, 1985; Hodges i Pisano, 1991; Dijksman i Smails, 1996; Dijksman i Smails, 2000; Jianyou i inni 2009), wśród nich metody macierzy geometrycznej oraz macierzy przemieszczeń (*geometric and displacement matrix methods*), zostały opracowane na potrzeby syntezy czworoboków przegubowych, których krzywe łącznikowe zawierają odcinki prostych.

W niniejszej pracy omówiono metodę optymalnej syntezy, która jest zorientowana na minimalizację liczby optymalizowanych zmiennych projektowych (Buśkiewicz, 2009). Może być ona zastosowana do mechanizmów z trzema ogniwami ruchowymi, w których położenie katowe łącznika podczas jednego obrotu korby zmienia się jak funkcja okresowa typu sinus. Przykładami takich mechanizmów są czworobok przegubowy oraz mechanizm korbowo-wodzikowy. Pierwszy z nich posłużył do prezentacji matematycznego opisu metody. Następnie nieznaczna modyfikacja metody umożliwiła syntezę mechanizmu korbowo-wodzikowego, co stanowi element nowości w porównaniu z pracą Buśkiewicza (2009).

2. OPIS METODY SYNTEZY GENERATORA KRZYWEJ OTWARTEJ NA PRZYKŁADZIE CZWOROBOKU PRZEGUBOWEGO

Liczba parametrów opisujących w pełni geometrię czworoboku przegubowego wynosi 9. Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na Rys. 1 są to: x_{0i} , y_{0i} , x_{02} , y_{02} , l_1 , l_2 , l_3 , l_5 , θ_4 . W syntezie generatora krzywej otwartej dwa dodatkowe parametry są optymalizowane wraz z wymienionymi wyżej dziewięcioma. Są to położenia katowe θ_{10} i θ_{11} wyznaczające zakres kąta obrotu ogniwa czynnego, dla którego łuk jest kreślony.

W prezentowanej metodzie żądany łuk jest zadany parametrycznie w układzie współrzędnych kartezjańskich

$$x = x(s), \quad y = y(s). \quad (1)$$

Bez utraty ogólności rozważań można przyjąć, że $s \in \langle 0, 1 \rangle$.

Funkcja położenia kąтового łącznika oznaczona jako θ_{2L} jest mierzona przeciwnie do ruchu wskazówek zegara od dodatniego kierunku osi poziomej do ramienia łącznika DA (Rys. 1). Dla czworoboku korbowo-wahaczowego kąt θ_{2L} jest funkcją okresową o okresie 2π , której parametrami są wymiary mechanizmu, a argumentem jest położenie katowe korby. Wartości kąta zawierają się w przedziale $(0, 2\pi)$ (lub $(-\pi, \pi)$), i każda wartość jest osiągnięta dwa razy. Kąt θ_{2L} jest związany z kątem θ_2 formułą

$$\theta_{2L} = \theta_2 + \theta_4 + \gamma + \pi. \quad (2)$$

Chociaż to θ_2 najczęściej określa położenie katowe łącznika czworoboku przegubowego, wprowadzono kąt θ_{2L} , aby nie kojarzyć metody z konkretnym mechanizmem.

$$\theta_{2L} = 2 \arctg \frac{-K_E \pm \sqrt{K_E^2 - 4K_D K_F}}{2K_D}, \quad (3)$$

gdzie:

$$K_D = \cos \theta_1 + K_5 - K_1 + K_4 \cos \theta_1, \quad K_E = -2 \sin \theta_1,$$

$$K_F = K_1 + K_5 + (K_4 - 1) \cos \theta_1,$$

$$K_1 = \frac{l_4}{l_1}, \quad K_4 = \frac{l_4}{l_2}, \quad K_5 = \frac{-l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 - l_4^2}{2l_1 l_2}.$$

Gdy łuk zadany jest parametrycznie za pomocą równań (1), kąt θ_2 jest funkcją parametru s wprowadzonego do niej w funkcji kąta obrotu ogniwa czynnego $\theta_1(s)$. Ale postać $\theta_1(s)$ nie jest znana i musi być narzucona, np. jako $\theta_1 = \theta_{10} + (\theta_{11} - \theta_{10})s$, co jest pewnym przybliżeniem θ_2 , a zatem i θ_{2L} .

Można pokazać, że prawdziwe jest twierdzenie:

Istnieje monotoniczna funkcja $\theta_1(s)$ będąca argumentem kąta θ_2 wyrażonego wzorem (3) taka, że prawdziwe jest równanie

$$\theta_2 = \theta_{2L} - (\theta_4 + \gamma + \pi),$$

gdzie θ_{2L} wyrażona jest wzorem

$$\theta_{2L} = v_1 \sin(v_2 s + v_3) + v_4, \quad (4)$$

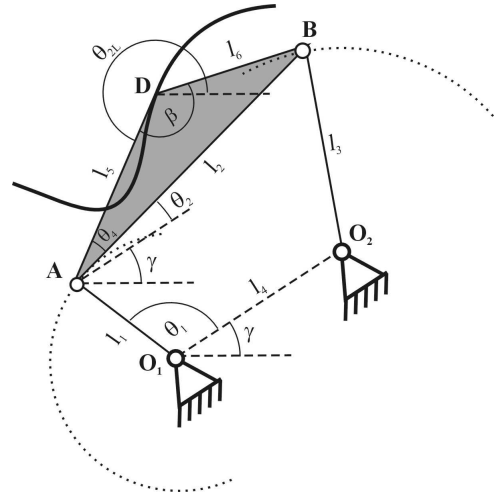
gdzie v_1, v_2, v_3, v_4 to współczynniki funkcji.

Zatem można dobrać taką funkcję $\theta_1(s)$ (kąt obrotu ogniwa czynnego), aby θ_2 zmieniała się jak funkcja $\sin()$.

$$\theta_2^* = \theta_2(\theta_1(s)) = v_1 \sin(v_2 t + v_3) + v_4 - (\theta_4 + \gamma + \pi). \quad (5)$$

Żądanie, aby funkcja $\theta_1(s)$ była monotonicznie związana jest z koniecznością zapewnienia jednego kierunku obrotu ogniwa czynnego. Znajomość postaci funkcji $\theta_1(s)$ nie jest wymagana. Równanie parametryczne łuku (1) oraz położenie katowe łącznika (4) są wyrażeniami tego samego argumentu s , co wprowadza niejawną zależność między kątem obrotu łącznika a współrzędnymi położenia punktu kreślącego łuk. Ta tkwiąca w przyjętych założeniach cecha,

a nie uproszczenie funkcji położenia katowego łącznika, jest główną niedogodnością metody.



Rys. 1. Ilustracja do prezentacji metody syntezy czworoboku przegubowego

Kąt θ_{2L} zmienia się w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$, zatem $v_1 \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Położenie katowe ogniwa O_1A $\theta_1 \in (\theta_{10}, \theta_{11}) \subset \langle 0, 2\pi \rangle$, jest związane, ale nie równe, z argumentem $(v_2 s + v_3)$ (analogia z wyrażeniem $\theta_1 = \theta_{10} + (\theta_{11} - \theta_{10})s$). Jeżeli $s \in \langle 0, 1 \rangle$, v_2 powinno zmieniać się w przedziale $(-2\pi, 2\pi)$. Kąt fazowy $v_3 \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$ reprezentuje położenie katowe ogniwa czynnego $\theta_1 = \theta_{10}$, w którym łuk zaczyna być kreślony. Kąt θ_{2L} jest wrażliwy na obrót mechanizmu. Gdy mechanizm zostanie obrócony o kąt $v_4 \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$, θ_{2L} jest przesunięty o v_4 .

Idea metody polega na wyznaczeniu takich

- wymiarów łącznika: długości l_5, l_6 oraz kąta β ;
- współczynników funkcji (4): v_1, v_2, v_3, v_4 ;

aby węzły łącznika poruszały się po torach wynikających z geometrii mechanizmu, gdy punkt łącznika D zakreślałby zadany łuk (1).

Podsumowując, metoda wiąże własności funkcji położenia katowego i wymiary łącznika. Siedem parametrów projektowych: $l_5, l_6, \beta, v_1, v_2, v_3, v_4$ jest optymalizowanych. Zagadnienie opisują dwa parametry więcej niż minimalna liczba parametrów optymalizowanych w syntezie czworoboku przegubowego, ale cztery mniej, niż maksymalna liczba jego parametrów geometrycznych. Opis jest niewrażliwy na przesunięcie (tzn. zmienne projektowe zadania nie zmieniają się, gdy mechanizm zostanie przesunięty), co pozwala wykluczyć dwa parametry – współrzędne punktu $O_1(x_{0i}, y_{0i})$. Dalsza redukcja liczby parametrów związana jest ze sposobem przybliżenia kąta θ_{2L} , który jest funkcją v_1, v_2, v_3, v_4 zamiast $l_1, l_2, l_3, l_4, \theta_{10}$ i θ_{11} .

Gdy punkt D zakreślałby zadany łuk, węzły łącznika poruszają się po torach zależnych od konkretnych wartości parametrów. Funkcja celu mierzy odchylenia tych torów od torów rzeczywistych, po których poruszałyby się węzły, gdyby łącznik był zmontowany z pozostałymi ogniwami mechanizmu.

Stosowalność metody nie jest zawężona do jednego mechanizmu, gdyż nie wykorzystuje ona wzorów opisujących geometrię mechanizmu. Wystarczy znać trajektorie,

po jakich poruszają się węzły łącznika. W czworoboku przegubowym węzły łączące łącznik z ogniwami obrotowymi O_1A i O_2B poruszają się po okręgach lub ich łukach. Promienie i środki tych okręgów to odpowiednio długości oraz punkty podparcia ogniw O_1A i O_2B . Te parametry są funkcjami zmiennych optymalizowanych. W idealnym przypadku torami węzłów łącznika są łuki okręgów, ale dla dowolnych parametrów toru są pewnymi krzywymi. Kolejnym etapem jest zdefiniowanie funkcji celu, która mierzy odchylenie tych torów od okręgów.

Ze względu na konieczność numerycznej implementacji metody realizującej zadania syntezy łuk jest dyskretyzowana do ciągu m punktów. Po wygenerowaniu krzywych

$$x_A = x + l_5 \cos \theta_{2L}, \quad y_A = y + l_5 \sin \theta_{2L},$$

$$x_B = x + l_6 \cos(\theta_{2L} + \beta), \quad y_B = y + l_6 \sin(\theta_{2L} + \beta).$$

wyznacza się kolejne ciągi parametrów x_{O_i}, y_{O_i} . Parametr l_{1i} oraz $x_{O_i}, y_{O_i}, l_{3i}, l_{1i}$ jest promieniem okręgu o środku w punkcie (x_{O_i}, y_{O_i}) przechodzącego przez trzy punkty (Rys. 2):

$$A_{1i}(x_A(s_{1i}), y_A(s_{1i})), \quad A_{2i}(x_A(s_{2i}), y_A(s_{2i})),$$

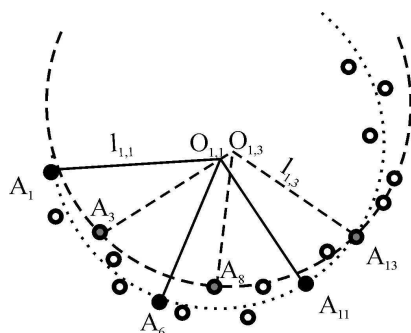
$$A_{3i}(x_A(s_{3i}), y_A(s_{3i})),$$

gdzie: $s_{1i}=i\Delta s, \quad s_{3i}=1/2+i\Delta s, \quad s_{2i}=1/2(s_{3i}+s_{1i}), \quad \Delta s=1/m,$
oraz $i=1 \dots m^*, \quad m^*=[m/2]$.

Parametr l_{3i} jest promieniem okręgu o środku w punkcie (x_{O_i}, y_{O_i}) przechodzącego przez trzy punkty:

$$B_{1i}(x_B(s_{1i}), y_B(s_{1i})), \quad B_{2i}(x_B(s_{2i}), y_B(s_{2i})),$$

$$B_{3i}(x_B(s_{3i}), y_B(s_{3i})).$$



Rys. 2. Dwa przykładowe okręgi przechodzące przez punkty A_1, A_6, A_{11} oraz A_3, A_8, A_{13} o promieniach $l_{1,1}$ oraz $l_{1,3}$ i środkach w $O_{1,1}$ oraz $O_{1,3}$ (liczba punktów $m=20$)

Łatwo można pokazać, że dla każdej trójki punktów toru węzła A odpowiednie promienie oraz współrzędne środków okręgów wynoszą

$$x_{O_i} = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}},$$

$$y_{O_i} = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad (6)$$

$$l_{1i} = \sqrt{(x_A(s_{2i}) - x_{O_i})^2 + (y_A(s_{2i}) - y_{O_i})^2},$$

gdzie:

$$a_{11} = 2(x_A(s_{1i}) - x_A(s_{2i})), \quad a_{12} = 2(y_A(s_{1i}) - y_A(s_{2i})),$$

$$a_{21} = 2(x_A(s_{1i}) - x_A(s_{3i})), \quad a_{22} = 2(y_A(s_{1i}) - y_A(s_{3i})),$$

$$b_1 = x_A^2(s_{1i}) + y_A^2(s_{1i}) - x_A^2(s_{2i}) - y_A^2(s_{2i}),$$

$$b_2 = x_A^2(s_{1i}) + y_A^2(s_{1i}) - x_A^2(s_{3i}) - y_A^2(s_{3i}).$$

Po uśrednieniu wyrażen (6) otrzymuje się współrzędne punktu podparcia ogniwa O_1A oraz jego długość:

$$x_{O_1} = \frac{\sum_{i=1}^{m^*} x_{O_i}}{m^*}, \quad y_{O_1} = \frac{\sum_{i=1}^{m^*} y_{O_i}}{m^*}, \quad l_1 = \frac{\sum_{i=1}^{m^*} l_{1i}}{m^*}. \quad (7)$$

Analogicznie za pomocą wzorów (6-7) ze współrzędnymi węzła B podstawionymi w miejsce współrzędnych węzła A wyznacza się współrzędne punktu podparcia (x_{O_2}, y_{O_2}) oraz długość $l_3=|O_2B|$ ogniwa O_2B .

Funkcja celu ma postać

$$E_\rho = \frac{\max|O_1A_i| - \min|O_1A_i|}{l_1} + \frac{\max|O_2B_i| - \min|O_2B_i|}{l_3}. \quad (8)$$

3. SCHEMAT DZIAŁANIA ALGORYTMU OPTYMALIZUJĄCEGO

Funkcja celu jest minimalizowana za pomocą algorytmu ewolucyjnego. Sam algorytm nie zawiera specjalnych rozwiązań i jako narzędzie powszechnie stosowane w teorii mechanizmów nie będzie w pracy bardziej szczegółowo opisywany (Goldberg, 1994). Opisano tylko te operacje, które są wykonywane dla pojedynczego osobnika w każdej iteracji (każdym pokoleniu). Osobnikiem jest wektor zawierający optymalizowane parametry: $l_5, l_6, \beta, v_1, v_2, v_3, v_4$.

Dla każdego zestawu parametrów kolejno wykonuje się następujące punkty algorytmu:

1) Sprawdzenie, czy wymiary łącznika spełniają zadane ograniczenia konstrukcyjne

$$l_{5d} \leq l_5 \leq l_{5g}, \quad l_{6d} \leq l_6 \leq l_{6g}. \quad (9)$$

2) Sprawdzenie, czy ogniwo czynne obraca się w jednym kierunku podczas wykreślenia łuku.

Ogniwo czynne musi obracać się zgodnie z ruchem

$$\forall s_1 > s_2, \quad \theta_1(s_1) < \theta_1(s_2), \quad (10a)$$

lub przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

$$\forall s_1 > s_2, \quad \theta_1(s_1) > \theta_1(s_2). \quad (10b)$$

Wyznaczenie kątów θ_1 na tym etapie jest niemożliwe, dlatego jednokierunkowość obrotu ogniwa O_1A jest sprawdzana inaczej. Jeżeli \mathbf{p}_i jest wektorem rozpiętym między punktami A_{i-1} i A_i , następujący warunek pozwala sprawdzić, czy ogniwo czynne obraca się w jednym kierunku

$$0 < \cos(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}) = \frac{\mathbf{p}_i \circ \mathbf{p}_{i+1}}{\|\mathbf{p}_i\| \|\mathbf{p}_{i+1}\|} < 1, \quad (11)$$

dla każdego $i = 1..m$.

3) Wyznaczenie wartości funkcji celu (8).

4) Wyznaczenie współrzędnych punktów podparcia O_1 i O_2 oraz długości ogniów O_1A i O_2B .

5) Sprawdzenie, czy długości ogniów O_1A i O_2B spełniają zadane ograniczenia konstrukcyjne

$$l_{1d} \leq l_1 \leq l_{1g}, \quad l_{2d} \leq l_2 \leq l_{2g}. \quad (12)$$

6) Można również wprowadzić warunek, aby podczas wykreślania łuku ogniwo czynne wykonało obrót większy niż minimalny wymagany $\Delta\theta_1$.

$$|\theta_{11} - \theta_{10}| \geq \Delta\theta_1. \quad (13)$$

Dla optymalnego rozwiązania wyznacza się pozostałe wymiary czworoboku:

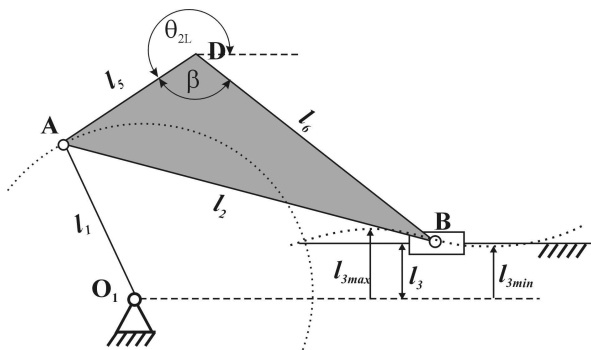
$$l_2 = l_5^2 + l_6^2 - 2l_5l_6 \cos \beta, \quad (14)$$

$$l_4 = \sqrt{(x_{O_1} - x_{O_2})^2 + (y_{O_1} - y_{O_2})^2},$$

$$\gamma = \arctg((y_{O_2} - y_{O_1}) / (x_{O_2} - x_{O_1})).$$

Należy podkreślić, że te parametry są wtórnymi wynikami metody, ponieważ są obliczane dopiero po zakończeniu procesu optymalizującego.

4. ADAPTACJA METODY DO SYNTEZY MECHANIZMU KORBOWO-WODZIKOWEGO



Rys. 3. Mechanizm korbowo-wodzikowy z parametrami istotnymi dla metody

Metodę można łatwo przenieść na mechanizmy z trzema ogniwami ruchomymi połączonymi za pomocą węzłów obrotowych lub przesuwnych. Aby zaadaptować metodę do syntezy mechanizmu korbowo-wodzikowego (Rys. 3), należy zmodyfikować funkcję celu. Jądro algorytmu nie ulega zmianie. Długość korby i współrzędne jej mocowania oblicza się identycznie. Średnia wartość y-owych współrzędnych położenia węzła B wyznacza poziom l_3 , na którym znajduje się prowadnica. Różnica tej wartości i współrzędnej y_{O_1} położenia węzła A to wymiar l_3 . Funkcja celu mierzy odchylenie toru węzła A korbodu od łuku okręgu, a toru węzła B od linii prostej:

$$E_\rho = \frac{\max|O_1A_i| - \min|O_1A_i|}{l_1} + \frac{l_{3\max} - l_{3\min}}{l_3}. \quad (15)$$

5. DYSKUSJA ROZWIĄZAŃ NUMERYCZNYCH

Testy numeryczne zostaną przeprowadzone na wybranych łukach testowych. Kilka z nich zostało zaczerpniętych z literatury, aby zweryfikować metodę na tle znanych technik (Sanchez i Gonzalez, 2004; Lio i inni, 2000).

Wybrano następujące łuki testowe:

L1: Łuk zbudowany z dwóch odcinków tworzących ze sobą kąt prosty:

$$x = \begin{cases} 2s & 0 \leq s \leq 0.5 \\ 1 & 0.5 < s \leq 1 \end{cases}, \quad y = \begin{cases} 0 & 0 \leq s \leq 0.5 \\ 2s-1 & 0.5 < s \leq 1 \end{cases}.$$

L2:

$$x = 4s, \quad y = 0.1 \sin(2\pi s), \quad s \in (0,1).$$

L3:

$$x = 4s, \quad y = 0.5 \sin\left(\frac{3}{2}\pi s + \frac{\pi}{2}\right), \quad s \in (0,1).$$

L4: Łuk generowany przez czworobok przegubowy o wymiarach: $l_1=1, l_2=2, l_3=2, l_4=2, l_5=3, \theta_4=1$, dla zakresu kąta obrotu ogniwa czynnego: $1.5 \leq \theta_1 \leq 4.5$.

Tab. 1. Wartości parametrów otrzymane za pomocą prezentowanej metody dla wybranych łuków testowych

Łuk E_ρ	Parametry						
	l_5	l_6	β	v_1	v_2	v_3	v_4
Czworobok przegubowy							
L1 0.09	12.9	6.84	0.61	0.33	2.75	-4.7	0
L2 0.07	5.1	3.52	1.32	1.41	0.84	0.01	0
L4 0.05	7.6	4.13	0.5	4.1	0.52	0.8	0
Mechanizm korbowo-wodzikowy							
L1 0.17	13.6	15.52	1.4	0.24	2.46	1.7	0
L3 0.15	10.2	29.9	4.82	0.16	3.07	0.49	0

Trzy łuki są zadane parametrycznie, czwarty L4 jest fragmentem krzywej łącznikowej czworoboku przegubowego. Od efektywnej metody należy oczekiwać dokładnych rozwiązań zadań syntezy z łukami krzywych łącznikowych.

Zadania rozwiązano pomijając parametr v_4 w funkcji (4), ponieważ zwiększenie liczby wykonywanych obliczeń numerycznych związanych z optymalizacją dodatkowego parametru nie zostało skompensowane przez znaczący wzrost dokładności rozwiązań. Parametr v_4 jest niezbędny, jeżeli krzywa jest kreślona podczas pełnego obrotu ogniwa czynnego. Poszukiwany łuk jest generowany dla pewnego zakresu kąta obrotu ogniwa czynnego. Funkcja położenia kąтового łącznika θ_{2L} jest dobrze aproksymowana w tym przedziale funkcją (4) z parametrem $v_4=0$. Otrzymane podczas rozwiązywania zadań syntezy wartości zmiennych projektowych zawarto w tabeli 1. Wymiary czworoboków przegubowych wyznaczone na podstawie tych zmiennych oraz zakresy kąta obrotu ogniwa czynnego, dla których łuki zostały wygenerowane, zawiera tabela 2. Tabela 3 przed-

stawia liczby punktów definiujących łuki, ograniczenia narzucone na wymiary mechanizmu oraz minimalne dopuszczalne zakresy kąta obrotu ogniwa czynnego.

Tab. 2. Pozostałe parametry geometryczne mechanizmów aproksymujących łuki testowe wyznaczone na podstawie zoptymalizowanych parametrów

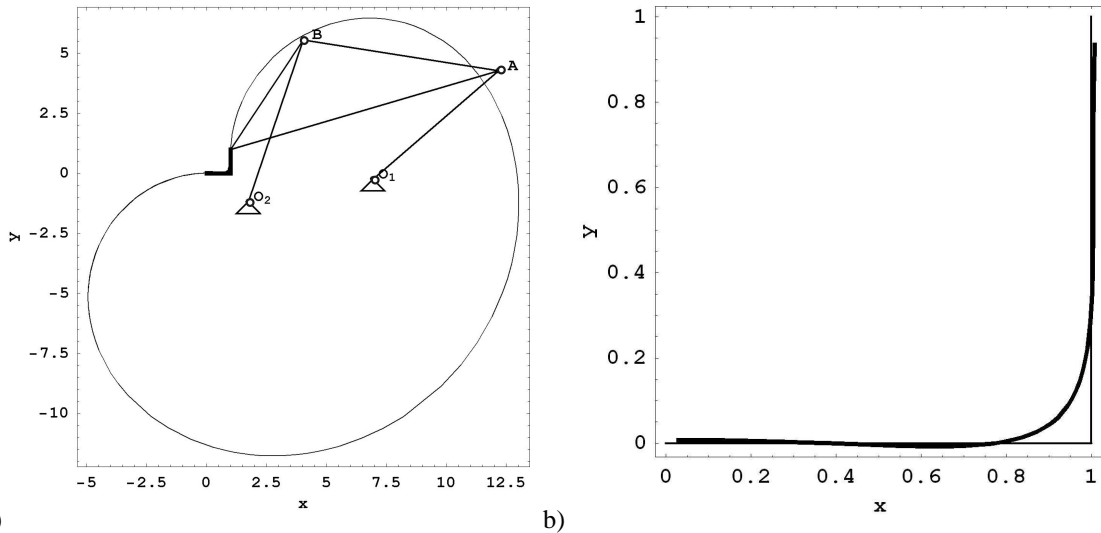
Łuk	Parametry							
	l_1	l_3	x_{O_1}	y_{O_1}	x_{O_2}	y_{O_2}	θ_{10}	θ_{11}
Czworobok przegubowy								
L1	6.9	7.12	6.94	-0.24	1.75	-1.18	-3.74	-2.61
L2	9.5	1.41	-3.01	5.11	2.2	3.63	-0.28	0.21
L4	4.8	3.95	-0.38	2.26	-0.94	0.31	2.24	3.76
Mechanizm korbowo-wodzikowy								
L1	4.9	15.7	9.71	-0.16	-	-	-0.34	0.76
L3	3.2	-27.2	12.8	-2.14	-	-	1.16	2.53

Tab. 3. Liczba punktów definiujących łuk oraz ograniczenia nałożone na mechanizmy: maksymalne dopuszczalne długości ogniw oraz minimalna dopuszczalna wartość $\Delta\theta_1$

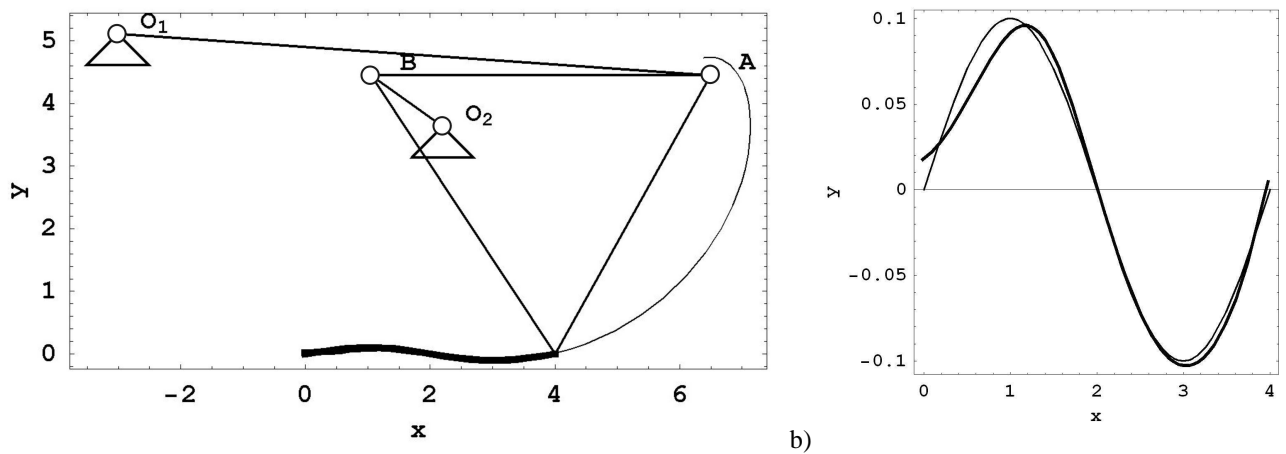
Łuk	m	Więzy				$\Delta\theta_1$
		l_{5g}	l_{6g}	$\text{Max}(l_1)$	$\text{Max}\left(\frac{l_3}{l_1}\right)$	
Czworobok przegubowy						
L1	30	15	10	8	5	$\frac{\pi}{8}$ k*
L2	10	20	30	10	5	$\frac{\pi}{8}$ w*
L4	10	20	30	5	5	$\frac{\pi}{4}$ k
Mechanizm korbowo-wodzikowy						
L1	30	20	30	5	15	$\frac{\pi}{4}$ w
L3	10	20	30	5	5	$\frac{\pi}{4}$ k

*k – ogniwo czynne wykonuje pełny obrót,

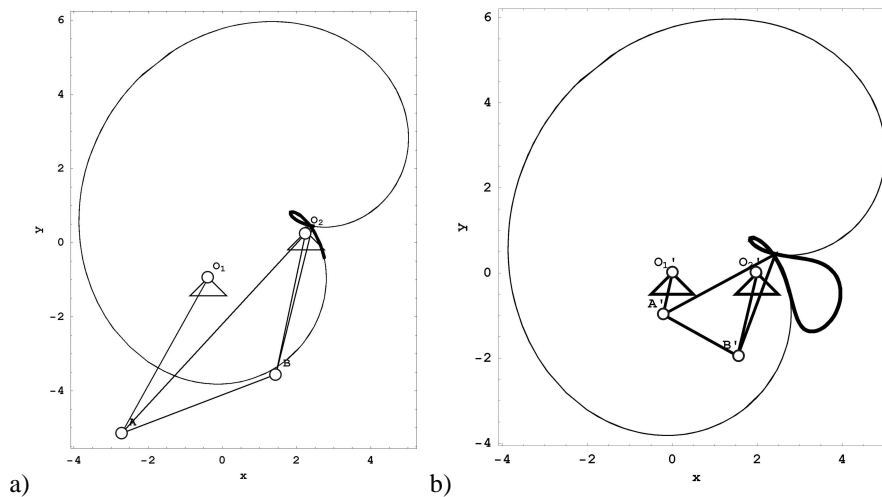
**w – ogniwo czynne nie wykonuje pełnego obrotu



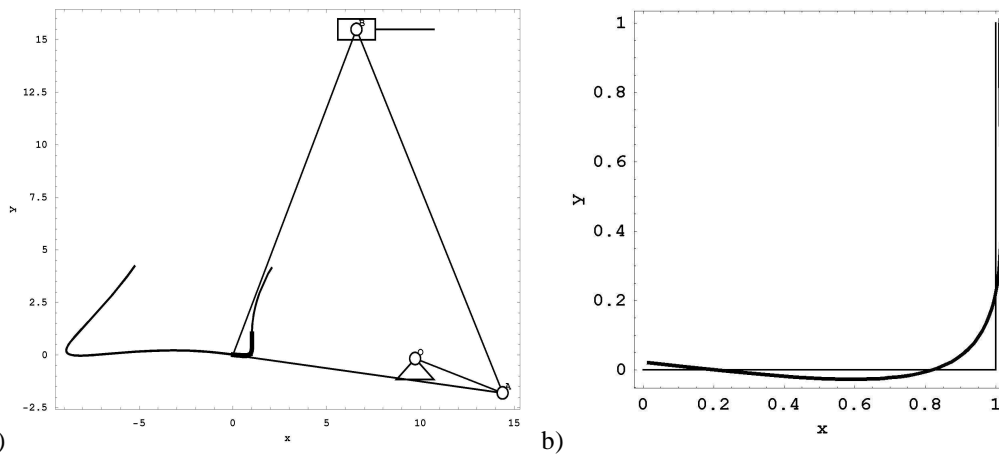
Rys. 4. Czworobok dwukorbowy aproksymujący łuk L1 (a), porównanie krzywych zadanej (linia cienka) i generowanej (linia pogrubiona) (b)



Rys. 5. Czworobok dwuwahaczowy aproksymujący łuk L2 (a), porównanie krzywych zadanej (linia cienka) i generowanej (linia pogrubiona) (b)



Rys. 6. Znaleziony przez algorytm czworobok przegubowy aproksymujący łuk L4 (a), zadany czworobok generujący łuk L4 oraz porównanie łuków zadanego i wygenerowanego (b)



Rys. 7. Znaleziony przez algorytm mechanizm korbowo-wodzikowy aproksymujący łuk L1 (a), porównanie łuków zadanego (linia cienka) i wygenerowanego (linia pogrubiona) (b)

Dobre przybliżenia uzyskuje się wykonując obliczenia dla $m=10$ punktów na łuku. Funkcja celu była minimalizowana w przestrzeni rozwiązań ograniczonej kilkoma warunkami (Tab. 3). Minimalny wymagany zakres kąta obrotu ogniwa czynnego $\Delta\theta_1$, dla którego łuk zostaje wykreślony, wynosi $\pi/8$ lub $\pi/4$. Kąt ten ogranicza obszar roboczy i pozwala zachować rozsądne proporcje między wielkością mechanizmu (lub długością całej wygenerowanej krzywej) a długością łuku. Ten warunek zostaje wzmocniony przez podanie maksymalnych dopuszczalnych: wymiarów łącznika l_{5g} i l_{6g} , długości ogniwa O_1A oraz stosunku długości l_3/l_1 .

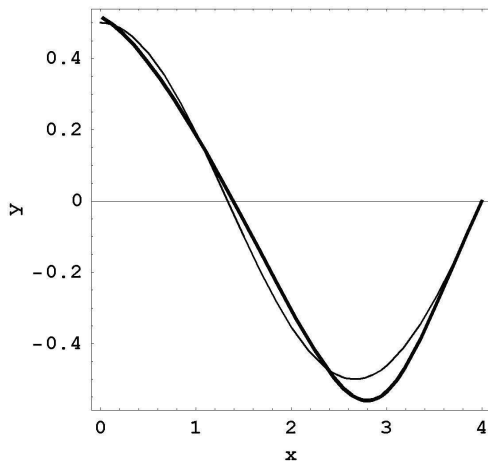
Jeżeli nie otrzymuje się oczekiwanej dokładności rozwiązania, można próbować je poprawić przez zmniejszenie $\Delta\theta_1$.

Jeżeli czworobok korbowo-wahaczowy nie aproksymuje łuku z żądaną dokładnością, dopuszcza się czworobok dwuwahaczowy. Przykładem jest łuk L2, który jest dokładnie aproksymowany przez łuk będący fragmentem krzywej otwartej generowanej przez dwuwahacz (Rys. 5). Odrzucenie czworoboków dwuwahaczowych odbywa się przez dodanie warunków Grashofa do kryteriów przeszukiwania. Podobnie, ogniwo czynne mechanizmu korbowo-wodzikowego

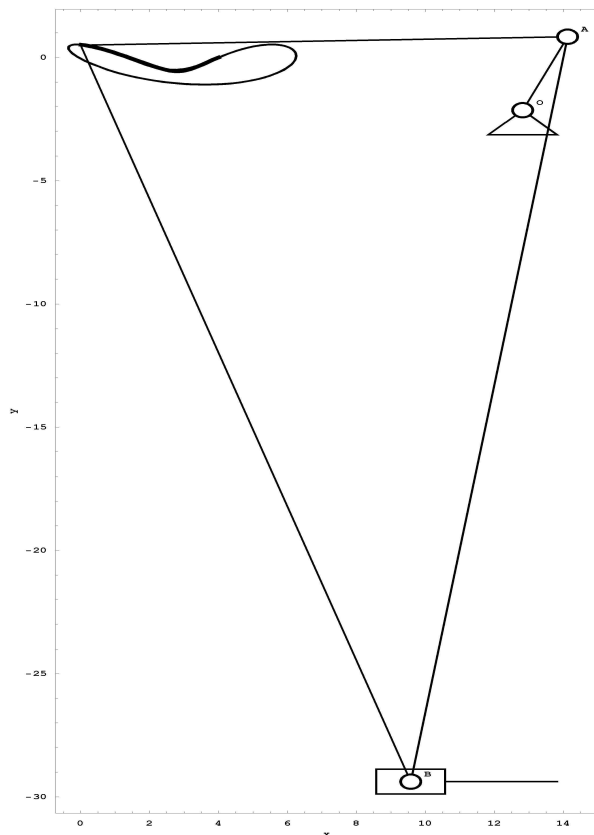
aproksymującego kąt prosty L1 nie wykonuje pełnego obrotu (Rys. 7). Rozwiązaniem zadania L3 jest jednak przedstawiony na Rys. 8 mechanizm, którego korba wykonuje pełny obrót.

Rozwiązania dla łuku L1 uzyskano dyskretyzując go na $m=30$ punktów. Rys. 4 i Rys. 7 przedstawiają mechanizmy, które aproksymują ten łuk. Jednakże liczba punktów na łuku powinna być dobierana ostrożnie. Zwiększanie liczby punktów nie gwarantuje poprawy rozwiązania, a na pewno wydłuża czas obliczeń numerycznych. Rys. 4-8 przedstawiają mechanizmy generujące aproksymacje zadanych łuków oraz porównanie łuków wygenerowanych i zadanych.

Na Rys. 6 zaprezentowano wyniki syntezy generatora łuku L4. Mimo że wygenerowany mechanizm różni się od tego, który kreśli żądany łuk, to łuk ten jest wspólną częścią jego krzywej łącznikowej. Rys. 6a prezentuje czworobok korbowo-wahaczowy generujący, będący fragmentem krzywej łącznikowej czworoboku pokazanego na Rys. 6b, łuk L4. Rozwiązanie dąży do dokładnego rozwiązania, a błędy są wynikiem błędów arytmetyki zmiennoprzecinkowej.



a)



b)

Rys. 8. Porównanie łuków zadanego (linia cienka) L4 i wygenerowanego (linia pogrubiona) (a), znaleziony przez algorytm mechanizm korbowo-wodzikowy aproksymujący łuk L4 (a)

6. WNIOSKI KOŃCOWE

Przedstawione rozwiązania syntezy czworoboku przegubowego i mechanizmu korbowo-wodzikowego jako generatorów krzywych otwartych potwierdzają efektywność zaprezentowanej metody. Zadawalające wyniki uzyskuje się optymalizując sześć parametrów. Celem dalszych badań jest przeniesienie metody na inne czterocłonowe mechanizmy II klasy z węzłami obrotowymi i przesuwными. Wymaga to modyfikacji funkcji celu. Opis zastosowany do mechanizmu korbowo-wodzikowego, aby był możliwie ogólny,

powinien być dostosowany do przypadków z prowadnicą nachyloną pod dowolnym kątem do osi poziomej. Na bazie zaprezentowanej metody syntezy krzywych otwartych można podjąć próby otrzymania rozwiązań analitycznych dla wybranych łuków lub mechanizmów. Należy również spróbować wyeliminować parametryzację opisu, która wprowadza niepożądane więzy w tej metodzie.

LITERATURA

1. Akcali I. D., Dittrich G. (1989), Path generation by subdomain method, *Mechanism and Machine Theory*, 24 (1), 45-52.
2. Buśkiewicz J. (2009), Synthesis Method of Planar Mechanisms Approximating Open Paths, *Proceedings of the 10th IF-ToMM International Symposium on Science of Mechanisms and Machines SYROM'09*, Springer Science+Business Media B.V., XXII, ISBN: 978-90-481-3521-9, 597-609.
3. Dijkman E. A., Smalls A. T. J. M. (1996), λ -formed 4-bar linkages set in a translation-position to design mechanisms approximating a straight line, *Mechanism and Machine Theory*, 31 (8), 1033-104.
4. Dijkman E. A., Smalls A. T. J. M. (2000), How to exchange centric inverted slider cranks with λ -formed four-bar linkages, *Mechanism and Machine Theory*, 35, 305-327.
5. Goldberg D.E. (1994), Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning, Addison-Wesley Publishing, Reading, MA.
6. Gronowicz A., Szrek J. (2008), Idea budowy czworonożnego robota kołowo-krocącego, *Teoria Maszyn i Mechanizmów*, Bielsko-Biała 2008, ISBN 978-83-60714-57-7, 273-282.
7. Hodges P. H., Pisano A. P. (1991), On the synthesis of straight line, constant velocity scanning mechanisms, *Journal of Mechanical Design*, 113 (12), 464-472.
8. Jianyou H., Weixiang Q., Huishe Z. (2009), Study on synthesis method of λ -formed 4-bar linkages approximating a straight line, *Mechanism and Machine Theory*, 44, 57-65.
9. Karelin V. S. (1985), On the synthesis of the inverted slider-crank mechanisms for approximate straight line motion, *Mechanism and Machine Theory*, 21 (1), 13-18.
10. Lio M. D. (1997), Robust synthesis of linkages—synthesis by solving non-linear optimization problem, *Mechanism and Machine Theory*, 32 (8), 921-932.
11. Lio M. D., Cossalter V., Lot R. (2000), On the use of natural coordinates in optimal synthesis of mechanisms, *Mechanism and Machine Theory*, 35 (10), 1367-1389.
12. Sanchez Marin F. T., Gonzalez A. P. (2004), Open-path synthesis of linkages through geometrical adaptation, *Mechanism and Machine Theory*, 39, 943-955.
13. Vidosic J. P., Tesar D. (1967), Selections of four-bar mechanisms having required approximate straight-line outputs, Part I, II, III, *Journal of Mechanisms*, 2, 23-44, 45-59, 61-76.

OPTIMAL SYNTHESIS OF OPEN PATHS GENERATORS

Abstract: The synthesis method of planar mechanisms generating open paths was presented. On the base of taken assumptions mathematical formulas for the synthesis of four-bar linkage and crank-slider mechanism were derived. The method can be adopted to the other planar mechanisms with three moving links. The results of the numerical experiments for chosen curves were presented and discussed.