

MODELOWANIE DYNAMIKI MOBILNEGO ROBOTA KOŁOWEGO RÓWNANIAMI APPELLA

Andrzej BURGHARDT*

*Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki, Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa,
Politechnika Rzeszowska, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów

andrzejb@prz.edu.pl

Streszczenie: W pracy zaprezentowano matematyczny model obiektu nieholonomicznego wygenerowany z wykorzystaniem równań Appella. Jako przykład wybrano mobilny robot kołowy AmigoBot, którego charakterystyczne wielkości fizyczne jak momenty bezwładności, masy itp. wykorzystano podczas modelowania. Dla mobilnego robota kołowego zaprezentowano równania więzów nieholonomicznych, wykorzystując macierze transformacji opisano równaniami parametrycznymi położenia charakterystycznych punktów robota, które w dalszej części wykorzystano do wyznaczenia prędkości i przyspieszeń. W celu zbudowania modelu podano funkcję przyspieszeń oraz wyznaczono siły uogólnione. Ponadto wyeliminowano z modelu nieznanne wartości sił tarcia suchego wykorzystując do tego równania Maggiego zapisane w postaci rzutowej. Otrzymany matematyczny model obiektu wygenerowano z wykorzystaniem oprogramowania MapleV.

1. WPROWADZENIE

Najczęściej spotykanymi formalizmami wykorzystywanymi w modelowaniu układów wielocłonowych są równania Lagrang'a. W pracy zaprezentowano alternatywne podejście generowania dynamicznych równań ruchu wykorzystujące równania Appella. Jako przykład obiektu wybrano mobilny robot kołowy AmigoBot, dla którego zbudowany model matematyczny znajdzie zastosowanie podczas prac jako zadanie proste dynamiki w syntezy układów sterowania oraz jako zadanie odwrotne, wykorzystane podczas budowy emulatora robota.

Równania Appella stanowią wygodny i uniwersalny formalizm generowania równań ruchu zarówno dla układów holonomicznych jak i nieholonomicznych (Gutowski, 1971; Nejmark i Fufajew, 1971). Cechą charakterystyczną równań Appella jest wprowadzenie pojęcia funkcji przyspieszeń, która odgrywa podobną rolę jak w równaniach Lagrange'a energia kinetyczna. W układach nieholonomicznych funkcja Appella podobnie jak w układach holonomicznych energia kinetyczna jest matematycznym odpowiednikiem wewnętrznych właściwości układu określającym w pewnym stopniu charakter jego ruchu (Nejmark i Fufajew, 1971).

Można pokusić się o stwierdzenie, że funkcja Appella ma pewną przewagę w opisie własności dynamicznych ciał z więzami nieholonomicznymi nad energią kinematyczną. Samo wyznaczenie energii kinetycznej nie pozwala na podanie dynamicznych równań ruchu układów nieholonomicznych, co możemy uzyskać wykorzystując funkcję Appella. Niewątpliwą wadą prezentowanych równań jest brak jasnych zasad co do sposobu generowania funkcji przyspieszeń (Blajer, 1998).

Zaprezentowane w pracy podejście do modelowania mobilnego robota kołowego zostało przeprowadzone z wykorzystaniem oprogramowania MapleV.

2. MODELOWANIE

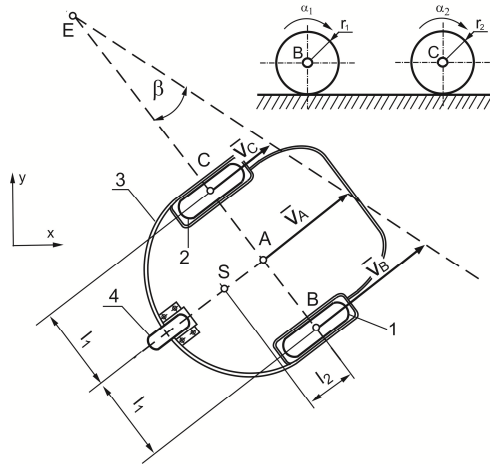
Mobilny robot kołowy, którego parametry fizyczne zostały wykorzystane w procesie modelowania to laboratoryjny robot Amigobot (Rys.1). Podczas modelowania został przyjęty model schematycznie pokazany na Rys. 2. W modelu tym występują; rama 3, dwa koła jezdne napędzające 1 i 2, oraz koło swobodne samonastawne 4.



Rys. 1. Mobilny robot Amigobot

Elementami zespołu napędzającego robot są koła 1 i 2 osadzone na półosiach. Koła napędzane są silnikami elektrycznymi prądu stałego poprzez zespół zintegrowanych z silnikiem przekładni. Koła obracają się wokół własnych osi, które nie zmieniają położenia względem ramy. Punkt S to środek masy ramy, kąt obrotu ramy zdefiniowano jako β natomiast kąty obrotu kół o promieniach $r_1=r_2=r$, zdefiniowano odpowiednio jako a_1 i a_2 . Opis ruchu mobilnego robota kołowego zrealizowano przy założeniach braku poślizgów kół napędzających, ponadto założono, że ruch robota odbywa się po poziomej jezdni.

Opisując kinematykę mobilnych robotów kołowych podajemy równania, z których można określić parametry liniowe i kątowe ruchu interesujących nas punktów czy brył.



Rys. 2. Model mobilnego robota

Rzuty na osie xy wektorów prędkości punktów A, B i C związanych odpowiednio z kołami 1 oraz 2 pozwalają na określenie więzów narzuconych na prędkości, które dla mobilnego robota zapisano jako:

$$\begin{aligned} \dot{x}_A - (r\dot{\alpha}_1 - l_1\dot{\beta}) \cos(\beta) &= 0 \\ \dot{y}_A - (r\dot{\alpha}_2 + l_1\dot{\beta}) \sin(\beta) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Równanie (1) jest klasycznym równaniem więzów nieholonomicznych, które w postaci macierzowej możemy zapisać

$$J(q)\dot{q} = 0 \quad (2)$$

wtedy jacobian będzie określony jako:

$$J(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 \cos(\beta) & -r \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & -l_1 \sin(\beta) & 0 & -r \sin(\beta) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

natomiast $\dot{q} = [\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{\beta}, \dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2]^T$.

Równanie więzów (1) narzuconych na prędkości zróżniczkowano względem czasu i otrzymano więzy ograniczające przyspieszenia w postaci:

$$J(q)\ddot{q} + \gamma^*(q, \dot{q}) = 0, \quad (4)$$

gdzie:

$$\gamma^* = \begin{bmatrix} (\dot{\beta}\dot{\alpha}_1 r - \dot{\beta}^2 l_1) \sin(\beta) \\ (-\dot{\beta}\dot{\alpha}_2 r - \dot{\beta}^2 l_1) \cos(\beta) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Ponadto w globalnym układzie współrzędnych xyz położenie charakterystycznych punktów robota B, C, S zdefiniowano wykorzystując przekształcenia jednorodnie i otrzymano:

$$\begin{cases} x_B = x_A + l_1 \sin \beta \\ y_B = y_A - l_1 \cos \beta \\ x_C = x_A - l_1 \sin \beta \\ y_C = y_A + l_1 \cos \beta \\ x_S = x_A - l_2 \cos \beta \\ y_S = y_A - l_2 \sin \beta \end{cases} \quad (6)$$

Opisywany układ, jest układem o dwóch stopniach swobody. Przyjmując że współrzędnymi niezależnymi są kąty obrotu własnego kół napędzających a_1 i a_2 , to z rozkładu wektorów prędkości punktów A, B i C, dostaniemy następujące zależności na prędkości:

$$\begin{aligned} \dot{x}_A &= \frac{r}{2}(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \cos \beta \\ \dot{y}_A &= \frac{r}{2}(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \sin \beta \\ \dot{\beta} &= \frac{r}{2l_1}(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2) \end{aligned} \quad (7)$$

Otrzymane równania (6) zostaną wykorzystane w dalszej części pracy do określenia przyspieszeń charakterystycznych punktów robota, a równanie (5) podczas budowania równań Maggiego.

2.1. Równania Appella

Jednoznaczne opisanie ruchu przyjętego w pkt. 2.1 modelu wymaga podania współrzędnych punktu A (x_A, y_A), kąta obrotu chwilowego ramy β , oraz kątów obrotu kół napędzających a_1, a_2 .

Do opisu dynamiki ruchu mobilnego robota można stosować różne formalizmy (Żylski, 1996), poniżej przedstawiono zastosowanie równań Appella, które dla układu nieholonomicznego zapisuje się w następującej postaci wektorowej (Nejmark i Fufajew, 1971):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}} \right)^T = \Pi \quad (8)$$

gdzie: $S = S(q, \dot{q}, \ddot{q})$ - funkcja Appella, Π - wektor sił uogólnionych.

Funkcję Appella wyznaczono jako sumę funkcji Appella dla kół napędowych oraz ramy:

$$S = \sum_{i=1}^3 S_i \quad (9)$$

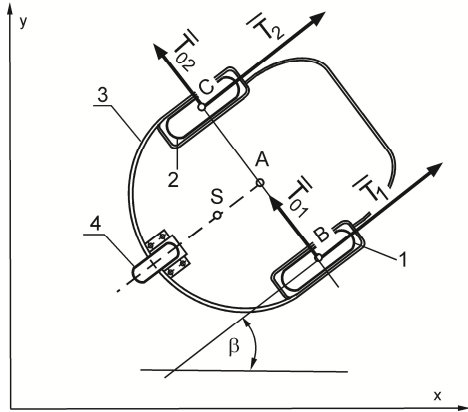
Dla ramy mobilnego robota będącej w ruchu płaskim oraz kół napędowych będących w ruchu złożonym, składającym się z płaskiego ruchu unoszenia oraz ruchu obrotowego wokół osi funkcję Appella zapisano:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} m_1 a_B^2 + \frac{1}{2} I_{z1} \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} I_{x1} \dot{\beta}^2 \\ S_2 &= \frac{1}{2} m_2 a_C^2 + \frac{1}{2} I_{z2} \dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2} I_{x2} \dot{\beta}^2 \\ S_3 &= \frac{1}{2} m_3 a_S^2 + \frac{1}{2} I_{x3} \dot{\beta}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie: $m_1 = m_2, m_3$ - masy zastępcze odpowiednio kół 1 i 2, oraz ramy, $I_{x1} = I_{x2}$ - zastępcze masowe momenty bezwładności kół 1, 2, określone względem osi x_1 i x_2 związanych z tymi kołami, $I_{z1} = I_{z2}$ - zastępcze masowe momenty bezwładności odpowiednich kół określone względem osi obrotu własnego tych kół, I_{z3} - zastępczy masowy moment bez-

władności ramy określony względem osi z_3 związanej z ramą. Założono, że osie układu odniesienia związanego z i-tą częścią są głównymi centralnymi osiami bezwładności.

Przy wyznaczeniu wektora sił uogólnionych należy uwzględnić nieznanne siły tarcia suchego występujące w płaszczyźnie styczności kół napędzających z jezdnią (Żylski, 1996). Na Rys.3 pokazano rozkład sił tarcia działających na koła napędzające mobilny robot.



Rys. 3. Rozkład sił tarcia suchego działających na koła 1 i 2

Wektor sił uogólnionych wyznaczony względem współrzędnych uogólnionych wynosi:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} (T_1 + T_2) \cos \beta - (T_{01} + T_{02}) \sin \beta \\ (T_1 + T_2) \sin \beta + (T_{01} + T_{02}) \cos \beta \\ (T_1 - T_2) l_1 \\ M_1 - N_1 f_1 - T_1 r \\ M_2 - N_2 f_2 - T_2 r \end{bmatrix} \quad (11)$$

gdzie: T_1 i T_2 to obwodowe siły tarcia suchego, natomiast T_{10} i T_{20} to poprzeczne siły tarcia suchego, działające odpowiednio na koła 1 i 2, leżące w płaszczyźnie styczności kół z jezdnią, N_1, N_2 to siły nacisku na odpowiednie koła f_1, f_2 to współczynniki tarcia toczenia odpowiednio kół 1 i 2 natomiast M_1 i M_2 to momenty napędzające koła.

Ostatecznie równania Appella dla mobilnego robota zapisano jako:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_A (2m_1 + m_3) + \ddot{\beta} m_3 l_2 \sin(\beta) + \dot{\beta}^2 m_3 l_2 \cos(\beta) &= \Pi_1 \\ \ddot{y}_A (2m_1 + m_3) + \ddot{\beta} m_3 l_2 \cos(\beta) + \dot{\beta}^2 m_3 l_2 \sin(\beta) &= \Pi_2 \\ \ddot{x}_A m_3 l_2 \sin(\beta) + \ddot{y}_A m_3 l_2 \cos(\beta) + \ddot{\beta} (2m_1 l_1^2 + m_3 l_2^2 + I_{z3} + 2I_{x1}) &= \Pi_3 \\ \ddot{\alpha}_1 I_{z1} &= \Pi_4 \\ \ddot{\alpha}_2 I_{z2} &= \Pi_5 \end{aligned} \quad (12)$$

2.2. Równania Maggiego

Uzyskany podczas modelowania z wykorzystaniem równań Appella matematyczny model mobilnego robota kołowego zawiera nieznanne siły tarcia suchego. W otrzy-

manej postaci równań widoczna jest pewna analogia z równaniami Lagrange'a, w których rzuty sił tarcia suchego na osie xy przyjętego układu odniesienia są mnożnikami Lagrange'a (Żylski, 1996). Pojawia się nam analogiczny problem jak podczas klasycznego modelowania układów nieholonomicznych wspomnianymi już równaniami Lagrange'a, problem rugowania mnożników, który w prezentowanym przypadku sprowadza się do wyeliminowania sił tarcia suchego.

Klasyczne metody eliminacji mnożników to: eliminacja jawna, niejawna, oraz metoda rzutowa (Blajer, 1998).

Alternatywnym podejściem do wymienionych powyżej sposobów jest wykorzystanie równań Maggiego dla których formą wyjściową są równania Lagrange'a z mnożnikami. Podczas generowania opisu matematycznego mobilnego robota wykorzystywano oprogramowanie do operacji symbolicznych Maple V. Oprogramowanie to jest bardzo wygodnym narzędziem do operacji na macierzach i wektorach. Dlatego też przyspieszenia charakterystycznych punktów wyznaczono korzystając z macierzy przekształceń jednorodnych, a jako narzędzie do rugowania mnożników wykorzystano formę rzutową równań Maggiego, obszerniej prezentowaną w pracy (Blajer, 1998).

Wybermy z spośród pięciu prędkości uogólnionych $\dot{\mathbf{q}}$ związanych równaniami więzów (7) dwie niezależne (w naszym obiekcie fizycznie mierzalne) $\dot{\mathbf{q}}_M = [\dot{\alpha}_1 \quad \dot{\alpha}_2]^T$ i równanie (7) zapiszmy jako:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_M$$

gdzie:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos(\beta) & \frac{r}{2} \cos(\beta) \\ \frac{r}{2} \sin(\beta) & \frac{r}{2} \sin(\beta) \\ \frac{r}{2l_1} & -\frac{r}{2l_1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Zapiszmy równanie (12) w postaci

$$\mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_q = \mathbf{\Pi}, \quad (14)$$

oraz rozszerzmy wektor γ^* (wygenerowany w równaniu (5)), do postaci $\gamma = [\gamma_1^*, \gamma_2^*, 0, 0, 0]^T$ wtedy równania ruchu zapisać możemy następująco (Blajer, 1998):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_M + \mathbf{h}_M = \mathbf{Q}_M, \quad (15)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{D}^T \mathbf{M}_q \mathbf{D}, \\ \mathbf{h}_M &= \mathbf{D}^T (\mathbf{M}_q \gamma + \mathbf{h}_q), \\ \mathbf{Q}_M &= \mathbf{D}^T \mathbf{\Pi}. \end{aligned} \quad (16)$$

Otrzymane równanie w postaci (15) zapisano w formie równania dynamiki dobierając macierz współczynników sił odśrodkowych i sił Coriolisa tak aby macierz $\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}$ była macierzą skośnosymetryczną i otrzymano:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_M + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_M + \mathbf{F} = \mathbf{Q}, \quad (17)$$

gdzie: \mathbf{M} – macierz mas uogólnionych,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = m_{22} = (4m_1 + m_3) \left(\frac{r}{2}\right)^2 + I_{z3} + (2I_{x1} + I_{z3} + m_3 l_2^2) \left(\frac{r}{2l_1}\right)^2$$

$$m_{12} = m_{21} = 4m_1 \left(\frac{r}{2}\right)^2 + (2I_{x1} + I_{z3} + m_3 l_2^2) \left(\frac{r}{2l_1}\right)^2$$

\mathbf{C} – macierz współczynników sił odśrodkowych i sił Coriolisa,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} \\ -C_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{12} = C_{21} = \left(\frac{r}{2l_1}\right)^2 m_3 r l_2 (\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2)$$

$$\mathbf{F} - \text{wektor sił tarcia toczenia kół}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} N_1 f_1 \\ N_2 f_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} - \text{wektor sił uogólnionych}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

Zdefiniowane równanie (17) opisujące dynamikę obiektu może zostać wykorzystane do analizy zadania odwrotnego dynamiki podczas syntezy algorytmu sterowania oraz jako zadanie proste dynamiki podczas badań symulacyjnych algorytmów sterowania ruchem mobilnego robota Amigobot.

3. WNIOSKI

Zaprezentowane podejście do modelowania mobilnego robota kołowego zrealizowane z wykorzystaniem równań Appella oraz równań Maggiego pozwoliło na wygenerowanie matematycznego modelu obiektu w formie pozwalającej na jego wykorzystanie w budowie układów sterowania oraz w pracach symulacyjnych.

Równania Appella umożliwiają uzyskanie zapisu własności dynamicznych obiektu w formie analogicznej jak w równaniach Lagrange'a, w których dla układów nieholonomicznych pojawiają się nieznane siły, w naszym przypadku tarcia suchego. Bardzo wygodnym narzędziem pozwalającym na wyrugowanie wspomnianych sił tarcia suchego są równania Maggiego. Ponadto pozwalają one na otrzymanie formy opisu dynamiki, nie we współrzędnych uogólnionych, ale we współrzędnych niezależnych, często w układach technicznych związanych z napędami. Fakt ten implikuje możliwość zastosowania otrzymanych modeli w układach sterowania do kompensacji nieliniowości obiektów.

LITERATURA

1. **Blajer W.** (1998), *Metody dynamiki układów wieloczołowych*, Wydawnictwo Politechnika Radomska, Radom.
2. **Giergiel M. J., Hendzel Z., Żylski W.** (2002), *Modelowanie i sterowanie mobilnych robotów kołowych*, PWN, Warszawa.
3. **Gutowski R.** (1971), *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa.
4. **Nejmark J. I., Fufajew N. A.** (1971), *Dynamika układów nieholonomicznych*, PWN, Warszawa.
5. **Żylski W.** (1996), *Kinematyka i dynamika mobilnych robotów kołowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów.

MODELLING OF DYNAMIC MOBILE ROBOT USING A APPELL EQUATION

Abstract: In this article I present dynamic movement equation of the mobile robot, built by using Appell equation. As an example I chose the mobile robot Amigobot which characterized by physical size like moment of inertia, mass ect. used during modelling. The robot was given kinematic equation of movement which allowed to describe the speed and acceleration of characteristic points. Moreover, I eliminated unknown values a force dry friction from the model by using Maggi equations. In the research we used the program Maple for generating equations.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego nr N N501 068838 finansowanego ze środków na naukę w latach 2010-2012.