

MECHANIZM BENNETTA W GEOMETRII TORUSÓW

Tadeusz BIL*

*Katedra Procesów i Urządzeń Przemysłu Spożywczego, Wydział Mechaniczny,
Politechnika Koszalińska, ul. Raclawicka 15-17,75-620 Koszalin

tadeusz.bil@tu.koszalin.pl

Streszczenie: W pracach wielu autorów mechanizm Bennetta przedstawiony jest jako przykład niespójności wzorów służących do obliczania ruchliwości mechanizmów. Na podstawie klasycznych wzorów na ruchliwość mechanizmów przestrzennych jego ruchliwość jest ujemna (-2). Często mechanizm ten jest przedstawiany jako mechanizm z więzami biernymi o niesprecyzowanym charakterze. Tymczasem mechanizm odkryty przez Bennetta posiada rzeczywistą ruchliwość równą jedności. W niniejszej pracy pokazano, iż jest to mechanizm zbudowany z promieni dwóch pokrywających się torusów, otrzymanych na podstawie różnych parametrów. Wyjaśnia to jego rzeczywistą ruchliwość, gdyż kwalifikuje go do wspólnej grupy razem z mechanizmami płaskimi i sferycznymi.

1. WPROWADZENIE

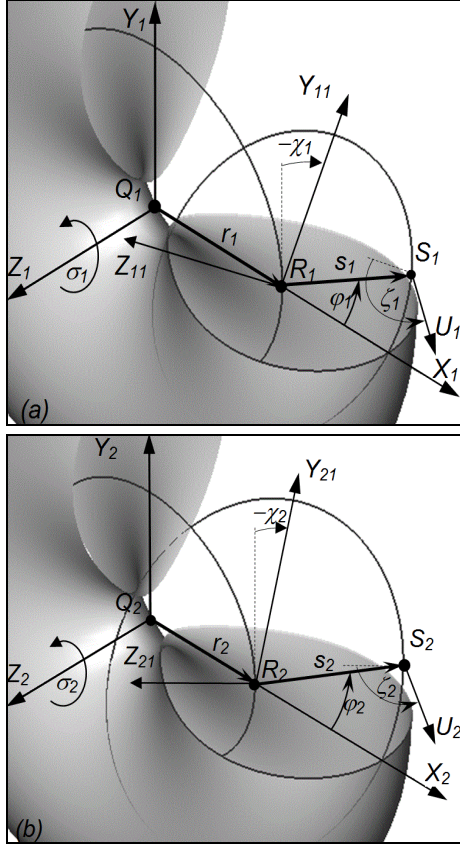
Od 1903 roku znany jest czteroczłonowy mechanizm przestrzenny z parami obrotowymi (Bennett, 1903), szerzej omówiony w pracy (Bennett, 1914). Mechanizm ten posłużył jako wzorzec dla wielu późniejszych rozwiązań (Goldberg, 1940; Waldron, 1966; Baker, 1978). Opisany jest w wielu publikacjach przeglądowych i monografiach (Beggs, 1966; Dimentberg, 1983; Knapczyk i Lebedev, 1990; Morecki i inni 2002). Przedstawiany jest jako przykład niespójności wzorów służących do obliczania ruchliwości mechanizmów (Gogu, 2005). Autor niniejszego artykułu w swojej monografii (Bil, 2007) przedstawił hipotezę, że wszystkie jednokonturowe mechanizmy przestrzenne są szczególnymi przypadkami mechanizmu siedmioczłonowego 7R, który jest równoważny trójczłonowemu mechanizmowi z wyższą parą kinematyczną w postaci dwóch torusów ogólnych. Sposób opisu mechanizmów jednokonturowych w geometrii torusów przedstawiony jest również w pracy (Bil, 2010). Jednym z mechanizmów, który powinna obejmować ta hipoteza, jest mechanizm Bennetta. W niniejszej pracy zostanie przedstawiony dowód, że tak jest w istocie. Praca ta jest więc poświęcona szczególnej sytuacji w mechanizmie z parą wyższą w postaci dwóch torusów, kiedy te torusy się pokrywają. Podstawą tej pracy jest spostrzeżenie, że istnieją dwa takie same torusy otrzymane poprzez obrót dwóch różnie położonych okręgów wokół tej samej osi obrotu. Podobna sytuacja była znana w odniesieniu do torusa, którego przekrój osiowy jest okręgiem. Torus ten posiada również nie osiowy przekrój kołowy, który jest nazywany okręgiem (albo okręgami) Villarceau (Villarceau, 1848). Bezpośrednim impulsem do analizy przedstawionej w niniejszej pracy było spostrzeżenie (Dvornikov, 2009), iż natura mechanizmu Bennetta jest w dalszym ciągu nieznana. W niniejszej pracy przedstawiono warunki, jakie muszą spełniać promienie torusów ogólnych, aby tworzyły taką samą powierzchnię. Warunki ist-

nienia dwóch torusów ogólnych pokrywają się z warunkami istnienia mechanizmu Bennetta. Pod pojęciem torus ogólny, w niniejszej pracy, rozumie się torus powstały poprzez obrót okręgu nie leżącego w płaszczyźnie osi obrotu. Powierzchnia torusa, podobnie jak płaszczyzna i sfera, jest powierzchnią przestrzenną, ale tylko dwuwymiarową. Wyjaśnia to, zdaniem autora, sprzeczność dotyczącą ruchliwości mechanizmu Bennetta. Dotychczas mechanizm ten traktowano jako przestrzenny, stąd wg wzoru na ruchliwość mechanizmu przestrzennego otrzymywano wartość ujemną (-2). Ponieważ jest to jednak mechanizm związany z powierzchnią dwuwymiarową, to należy go traktować tak samo jak mechanizmy płaskie i sferyczne. Powierzchnia torusa ogólnego jest więc uogólnieniem wynikającym z faktu, iż powierzchnia płaska i sfera są jego przypadkami szczególnymi (Bil, 2010).

2. TORUS OGÓLNY

Dwa torusy, tworzące mechanizm z parą wyższą, posiadają kilka położeń szczególnych, które prowadzą do zmiany stopnia ruchliwości mechanizmu w trakcie ruchu. Te szczególne położenia dotyczą również, równoważnych mechanizmów z parą wyższą, mechanizmów dźwigniowych. W pracy (Bil, 2008) podano kilka takich przypadków. Niektóre z nich są trywialne, gdyż dotyczą np. kontaktu w dwóch punktach jednocześnie. Nietrywialnym przypadkiem jest pokrywanie się torusów, który jest przedmiotem rozważań w niniejszej pracy. Szczególnym przypadkiem torusa ogólnego jest powierzchnia powstała przez obrót okręgu nie leżącego w płaszczyźnie osi obrotu, lecz zwichrowanego. Równoważny dwóm pokrywającym się torusom mechanizm dźwigniowy może być przestrzennym mechanizmem czteroczłonowym utworzonym z promieni dwóch takich torusów. Poniżej przedstawiono analizę takiego właśnie przypadku. Dwa takie same torusy można otrzymać dla różnych zestawów parametrów. W obu przy-

padkach płaszczyzna okręgu, poprzez obrót którego powstaje torus, jest obrócona wokół osi QX prostopadłej do osi głównej torusa (Rys. 1a, b).



Rys. 1. Identyczne torusy ogólne utworzone przy pomocy dwóch różnych okręgów: a) na podstawie parametrów $r_1, s_1 (r_1 > s_1), \chi_1$ b) na podstawie $r_2, s_2 (r_2 < s_2), \chi_2$

W przypadkach pokazanych na Rys. 1. współrzędne punktu S_i na okręgach tworzących torus ogólny i wersory U_i , leżące w płaszczyznach prostopadłych do promienia s_i okręgu, możemy zapisać w postaci rzutów, w układzie współrzędnych $Q_i X_i Y_i Z_i$ ($i = 1, 2$), wg notacji zaproponowanej w pracy (Denavit i Hartenberg, 1955) następująco:

$$S_i = \begin{bmatrix} S_{ix} \\ S_{iy} \\ S_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_i c \varphi_i + r_i \\ s_i s \varphi_i c \chi_i \\ s_i s \varphi_i s \chi_i \end{bmatrix}; \quad (1)$$

$$U_i = \begin{bmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \\ U_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \zeta_i s \varphi_i \\ -s \zeta_i c \varphi_i c \chi_i - c \zeta_i s \chi_i \\ -s \zeta_i c \varphi_i s \chi_i + c \zeta_i c \chi_i \end{bmatrix}; \quad (2)$$

gdzie: s_i – promień okręgu ze środkiem w punkcie R_i i osią $U_i Z_{ii}$; r_i – promień okręgu bazowego torusa $Q_i R_i$; $i = 1, 2$ – nr powierzchni.

Po obróceniu wektorów i wersorów opisanych równaniami (1) i (2) wokół osi $Q_i Z_i$ o kąt σ_i otrzymamy równania:

$$S_i^\sigma = \begin{bmatrix} S_{ix}^\sigma \\ S_{iy}^\sigma \\ S_{iz}^\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s_i c \varphi_i + r_i) c \sigma_i - s_i s \varphi_i c \chi_i s \sigma_i \\ (s_i c \varphi_i + r_i) s \sigma_i + s_i s \varphi_i c \chi_i c \sigma_i \\ s_i s \varphi_i s \chi_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$U_i^\sigma = \begin{bmatrix} U_{ix}^\sigma \\ U_{iy}^\sigma \\ U_{iz}^\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \zeta_i s \varphi_i c \sigma_i + (s \zeta_i c \varphi_i c \chi_i + c \zeta_i s \chi_i) s \sigma_i \\ s \zeta_i s \varphi_i s \sigma_i - (s \zeta_i c \varphi_i c \chi_i + c \zeta_i s \chi_i) c \sigma_i \\ -s \zeta_i c \varphi_i s \chi_i + c \zeta_i c \chi_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

Wektor (3) opisuje punkt na powierzchni symetrycznego torusa ogólnego. Równanie (4) przedstawia kierunek wersora U_i znajdującego się w płaszczyźnie prostopadłej do promienia s_i i obróconego o kąt ζ_i wokół tego promienia.

2.1. Warunki identyczności powierzchni dwóch torusów ogólnych symetrycznych

Dwie powierzchnie torusów będą jednakowe, jeżeli ich promienie maksymalne i minimalne będą jednakowe, i szerokość obu brył będzie również jednakowa. Maksymalny promień torusa można obliczyć dla dowolnego jego przekroju osiowego z warunku:

$$\frac{dS_{ix}}{d\varphi_i} = s_i \sin \varphi_i = 0 \quad (5)$$

Równanie (5) ma dwa rozwiązania: $\varphi_i=0$ – punkt S_i znajdujący się w maksymalnej odległości od osi QZ , i $\varphi_i=\pi$ – punkt S_i w odległości minimalnej od tej osi.

Promienie torusów w płaszczyźnie równoległej do QXY :

$$(S_{Ix}^\sigma)^2 + (S_{Iy}^\sigma)^2 = (S_{2x}^\sigma)^2 + (S_{2y}^\sigma)^2 \quad (6)$$

będą jednakowe i maksymalne, jeżeli podstawimy $\varphi_1=0, \varphi_2=0$. Wtedy warunek identyczności otrzymamy w postaci:

$$r_1 + s_1 = r_2 + s_2 \quad (7)$$

Jednakowe minimalne promienie torusów (6) można otrzymać po podstawieniu $\varphi_1=\pi, \varphi_2=\pi$, w postaci:

$$r_1 - s_1 = s_2 - r_2 \quad (8)$$

Bryły będą miały jednakową szerokość wzdłuż osi QZ w punktach, w których

$$\frac{dS_{iz}}{d\varphi_i} = -s_i \cos \varphi_i \sin \chi_i = 0 \quad (9)$$

Współrzędne punktów o największej wartości S_{iz} otrzymamy na podstawie (9) po podstawieniu $\varphi_i=\pi/2$ do współrzędnych S_{iz} (3):

$$s_1 \sin \chi_1 = \pm s_2 \sin \chi_2 \quad (10)$$

Identyczny warunek otrzymamy po podstawieniu $\varphi_i=-\pi/2$ do współrzędnych S_{iz} w równaniu (3). Wynika to z symetrii torusa.

Jednoczesne spełnienie równań (7), (8) i (10) jest możliwe po spełnieniu warunków:

$$\left. \begin{aligned} s_2 &= r_1 \\ r_2 &= s_1 \\ \sin \chi_2 &= \pm s_1 \sin \chi_1 / s_2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Aby otrzymać czterocłonowy mechanizm dźwigniowy należy spełnić jeszcze jeden warunek. W punkcie $S_1=S_2$ musi wystąpić para obrotowa, której wspólna oś musi mieć taki sam kierunek. Warunek ten możemy zapisać następująco:

$$U_1 = U_2, \text{ lub } U_1 = -U_2. \quad (12)$$

Warunek ten musi być spełniony w całym zakresie ruchu. Ponieważ jednak do wyznaczenia są tylko dwa kąty ζ_1 i ζ_2 , to wystarczającym jest spełnienie tych warunków w dwóch położeniach układu. Równania (12) można rozwiązać dla $\varphi_1=\varphi_2=0$ i dla $\varphi_1=\varphi_2=\pi$. W obu tych przypadkach zachodzi: $\sigma_1=\sigma_2=0$ a przy tym składowa $U_{1x}=U_{2x}=0$ (wersory U_i są prostopadłe do osi Q_iX_i). Do rozwiązania pozostaje więc układ równań, otrzymany poprzez porównanie tylko składowych $U_{1z}=U_{2z}$ dla dwóch położeń:

$$\left. \begin{aligned} c\zeta_1 c\chi_1 - s\zeta_1 s\chi_1 &= c\zeta_2 c\chi_2 - s\zeta_2 s\chi_2 \\ c\zeta_1 c\chi_1 + s\zeta_1 s\chi_1 &= c\zeta_2 c\chi_2 + s\zeta_2 s\chi_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Pierwsze równanie tego układu otrzymano po podstawieniu $\varphi_1=\varphi_2=0$ do układu równań (12), a drugie – po podstawieniu $\varphi_1=\varphi_2=\pi$ do tego samego układu. Spośród czterech możliwych rozwiązań, warunek (13) spełniają dwa takie same rozwiązania: $\zeta_1=\chi_2$ i $\zeta_2=\chi_1$, otrzymane zarówno na podstawie $U_{1z}=U_{2z}$ jak i $U_{1z}=-U_{2z}$.

Jeżeli połączymy promienie torusów parami obrotowymi w punktach $Q_1=Q_2$, R_1 , $S_1=S_2$ i R_2 , to na podstawie układu równań (11) otrzymamy czterocłonowy mechanizm przestrzenny. Nietrudno zauważyć, iż jest to mechanizm Bennetta (Beggs 1966, Baker 1978). Istnieją cztery znane rozwiązania tego mechanizmu ze względu na kąty χ_1 i χ_2 :

- $\chi_1 > 0$ i $\chi_2 > 0$ lub rozwiązanie symetryczne $\chi_1 < 0$ i $\chi_2 < 0$;
- $\chi_1 > 0$ i $\chi_2 < 0$ lub rozwiązanie symetryczne $\chi_1 < 0$ i $\chi_2 > 0$;

Wynikają one z rozwiązania równania (11) i są parami równoważne. Funkcja położenia rozwiązań symetrycznych jest taka sama. Rozwiązania układu (13) są również takie same dla obu wariantów mechanizmu otrzymanych zarówno na podstawie warunku $\chi_1\chi_2 > 0$ jak i $\chi_1\chi_2 < 0$.

Mechanizm Bennetta jest zatem przestrzennym mechanizmem czterocłonowym, zawierającym tylko pary obrotowe, składającym się z dwóch diod r_1, s_1 ($r_1 > s_1$) i r_2, s_2 ($r_2 < s_2$), pod warunkiem, iż jeden wspólny punkt Q będzie środkiem torusa, a drugi wspólny punkt S będzie się znajdował na wspólnej powierzchni tego symetrycznego torusa ogólnego. Jest więc mechanizmem związanym z przestrzenią, ale dwuwymiarową powierzchnią torusa ogólnego, a jego ruchliwość, podobnie jak mechanizmów płaskich i sferycznych, można obliczyć ze wzoru $w=3n-2p_5$ (gdzie: n – liczba ruchomych członów).

3. FUNKCJA POŁOŻENIA MECHANIZMU

Funkcję położenia mechanizmu wyznaczmy z warunku pokrywania się punktów S_1 i S_2 na powierzchniach torusów ogólnych. Do wyznaczenia są kąty φ_i i σ_i ($i=1,2$) obu powierzchni. Jedno z ogniw jest nieruchome, można więc przyjąć np. $\sigma_1=0$, a wyznaczać zależności $\varphi_2=f(\varphi_1)$ i $\varphi_2=f(\sigma_2)$.

Porównując współrzędne S_{iz}^σ obu powierzchni (3) z uwzględnieniem wzoru (10) otrzymamy:

$$\varphi_2 = \pm \varphi_1 \quad (14)$$

Na podstawie porównania składowych S_{ix}^σ i S_{iy}^σ :

$$\left. \begin{aligned} (s_1 \cos \varphi_1 + r_1) &= (s_2 \cos \varphi_2 + r_2) \cos \sigma_2 - s_2 \sin \varphi_2 \cos \chi_2 \sin \sigma_2 \\ s_1 \sin \varphi_1 \cos \chi_1 &= (s_2 \cos \varphi_2 + r_2) \sin \sigma_2 + s_2 \sin \varphi_2 \cos \chi_2 \cos \sigma_2 \end{aligned} \right\}$$

po podstawieniu $\varphi_2 = \varphi_1$, otrzymamy równanie:

$$\varphi_1 = \arccos \frac{a-b}{c+d}, \quad (15)$$

a po przyjęciu, że $\varphi_2 = -\varphi_1$, równanie:

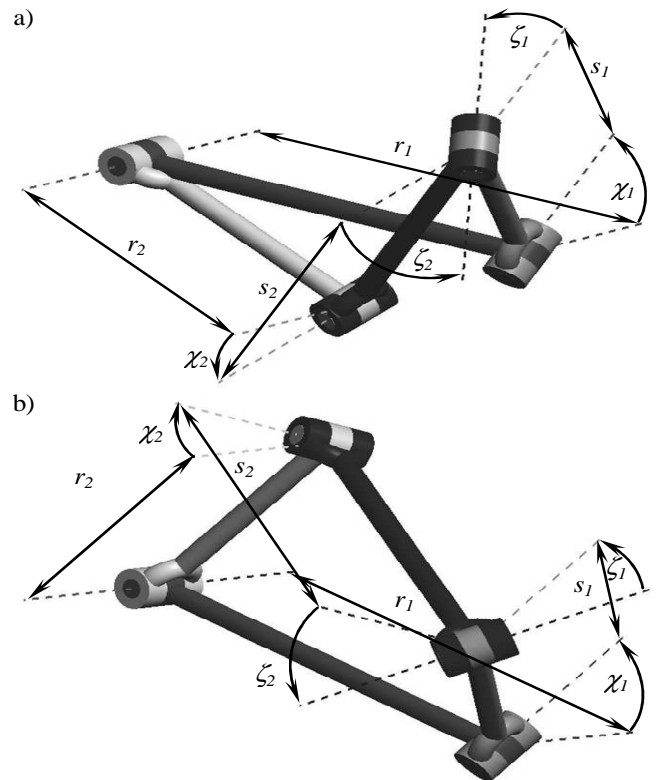
$$\varphi_1 = \arccos \frac{a+b}{c-d}. \quad (16)$$

W równaniach (15) i (16) współczynniki a, b, c, d są wyrażone w postaci zależności:

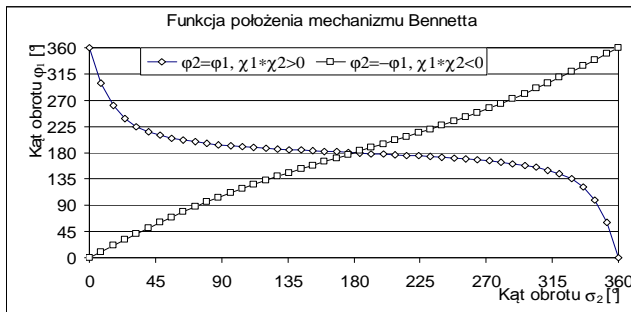
$$\left. \begin{aligned} a &= s_1 r_2 \cos \chi_1 \cos \sigma_2 - r_1 s_1 \cos \chi_1 \\ b &= r_2 s_2 \cos \chi_2 - r_1 s_2 \cos \chi_2 \cos \sigma_2 \\ c &= s_1^2 \cos \chi_1 - s_1 s_2 \cos \sigma_2 (\cos \chi_1 + \cos \chi_2) \\ d &= s_2^2 \cos \chi_2 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Równanie (15) może zostać rozwiązane przy spełnieniu nierówności $\chi_1\chi_2 > 0$, a równanie (16) przy spełnieniu nierówności $\chi_1\chi_2 < 0$.

4. PRZYKŁAD ANALIZY MECHANIZMU



Rys. 2. Dwa warianty schematów mechanizmu Bennetta: a) $\chi_1\chi_2 > 0$, b) $\chi_1\chi_2 < 0$



Rys. 3. Funkcje położenia dwóch wariantów mechanizmu Bennetta

Jako przykład analizowanego układu przedstawiony jest mechanizm obliczony na podstawie przyjętych trzech parametrów: $r_1=6$, $s_1=5$, $\chi_1=45^\circ$. Na podstawie równań (11) obliczone zostały wymiary $r_2=5$, $s_2=6$, $\chi_2=36,10^\circ$. Położenie wspólnej osi obrotu w punkcie $S_1=S_2$ w stosunku do położenia osi obrotu w punktach R_1 i R_2 określają, obliczone na podstawie (13), kąty $\zeta_1=36,10^\circ$ i $\zeta_2=45^\circ$. Schemat mechanizmu o podanych proporcjach wymiarowych jest przedstawiony na Rys. 2a, b, a funkcje położenia obu wariantów mechanizmu, obliczone na podstawie wzorów (15) i (16), są przedstawione na Rys. 3.

LITERATURA

1. Baker J. E. (1979), The Bennett, Goldberg and Myard linkages – in perspective, *Mech. & Mach. Theory* 14 (4), 239-253.
2. Beggs J. S. (1966), *Advanced mechanism*, The Macmillan Co, New York
3. Bennett G. T. (1903), A new mechanism, *Engineering*, London, Vol. 76, 777-778.
4. Bennett G. T. (1914), The skew isogram mechanism, *Proceedings of the London mathematical society*. Second series, Vol. 13, 151-173.
5. Bil T. (2007), *Uniwersalny model przestrzennych mechanizmów jednokonturowych*, Monografia WM nr 132, Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej.

6. Bil T. (2008), Analiz odnokonturowych mechanizmów na osnovanii obščej modeli, *Teorija mehanizmov i mašin*, Nr 1, tom 6, 55-63, <http://tmm.spbstu.ru/11/bil.pdf>
7. Bil T. (2010), Geometry of a mechanism with a higher pair in the form of two elliptical tori, *Mechanism and Machine Theory* 45 (2010), 185-192.
8. Denavit J., Hartenberg R. S. (1955), A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices, *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics* 22, 215-221.
9. Dimentberg F. M., Sarkisjan J. L., Uskov M. K. (1983), *Prostranstvennyje mehanizmy*, Moskva, Nauka
10. Dvornikov L.T. (2009), Netradicijonnyje rassuždienija o suščestvovanii mehanizma Bennetta, *Teorija Mehanizmov i Mašin*. Nr 1. Tom 7. 5-10, <http://tmm.spbstu.ru/13/>
11. Gogu G. (2005), Mobility of mechanisms: a critical review, *Mechanism and Machine Theory*, 40 (2005) pp. 1068-1097
12. Goldberg M. (1943), New five-bar and six-bar linkages in three dimensions, *ASME J. Mechanisms* 65, 649-661.
13. Knapczyk J., Lebiedev P. A. (1990), *Teoria mehanizmów przestrzennych i manipulatorów*, WNT Warszawa.
14. Morecki A., Knapczyk J., Kędziór K. (2002), *Teoria mehanizmów i manipulatorów*, WNT, Warszawa.
15. Villarceau Y. (1848), Théorème sur le tore, *Nouvelles annales de mathématiques V^e série*, tome 7 (1848), 345-347. <http://www.numdam.org>
16. Waldron K.J (1966), The constraint analysis of mechanisms *Journal of Mechanisms*, Vol 1, Issue 2, 1966, 101-114.

BENNETT MECHANISM IN THE GEOMETRY OF TORI

Abstract: Works of many authors present Bennett Mechanism as an example of inconsistency of models for calculating degrees of freedom. Based on the classic equations, spatial mechanism's degree of freedom is negative (-2). Frequently, such a mechanism is presented as one with overconstraints of unspecified nature. However, the actual degree of freedom of a mechanism discovered by Bennett equals unity. This paper shows the mechanism is constructed with radii of two overlapping tori obtained with use of different parameters. This explains the actual degree of freedom of the mechanism by qualifying it to the common group together with plane and spherical mechanisms.