

TYPIZACJA PRZEKŁADNI PLANETARNYCH O UPROSZCZONEJ TECHNOLOGII

Jan RYŚ*

*Instytut Konstrukcji Maszyn, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska, Al. Jana Pawła II nr.37, 31-864 Kraków

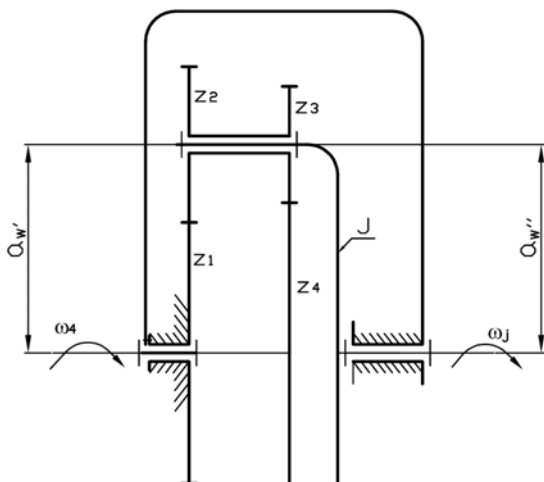
szymon@mech.pk.edu.pl

Streszczenie: Celem pracy jest prezentacja procesu projektowania ciągu typowymiarów przekładni planetarnej z zazębieniem zewnętrznym. Umożliwia to zastosowanie typowych maszyn do frezowania uzębień, koła następnie mogą być nawęglane i szlifowane, (co jest niemożliwe dla uzębienia wewnętrznego), celem uzyskania wysokiej obciążalności. Następnie w tej samej obudowie przekładni można zastosować różne zestawy typizowanych kół otrzymując różne przełożenia. W pracy przedstawiono dwie koncepcje: o identycznej geometrii satelitów, a koła centralne różnią się ilością zębów (koncepcja 1) oraz o identycznej geometrii kół centralnych, a satelity mają różną ilość zębów (koncepcja 2). Zaprezentowano procedurę obliczeń wymiarów geometrycznych zestawu kół dla typoszeregu bazowego, obliczone wraz z wymaganą korekcją obróbki wykańczającej, dla przekładni wg koncepcji 2.

1. KONCEPCJE KONSTRUKCJI PRZEKŁADNI

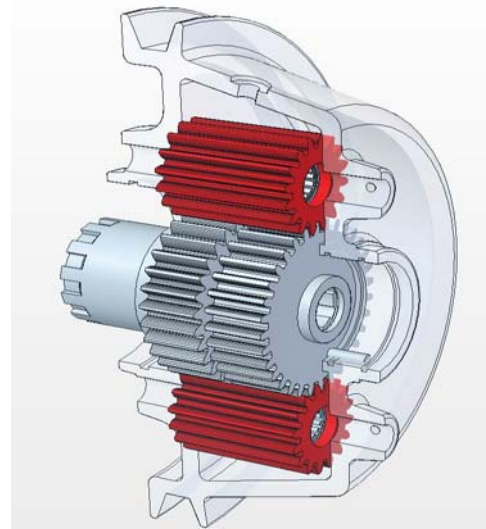
Konstrukcja tego typu przekładni redukcyjnej bazuje na schemacie kinematycznym wg rysunku 1, gdy napęd przekazywany jest z jarzma, mogącego stanowić równocześnie obudowę przekładni. Możliwe jest zrealizowanie redukcyjnej przekładni o uproszczonej technologii, poprzez obróbkę w trzech pakietach kół, na bazie dwóch różnych koncepcji opracowanych przez Kasperka i Rysia (2006, 2008):

1. Koła $z_2=z_3$ o identycznej geometrii, wspólny satelita jest jednym kołem na osi jarzma, a koła $z_4=z_1+zz$, gdzie $zz=1$ lub $zz=2$ lub $zz=3$. Rozwiązanie konstrukcyjne ilustruje rysunek 2.
2. Koła $z_1=z_4$ o identycznej geometrii, a satelity z_2 i z_3 połączone na wspólnej osi jarzma, a koła $z_2=z_3+zz$, gdzie $zz=1$ lub $zz=2$ lub $zz=3$. Rozwiązanie konstrukcyjne ilustruje rysunek 3.



Rys. 1. Schemat kinematyczny przekładni

Dla obu koncepcji jest konieczne spełnienie warunku o współosiowości satelitów $a_w'=a_w''=a$, co przy zastosowaniu kół nie korygowanych jest niemożliwe ze względu na różną sumę zębów z_1+z_2 i z_3+z_4 .



Rys. 2. Projekt przekładni planetarnej o uproszczonej technologii i identycznej geometrii satelitów

1.1. Przełożenie i warunki geometryczne montażu przekładni o identycznej geometrii satelitów

Obliczenia typizacji geometrii przekładni przedstawione dla przypadku identycznej geometrii satelitów przedstawiono w pracy Rysia (2008) – koncepcja nr 1, która pozwala na realizację przełożeń w szerokim zakresie. Prawidłowy montaż, gdy $z_2=z_3$ możliwy jest dzięki spełnieniu zależności:

$$(z_4 + z_1) / s \in N \quad (1)$$

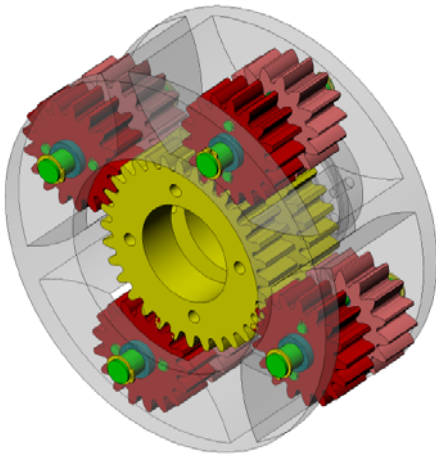
gdzie s – liczba satelitów, a N – liczba naturalna. Ponieważ o przełożeniu decyduje różnica liczby zębów $z_4 - z_1$, stąd konieczność, aby dla dwóch satelitów różnica $z_4 - z_1 = 2$ i liczba zębów z_4 parzysta, a dla trzech satelitów $z_4 - z_1 = 3$ i liczba zębów z_4 podzielna przez 3. W konsekwencji przełożenie przekładni (rysunek 1) wówczas będzie redukcyjne o wartości:

$$i = \frac{\omega_4}{\omega_j} = 1 - \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4} = \frac{z_4 - z_1}{z_4} = \frac{zz}{z_4} \quad (2)$$

Można zauważyć, że zamiana kół z_1 i z_4 zmienia kierunek obrotów na przeciwny w stosunku do kierunku obrotów na wejściu przekładni, a przełożenie nieznacznie się zmieni zgodnie z (2). W praca Rysia (2008) oraz Rysia i Kasperka (2008) przedstawiono ideę tego typu rozwiązania konstrukcyjnego, a także metodykę obliczeń typizacji geometrii kół zębatych w szerokim zakresie przełożeń. Dla dwóch i trzech satelitów. Wykazano, że większa liczba satelitów niż 3 jest niemożliwa przy prawidłowej geometrii zazębienia.

1.2. Przełożenie i warunki geometryczne montażu przekładni o identycznej geometrii kół centralnych

Obliczenia geometrii przekładni przedstawione dla przypadku identycznej geometrii kół centralnych przedstawiono w pracy Kasperka i Rysia (2006) – koncepcja nr 2.



Rys.3. Układ zazębienia kół w przekładni planetarnej o identycznej geometrii kół centralnych

Prawidłowy montaż pod warunkiem, że $z_1 = z_4$ możliwy jest dzięki spełnieniu zależności na symetryczne rozmieszczenie satelitów wg (1) oraz warunek sąsiedztwa.

$$(z_2 + z_1) \sin \frac{\pi}{s} - z_2 > 2y + 1 \quad (3)$$

y – współczynnik wysokości zębów, dla zębów normalnej wysokości $y=1$.

Warunkiem jest połączenie par kół satelitów w wybranej osi (np. w osi symetrii wybranych dwóch zębów kół pary kół).

Koła z_1 i z_4 mają identyczną geometrię, tzn. identyczną ilość zębów $z_1 = z_4$ i identyczną korekcję $x_1 = x_4$, co skutkuje identycznymi wymiarami uzębienia tych kół. W konsekwencji koła te można obrabiać w pakiecie. Koła będące satelitami o ilości zębów z_2 i z_3 wykonuje się oddzielnie w dwóch pakietach, a następnie łączy na osi jarzma. Można wykazać, że przełożenie przekładni zgodnie z rysunkiem 1 wyniesie:

$$i = \frac{\omega_4}{\omega_j} = 1 - \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4} = \frac{z_2 - z_3}{z_2} = \frac{zz}{z_2} \quad (4)$$

Przykładowo dla danych $z_1 = z_4 = 32$, $z_2 = 17$, $z_3 = 16$ $zz=1$, otrzymamy przełożenie redukcyjne $i=1/17$.

Warunki (1) i (3) można łatwo spełnić, jednak podstawowym jest warunek współosiowości, co oznacza, że koła z_1 i z_4 będą miały takie same koła podziałowe $r_1 = r_4 = z_1 \cdot m = z_4 \cdot m$ lecz różne koła toczne ze względu na współpracę z satelitami z_2 i z_3 wykonanymi z taka korekcją, która zagwarantuje równą odległość osi dla par współpracujących kół w przekładni.

2. TYPIZACJA PRZEKŁADNI PLANETARNEJ

Typizacja dotyczyć będzie koncepcji konstrukcyjnej przekładni nr 1, której głównym elementem jest zamknięta jarzmem przestrzeń mieszcząca koła zębate, jak przykładowo pokazuje rysunek 3. Napęd na jarzmo może być realizowany także współosiowo przez sprzęgło podatne, zamiast lub obok sprzęgła przeciążeniowego może być kołnierz mocujący do konstrukcji nośnej, a końcówka wału wyjściowego może być zakończona wielowypustem.

Celem typizacji jest określenie geometrii kół dla różnych przełożeń „ i ” przy identycznych wymiarach pozostałych elementów konstrukcyjnych limitowanych wymiarem jarzma, a praktycznie dla ustalonej odległości osi obrotu kół „ a ”. Przyjmijmy tzn. typoszereg bazowy o przełożeniach od 1/17 do 1/40 stopniowanych ilorazem różnicowym $R10 = \sqrt[10]{10} = 1.259$.

W oparciu o typoszereg bazowy można budować typoszeregi pochodne zmniejszając moduł o połowę lub zwiększając dwukrotnie. Typoszereg bazowy dla czterech satelitów $s=4$ (Rys.3) zbudowano przyjmując $zz=1$, na modułach $\{m\} = \{4.5; 4; 3.5; 3, 2.5\}$, a dane zawarto w tabeli 1.

Dla każdego przypadku o przełożeniach $i=1/17; 1/21; 1/25; 1/34; 1/40$ wykonano obliczenia współczynników korekcji i geometrii zębów kół wg. przykładu zamieszczonego poniżej:

2.1. Przykład obliczeń dla $i=1/21$

Procedura obliczeń bazuje na formułach zaprezentowanych w pracach Kasperka i Rysia (2006). Bazą są trzy kolejne algorytmy pozwalające, po sprawdzeniu warunków symetrii i sąsiedztwa i przyjęciu odległości bazowej osi kół. W przedstawionych obliczeniach przyjęto $a=135\text{mm}$, ale można przyjąć inną ze względu na zastosowanie i przewidywalną obciążalność. Pierwszy etap to przyjęcie $z_2 = zz/i$

oraz $z_3 = z_2 - z_z$, oraz ze względu na korekcje, także układ wałów i łożysk takie wybranie aby $z_1 = z_4 > z_2$ i następnie sprawdzenie zerowych odległości osi było bliskie odległości bazowej $a = 135$ mm, kierując się zależnością

$$z_2 + 2z_1 + z_3 \cong \frac{4a}{m} \quad (5)$$

Wykazano, że w pierwszym przybliżeniu optymalna odległość osi kół jest wg Rysia i Kasperka (2008)

$$a_{opt} \approx \frac{a'_o + a''_o}{2} \quad (6)$$

gdzie a'_o i a''_o są odległościami zerowymi, optymalną odległość osi kół wyznacza się z warunku, że

$$\left[\frac{c1 + c2}{2} \right]_{\min} \quad (7)$$

gdzie $c1$ i $c2$ są sumarycznymi współczynnikami korekcyjnymi wg wzoru Fólmera (wzory na $c1$ i $c2$ podano w przykładzie. Optymalizację należy wykonać dla każdego zestawu kół, dla przykładu danych ilości zębów w tabeli 4 kolumna 2 obliczenia zamieszczonego w tabeli 1. Warunek (7) minimalizuje skutki korekcji, szczególnie istotny dla $z_z = 2, z_z = 3$.

Tab.1. Przykład optymalizacji odległości osi kół $a_{opt} = A$

$a := \frac{(a0' + a0'')}{2}$
$a = 137$
$\alpha w'(a) := \arccos\left(\frac{a0' \cdot \cos(\alpha)}{a}\right)$
$\alpha w''(a) := \arccos\left(\frac{a0'' \cdot \cos(\alpha)}{a}\right)$
$c1(a) := \frac{(z1 + z2) \cdot [\tan(\alpha w'(a)) - \alpha w'(a)] - \tan(\alpha) + \alpha}{2 \cdot \tan(\alpha)}$
$c2(a) := \frac{(z3 + z4) \cdot [\tan(\alpha w''(a)) - \alpha w''(a)] - \tan(\alpha) + \alpha}{2 \cdot \tan(\alpha)}$
$f(a) := \left \frac{c1(a) + c2(a)}{2} \right $
Given
$a > 133$
$a < 137$
$A := \text{Minimize}(f, a)$
$A = 136.972359$
$f(A) = 3.163478 \times 10^{-10}$

A jest optymalną odległością osi kół, jest to zawsze minimalnie różna niż odległość wg wzoru (6). W tabeli 4 odległość osi dla typoszeregów oznaczono „a”, wartość optymalna oznaczona została przez „a_{opt}”. Przy realizacji typoszeregów uzyskanie w każdym przypadku rozwiązania optymalnego jest niemożliwe, natomiast przedstawione rozwiązania winny być bliskie optimum.

Tab.2. Procedura obliczeń współczynników korekcji

$m := 4.0$	$y := 1$	$\alpha 1 := 20$	$a = 135$
$\alpha := \alpha 1 \cdot \frac{\pi}{180}$	$\cos(\alpha) = 0.939693$		
$\alpha = 0.349066$			
$z1 := 48$	$z2 := 21$		
$a0' := m \cdot \frac{(z1 + z2)}{2}$	$a0' = 138$		
$z3 := 20$	$z4 := 48$		
$a0'' := m \cdot \frac{(z3 + z4)}{2}$	$a0'' = 136$		
$mw' := 2 \cdot \frac{a}{z1 + z2}$	$mw' = 3.913043$		
$mw'' := 2 \cdot \frac{a}{z3 + z4}$	$mw'' = 3.970588$		
$\alpha w' := \arccos\left(\frac{a0' \cdot \cos(\alpha)}{a}\right)$	$\alpha w' = 0.281734$		
$\alpha ws' := \alpha w' \cdot \frac{180}{\pi}$			
$\alpha w'' := \arccos\left(\frac{a0'' \cdot \cos(\alpha)}{a}\right)$	$\alpha w'' = 0.328109$		
$\alpha ws'' := \alpha w'' \cdot \frac{180}{\pi}$	$\alpha ws'' = 16.142193$		
$c1 := \frac{(z1 + z2) \cdot [\tan(\alpha w') - \alpha w'] - \tan(\alpha) + \alpha}{2 \cdot \tan(\alpha)}$			
$\alpha ws' = 18.799281$			
$c2 := \frac{(z3 + z4) \cdot [\tan(\alpha w'') - \alpha w''] - \tan(\alpha) + \alpha}{2 \cdot \tan(\alpha)}$			
$c1 = -0.683014$			
$x2_{\max} := \frac{19}{289} + 10 \cdot \frac{z2}{289}$	$x2_{\max} = 0.792388$		
$c2 = -0.242874$			
$x2_{\min} := \left(1 - \frac{z2}{17}\right)$	$x2_{\min} = -0.235294$		
$x3_{\max} := \frac{19}{289} + 10 \cdot \frac{z2}{289}$	$x3_{\max} = 0.792388$		
$\frac{c1 + c2}{2} = -0.462944$			
$x2 = -0.23$			
$x3_{\min} := \left(1 - \frac{z3}{17}\right)$	$x3_{\min} = -0.176471$		
$x1 := c1 - x2$	$x1 = -0.453014$		
$x4 := x1$	$x4 = -0.453014$		
$x3 := c2 - x4$	$x3 = 0.21014$		

Drugi etap obliczeń pozwala na określenie współczynników korekcji $x_1 = x_4, x_2, x_3$. Procedurę obliczeń dla omawianego przykładu zawarto w tabeli 2. wprowadzając oznaczenia: m - moduł, y - współczynnik wysokości zębów, $\alpha 1 = 20^\circ$ - kąt zarysu narzędzia (zębówki odniesienia), mw' , mw'' - moduły na kołach tocznych odpowiednio dla par kół $z1/z2$ oraz $z3/z4$, $\alpha ws'$, $\alpha ws''$ - kąty przyporu współ-

pracujących par kół (w stopniach), x_{2max} - ograniczenie ze względu na grubość zębów u wierzchołka (minimum $\pi/10 \cdot m$), x_{2min} - ograniczenie ze względu na uniknięcie podcięcia zębów u podstawy.

Wyliczone współczynniki korekcji są podstawą ustalenia odległości pomiędzy linią podziałową koła obrabianego, a linią podziałową narzędzi w wykańczającej obróbce obwodniowej.

Trzecim etapem obliczeń jest procedura wyznaczenia podstawowych wymiarów geometrycznych kół przekładni, które są niezbędne do wykonania dokumentacji konstrukcyjnej oraz sprawdzenia geometrycznej dokładności kół po wykonaniu, celem kompletowania i sprawdzenia zamiennych zespołów kół typoszeregu montowanych w jednym korpusie przekładni oraz jednym jarmie. Procedurę obliczenia podstawowych parametrów zazębienia z_3/z_4 oraz wymiarów prezentuje tabeli 3

Tab.3. Procedura obliczeń wymiarów geometrycznych pary kół

$$\begin{aligned}
 p &:= \pi \cdot m \quad p = 12.566371 & p_b &:= p \cdot \cos(\alpha) \\
 p_b &= 11.808526 & p_w &:= \pi \cdot m \cdot w'' \quad p_w = 12.473971 \\
 s_4 &:= \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_4 \cdot \tan(\alpha) \right) \cdot m \\
 s_3 &:= \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_3 \cdot \tan(\alpha) \right) \cdot m \\
 d_4 &:= z_4 \cdot m \quad d_4 = 192 & d_3 &:= z_3 \cdot m \quad d_3 = 80 \\
 s_3 &= 6.895063 & s_4 &= 4.964116 \\
 a_0'' &:= \frac{(d_4 + d_3)}{2} & a_w'' &:= \frac{(z_4 + z_3)}{2} \cdot m \cdot w'' \\
 df_4 &:= d_4 - 2 \cdot (1 - x_4) \cdot m - 2 \cdot c & df_4 &= 178.375887 \\
 a_w'' &= 135 \\
 df_3 &:= d_3 - 2 \cdot (1 - x_3) \cdot m - 2 \cdot c & df_3 &= 71.68112 \\
 km &:= (x_4 + x_3) \cdot m - (a_w'' - a_0'') & km &= 0.028503 \\
 rw_3'' &:= 0.5 \cdot z_3 \cdot m \cdot w'' & rw_4'' &:= 0.5 \cdot z_4 \cdot m \cdot w'' \\
 h &:= 2 \cdot y \cdot m + c - km & h &= 8.971497 \\
 rw_3'' &= 39.705882 & rw_4'' &= 95.294118 \\
 da_4 &:= df_4 + 2 \cdot h & da_4 &= 196.31888 \\
 da_3 &:= df_3 + 2 \cdot h & da_3 &= 90.102994 \\
 db_4 &:= d_4 \cdot \cos(\alpha) & db_4 &= 180.420983 \\
 db_3 &:= d_3 \cdot \cos(\alpha) & db_3 &= 75.17541 \\
 \alpha_w'' &:= \arccos \left(a_0'' \cdot \frac{\cos(\alpha)}{a_w''} \right) & \alpha_w'' &= 0.328109 \\
 da_4 + da_3 &= 286.421874 \\
 \alpha_{ws}'' &:= \frac{\alpha_w''}{\pi} \cdot 180 & \alpha_{ws}'' &= 18.799281 \\
 \varepsilon &:= \frac{\left(\sqrt{da_4^2 - db_4^2} + \sqrt{da_3^2 - db_3^2} \right) \cdot 0.5 - a_w'' \cdot \sin(\alpha_w'')}{p_b} \\
 \varepsilon &= 1.695956
 \end{aligned}$$

W tabeli 3. wprowadzając oznaczenia: p – podziałka na kołach podziałowych, d_3 , d_4 – średnice podziałowe kół, s_3 , s_4 – grubości zębów na kołach podziałowych, p_w - podziałka na kołach tocznych, p_b – podziałka na kołach zasadni-

czych, $a_w''=a$ – odległość osi, h – wysokość zębów, rw_3'' , rw_4'' – promienie kół tocznych, df_3 , df_4 – średnice kół stóp, da_3 , da_4 – średnice kół wierzchołków, db_3 , db_4 – średnice kół zasadniczych, α_w'' - kąt przyporu (rad), ε – liczba przyporu.

Tab. 4. Główne parametry typoszeregu bazowego $zz=z_3-z_2=1, s=4$

Lp	1	2	3	4	5
Oznaczenie	Tb1	Tb2	Tb3	Tb4	Tb5
i	1/17	1/21	1/25	1/34	1/41
a[mm]	135				
a_{opt} [mm]	136.089	136.972	133.853	134.234	135.614
m	4.5	4	3.5	3.0	2.5
z_2/z_3	17/16	21/20	25/24	34/33	41/40
$z_1=z_4$	44	48	52	56	68
x_2	0.000	-0.230	-0.250	-0.260	-0.240
x_3	0.467	0.210	0.280	0.2604	0.242
$x_1=x_4$	-0.467	-0.453	0.329	0.2604	-0.242
ε_{12}	1.727	1.844	1.688	1.735	1.853
ε_{34}	1.695	1.695	1.516	1.594	1.746

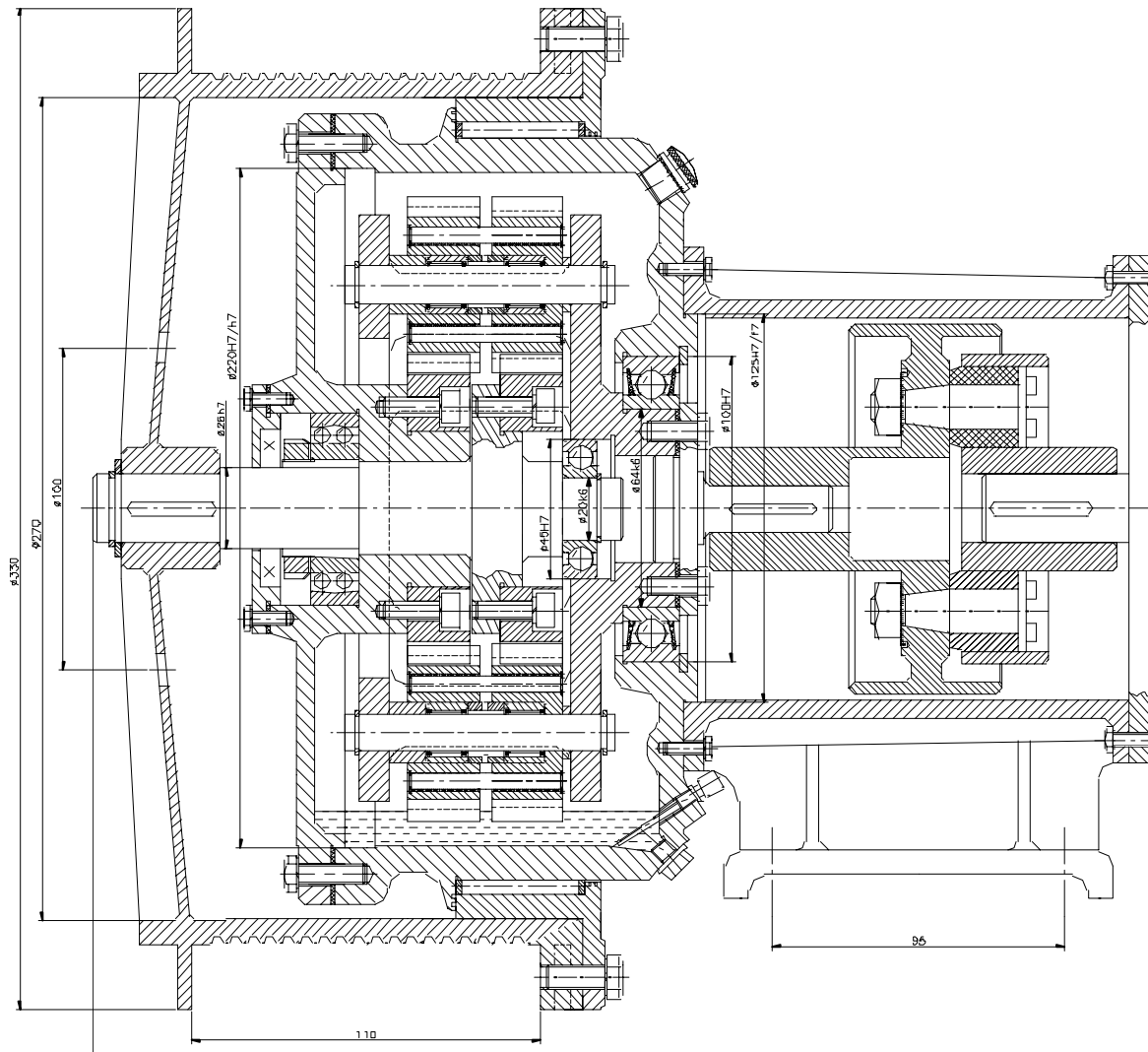
Dla każdego przypadku podanego w tabeli 4 wykonano obliczenia geometrii zazębienia w mathcad, wg zamieszczonego przykładu dla czterech satelitów można budować inne dowolne rozwiązania typoszeregu bazowego, tzn. przy innej odległości osi kół „a” i innej dopuszczalnej liczbie satelitów „s” dla dowolnej różnicy zębów „ $zz=1$, $zz=2$, $zz=3$ ”.

3. WNIOSKI

W pracy zaprezentowano pewną procedurę tworzenia geometrii typoszeregu przekładni planetarnej z zazębieniem zewnętrznym i identycznej geometrii kół centralnych, co znacznie upraszcza technologię wykonania i montażu. Wymaganie jednego odlewu jarmza będącej głównym elementem konstrukcji typowymiarów przekładni narzuca stałą odległość osi obrotu kół. Zastosowanie podanego rozwiązania znacznie obniża koszty technologii i montażu wykonania tego typu przekładni.

Zastosowanie przekładni to przykładowo napędy robotów i maszyn transportu bliskiego, jak przenośniki i urządzenia dźwigowe. Przykładem zastosowania przekładni, której koła zębate były przedmiotem obliczeń pokazano na rysunku 4.

Podany obecnie sposób wyznaczenia optymalnej odległości kół oraz sposób rozdziału współczynników korekcji, a także metodę wyliczenia parametrów geometrii zazębienia pozwala na właściwą obróbkę i sprawdzenie zazębienia. Obliczenie sprawności i nośności przekładni można wykonać wg procedury podanej w pracy Kasperka (2007). Dla konkretnego rozwiązania wg. tabeli 4 należy także dokonać obliczeń wałów i łożysk celem stworzenia dokumentacji szczegółowej dopasowanej do konstrukcji korpusu przekładni. Ilość zębów $z_1=z_4$ nie wpływa na przełożenie przekładni niemniej może być przedmiotem optymalizacji w powiązaniu z obliczeniami nośności zazębienia, wytrzymałości wałów i sprawdzeniem łożysk.



Rys. 4. Projekt zintegrowanej wciągarki z przekładnią planetarna o identycznej geometrii kół centralnych

LITERATURA

1. **Kasperek T., Ryś J.** (2006), Geometria przekładni planetarnej z ząbieniem zewnętrznym o uproszczonej technologii, *Czasopismo Techniczne*, z.1 1-M/2006.
2. **Ryś J., Sendyka B.** (1978), Ustalenie obszaru rozwiązywalności II poprawki kół o zarysach ewolwentowych, *Czasopismo Techniczne*, z.1 6-M/1978.
3. **Ryś J.** (2008), Typizacja przekładni planetarnej o identycznej geometrii satelitów, *Zeszyty. Naukowe Pol. Rzeszowskiej*, nr.75, Rzeszów 2008.
4. **Ryś J., Kasperek T.**, (2008) Project of planetary gear with the same geometry of a satellite wheel, *The Archive of Mechanical Engineering*, vol.LV, 3, p. 265-273.
5. **Kasperek T.**, (2007), Obciążenie, sprawność i nośność przekładni planetarnej o uproszczonej technologii, *Czasopismo Techniczne*, z.4 4-M/2007
6. **Ryś J., Skrzyszowski Z.**, (2003), *Podstawy konstrukcji maszyn, t.2*, Wyd. PK, Kraków.

TYPIFICATION OF PLANETARY GEAR WITH SIMPLIFYING MANUFACTURING TECHNOLOGY

Abstract: The aim of this article is to present design procedure of basic serious planetary gear train with external involutes spur gears. One can use a typical gear hobbing machine and generation grinding to manufacture the presented planetary gear. Then, the manufactured external gears can be subjected to carbonizing, and also hardening and tempering. It is possible to obtain a better dimensional accuracy thanks to grinding process (it is impossible for internal gears). Therefore, after heating treatment, the construction of the planetary gear is characterized by a higher load-carrying capacity. Next at the same gearbox can be used to different unite of wheels by typification process. There two conceptions i.e. design a planetary gear: with the same geometry of satellite wheels, which cooperate with sun gear and central gear with different number of teeth (concept 1) or using the same geometry of sun gear and central gear and different number satellite teeth (concept 2). Geometrical dimensions of teeth for concept 2 and basic transmission ratio will be described for the sake of technological teeth correction scope.